RETURN TO.
BM(NH)
GENERAL LIBRARY

a false wrapper was here inserted by the binder, dated 1870!, which therefore does removed by the Librarian as misleading.

MÉMOIRES

PRÉSENTÉS

PAR DIVERS SAVANS

A L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES

DE L'INSTITUT DE FRANCE.

S. 804. D. 19.

IMPRIMERIE DE BACHELIER,
rue du Jardinet n° 12.

MÉMOIRES

PRÉSENTÉS

PAR DIVERS SAVANS

A L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES

DE L'INSTITUT DE FRANCE,

ET

IMPRIMÉS PAR SON ORDRE.

SCIENCES MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUES.

TOME SIXIÈME.

PARIS,

BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

POUR LES MATHÉMATIQUES,

QUAI DES AUGUSTINS N° 55.

1835

NATURAL HISTORY

TABLE DES MATIÈRES

CONTENUES

DANS LE TOME VI DES SAVANS ÉTRANGERS.

Pages.

Recherches sur l'ostéologie et la myologie des batraciens à leurs différens âges, par M. Dugès..... 1

Mémoire de nosologie végétale, par M. Turpin..... 217

Mémoire sur le tannin et les acides-gallique, pyro-gallique, ellagique, et méta-gallique, par M. J. Pelouze..... 241

Mémoire sur la résolution des équations numériques, par M. C. Sturm..... 271

Recherches sur quelques changemens observés dans les animaux domestiques transportés de l'ancien dans le nouveau continent, par M. Roulin..... 319

Mémoire sur l'asparamide et sur l'acide asparamique, par MM. Boutron-Charlard et Pelouze..... 353

Mémoire sur l'action mutuelle de l'acide phosphorique et de l'alcool, par J. Pelouze..... 369

Mémoire sur la détermination des grandes inégalités de Jupiter et de Saturne, par M. G. de Pontécoulant..... 389

Mémoire sur l'organisation des cirripèdes et sur leurs rapports naturels avec les animaux articulés, par M. G.-J. Martin Saint-Ange..... 511

Mémoire pour servir à l'histoire du tapir et description d'une espèce nouvelle appartenant aux hautes régions de la Cordilière des Andes, par M. Roulin..... 557

Nouvelles expériences sur le frottement, sur la transmission du mouvement par le choc, sur la résistance des milieux imparfaits à la pénétration des projectiles, et sur le frottement pendant le choc, faites à Metz en 1833, par Arthur Morin 641

Recherches sur le calcul des séries, par M. J.-V. Poncelet.. 785

Mémoire sur le calcul des perturbations, et le prochain retour à son périhélie de la comète de Halley, par M. G. de Pontécoulant 873

Addition au mémoire sur les tapirs américains; par M. Roulin. 948

FIN DE LA TABLE.

ERRATA

Pour les recherches sur l'ostéologie et la myologie des Batraciens.

Pages	*lignes.*
55,	13, contient, *lisez* soutient
123,	3, 4, *lisez* 58
128,	1, outre *lisez* entre
142,	16, actifs formés, *lisez* formés et actifs
157,	13, aile, *lisez* aire
200,	17, deuxième colonne; externe, *lisez* interne
——	30, deuxième colonne; *après* Cuvier, *ajoutez dans la parenthèse*, et Meckel; *supprimez ces mots à la ligne suivante*
202,	1, *après* des os, *ajoutez* Batraciens anoures
203,	24, interne, *lisez* externe
205,	29, soudés en dehors, *lisez* soudés; vus en dehors
210,	12, piriforme, *lisez* pisiforme, *et ajoutez e* scaphoïde
211,	1, après le point et virgule, *ajoutez* 1.

RECHERCHES

SUR

L'OSTÉOLOGIE ET LA MYOLOGIE

DES

BATRACIENS

A LEURS DIFFÉRENS AGES.

RECHERCHES

SUR

L'OSTÉOLOGIE ET LA MYOLOGIE

DES

BATRACIENS

A LEURS DIFFÉRENS AGES,

PRÉSENTÉES A L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES,

EN RÉPONSE A LA QUESTION SUIVANTE :

« Déterminer, à l'aide d'observations, et démontrer, par des préparations anatomiques et des dessins exacts, les modifications que présentent, dans leur squelette et dans leurs muscles, les reptiles batraciens, tels que les Grenouilles et les Salamandres, en passant de l'état de larve à celui d'animal parfait. »

PAR ANT. DUGÈS,

Professeur à la Faculté de Médecine de Montpellier, Chev. de la Légion-d'Honneur, etc.

Corpora vertuntur; nec quod fuimusve, sumusve,
Cras erimus. OVID

AVANT-PROPOS.

Les métamorphoses par lesquelles certains animaux des classes inférieures passent successivement dans les différens âges ou périodes de leur vie extérieure, nous offrent, comme l'ont démontré quelques recherches récentes sur l'embryogénie, des données fort importantes relativement à celles qu'éprouvent, durant la vie intra-

utérine, des êtres plus élevés dans l'échelle organique. Ce n'est donc pas seulement à faire naître une admiration stérile que se borne l'étude de ces métamorphoses ; elles deviennent, pour le physiologiste, une source précieuse de démonstrations aussi faciles qu'évidentes en faveur de l'épigénèse : mais pour en tirer tout le parti possible, ce n'est pas à l'examen extérieur qu'il faut s'en tenir ; c'est dans les détails anatomiques qu'il faut descendre, et c'est là que se rencontrent des difficultés nombreuses, difficultés qui ont arrêté sans doute plus d'un observateur. Il ne fallait pas une attention bien scrupuleuse pour reconnaître les changemens de figure et de dimension du corps et des membres ; aussi cette connaissance remonte-t-elle à la plus haute antiquité :

> Semina limus habet virides generantia ranas,
> Et generat truncas pedibus, mox apta natando
> Crura dat, utque eadem sint longis saltibus apta,
> Posterior superat partes mensura priores.
>
> Ovid. *Metam.*, lib. XV.

Avec un peu plus de soin et d'esprit scientifique on a aisément pu reconnaître des branchies et un bec à une certaine époque, des poumons et une gueule à une autre période ; on a pu même disséquer aisément les vaisseaux, les os et les muscles dans deux âges opposés ; mais suivre, de proche en proche, les changemens qui s'opèrent au passage, saisir le mécanisme de la transmutation, c'est ce qui n'a point été fait d'une manière assez complète.

Les circonstances m'ont empêché de donner à tous les détails de ce sujet toute la précision et l'extension dont ils sont susceptibles ; mais j'ai pu du moins fixer les points principaux, et les études auxquelles les recherches demandées m'ont entraîné, m'ont permis aussi d'ajouter

quelque chose aux connaissances déjà acquises sur la structure organique des Batraciens et sur la détermination des pièces nombreuses qui composent leur charpente osseuse et la mettent en mouvement. Quoiqu'un peu éloignées peut-être de la question proposée, les réflexions mêmes que ces considérations ont amenées à leur suite sur l'ostéologie des autres animaux vertébrés ne nous ont point paru devoir être passées sous silence. Il en est résulté une ampliation considérable dans notre travail et la nécessité de le diviser en deux parties, l'une relative aux Batraciens anoures, l'autre aux urodèles. A la deuxième seulement nous rattacherons les comparaisons qu'on peut établir entre ces deux groupes si distincts, si différens sous une multitude de rapports.

PREMIÈRE PARTIE.

ANOURES.

CHAPITRE PREMIER.

REMARQUES SUR LES GENRES ET LES ESPÈCES.

Avant de donner les observations anatomiques qui font le principal objet de ce travail, il m'a paru nécessaire de bien préciser la valeur des dénominations dont je dois me servir par la suite dans l'indication des espèces que j'ai soumises à mes investigations; ces investigations mêmes, il faut le dire, m'ont fait sentir combien étaient peu naturelles et les coupes génériques établies parmi les batraciens anoures, et la distribution adoptée même par les plus modernes zoologistes. On verra plus tard combien l'ostéologie de la grenouille ponctuée (Daudin) l'éloigne de la verte; on sait déjà que le crapaud sonneur s'écarte, sous plusieurs rapports, des crapauds ordinaires, et l'on verra aussi plus tard qu'il en est de même du crapaud accoucheur et du crapaud brun. Des détails descriptifs très étendus, et qui, pour la plupart, ne seraient que la répétition de ce qu'on trouve partout, seraient ici déplacés; mais le tableau suivant, dans lequel on trouvera surtout les caractères essentiels et nouveaux des genres et espèces mal coordonnés jusqu'ici, ce me semble, et que j'ai pu étudier d'une manière plus particulière, suffira, je pense, pour motiver les dénominations dont je croirai devoir me servir par la suite. A cet effet, je n'avais pas besoin de faire entrer dans ce tableau les genres ou espèces que je n'ai pas examinés moi-même; sur la plupart, je n'aurais pas eu de données suffisantes. Je pense pourtant que les *dactylètres* et les *cératophris* de M. Cuvier doivent ou se fondre dans

le genre *bombinator,* ou venir immédiatement après; de même que les *rhinelles, breviceps* et *otilophes* doivent être annexés aux crapauds proprement dits. Quant aux *pipas*, l'absence de la langue suffirait pour les faire mettre tout-à-fait à part, ou du moins après le genre *bufo*.

TABLEAU DES GENRES ET ESPÈCES

QUI ONT ÉTÉ L'OBJET DE NOS OBSERVATIONS.

- BATRACIENS ANOURES,
  - à dents maxillaires et vomériennes;
    - langue bifide:
      - doigts sans disques : Grenouille, *Rana*
        - Verte, *esculenta.*
        - Brune, *temporaria.*
      - disques aux doigts : Raine, *Hyla*
        - Verte, *viridis.*
    - langue entière:
      - tympan visible : Accoucheur, *Obstetricans*
        - Ponctué, *punctatus* (*Rana punctata*).
        - Vulgaire, *vulgaris* (*Bufo obstetricans*).
      - tympan caché : Sonneur, *Bombinator*
        - Couleur de feu, *igneus* (*Bufo igneus*).
        - Brun, *fuscus* (*Bufo fuscus*).
  - sans dents, langue entière et libre : Crapaud, *Bufo*
    - Commun, *vulgaris.*
    - Calamite, *calamita.*

Les grenouilles, du moins les deux ici mentionnées, ont la pupille horizontalement allongée, et les pieds postérieurs palmés. La grenouille commune ou verte n'a été généralement distinguée de l'autre que par ses couleurs; mais il n'est pas rare de la trouver grisâtre et même presque noire; la tache violacée des côtés de la tête, qu'on donne comme propre à la brune, se trouve parfois aussi chez la verte; on peut en voir des échantillons même dans les figures de Rœsel. Voici quelques caractères plus positifs: chez la verte, la tête est grande et pour le moins aussi longue que large; le tympan a, en diamètre, les $\frac{2}{3}$ ou les $\frac{3}{4}$ de l'ouverture de l'œil; l'intervalle qui sépare les deux yeux n'a guère que la moitié de la largeur de la paupière supé-

rieure, et il est fortement concave. Enfin les dents vomériennes forment une rangée transversale à peine interrompue et occupant plus du tiers de la largeur du palais. Chez la brune, la tête est sensiblement plus large que longue; le tympan n'a, en diamètre, que la moitié de l'œil; les deux saillies que forment les yeux sont séparées l'une de l'autre par un intervalle plat et de largeur égale à l'une des paupières supérieures; enfin, les dents vomériennes sont réduites à deux petits groupes rudimentaires.

La raine verte que nous avons dans le midi de la France ne diffère de celle décrite par presque tous les naturalistes que par l'absence d'une bande brune sur les flancs; cette bande ne s'y voit que sur les côtés de la tête, ainsi que chez la grenouille brune. Cette différence ne doit la faire considérer sans doute que comme une variété, mais variété permanente et non à comparer aux teintes jaunâtres, noires ou noirâtres, bronzées, tachetées, que les individus jeunes offrent d'une manière transitoire, et que les adultes présentent plus passagèrement encore (1).

La raine verte a, comme les grenouilles, la langue sinon bifide, du moins échancrée, la pupille transversale, les pieds postérieurs palmés, et des grains blanchâtres et saillans sous chaque articulation des phalanges.

La prétendue grenouille ponctuée s'en écarte donc davantage puisqu'elle a la pupille verticalement allongée, les pieds non palmés, les doigts seulement bordés d'une membrane qui en suit la longueur et dépourvus des grains susdits; en outre, elle a la langue sans échancrure à son

(1) Nous avons vu la couleur du dos passer du noir d'encre au vert pâle dans l'espace d'un quart d'heure, par suite de l'exposition à l'air sec d'un individu adulte.

extrémité libre, aussi a-t-elle la plus grande analogie avec le prétendu crapaud accoucheur, pourvu comme elle de dents maxillaires et palatines, comme elle à pupille verticale, à peau presque lisse, sans parotides, et à doigts postérieurs non palmés, mais peu ou point bordés, et sans grains sous-articulaires.

Ces deux espèces, que nous croyons devoir réunir en genre, sous un nom commun emprunté au plus connu des deux, diffèrent effectivement autant des crapauds (dents) que des grenouilles; et quoique voisins des *bombinator,* auxquels Merrem avait déjà rapporté l'accoucheur vulgaire, ils s'en distinguent néanmoins assez par un caractère auquel les naturalistes ont attaché quelque importance. Je veux parler de l'existence d'un tympan extérieur. Cette partie manque effectivement au sonneur couleur de feu et au prétendu crapaud brun. Celui-ci a la pupille verticale comme les accoucheurs; le *B. igneus* l'a triangulaire; l'un et l'autre ont, aussi bien que les deux espèces précédentes, les membres abdominaux fort longs (1), mais ils ont de plus les pieds palmés : l'*igneus* surtout les a plus complètement palmés qu'aucune gre-

(1) Cette longueur des membres postérieurs, l'existence des dents, l'aspect lisse de la peau, ont fait prendre pour une espèce particulière et nouvelle de grenouille, une variété (variété pointillée) du *bombinator fuscus,* ou crapaud brun encore en bas âge; c'est la *rana cultripes* de M. Cuvier. L'ergot brun et tranchant, qui la caractérise, selon ce savant, est un des caractères les plus notables du *B. fuscus;* mais il est quelquefois jaunâtre, comme Rœsel l'a figuré dans ses planches. Cette variété de couleur de la peau, propre au jeune âge, n'a point été observée, à ce qu'il paraît, par ce dernier naturaliste; je ne l'ai vue que chez des individus passés à l'état parfait, un peu avant l'époque du plus grand accroissement du tétard. On sait que celui-ci acquiert jusqu'à la grosseur d'un œuf de poule; mais si l'eau est peu abondante, si la mare qu'il habite se dessèche peu à peu, la métamorphose est plus hâtive et le tétard grossit moins; c'est alors qu'on obtient la *rana cultripes* au lieu du *B. fuscus.*

nouille, quoique sa peau verruqueuse le rapproche des crapauds.

Ceux-ci, remarquables par l'absence des dents, la brièveté des membres, etc., ont, en outre, des parotides qui manquent à toutes les espèces ci-dessus mentionnées. Le crapaud commun et le calamite ont tous deux la pupille transversale; mais, outre les autres caractères qui les distinguent, on peut en assigner un encore très facile à apprécier sur le vivant, c'est la couleur de l'iris; un jaune verdâtre clair, veiné de noir, colore celui du crapaud calamite; un rouge de cuivre est répandu sur celui du crapaud commun. L'iris de celui-ci, décoloré par l'alcool après la mort, a pu paraître grisâtre à quelques observateurs (*Dict. sc. nat.*). Quant aux couleurs et aux inégalités de la peau, elles sont assez variables chez ce reptile, pour avoir induit en erreur plus d'un naturaliste; tantôt olivâtre et tantôt rougeâtre, comme l'a fort bien figuré Rœsel, cet animal n'en était pas moins le même quoi qu'en ait pu penser Daudin (1) : j'en ai vu de jeunes individus colorés d'un beau rouge de brique, d'autres d'un bleu-violet assez éclatant. Enfin ce n'est qu'à des circonstances passagères, à la sécheresse, à l'ancienneté et à l'épaisseur de l'épiderme que les mamelons dont la peau est couverte doivent la forme conique et pointue, la dureté, la couleur brune au sommet, qui ont frappé Bosc et lui ont fait admettre l'existence d'un *crapaud épineux* au-

(1) Je ne connais son crapaud de *Rœsel* que par la très mauvaise figure et la description imparfaite qu'il en donne. Si ses renvois à la figure de Rœsel et à la description de Daubenton (sous le nom de crapaud commun) sont exacts, certes le crapaud de Rœsel n'est, tout au plus, qu'une variété du *Bufo vulgaris*. Le *Bufo cinereus* de Daudin est-il autre chose qu'une variété d'âge et de couleur du même animal? Plus récemment j'ai pu me convaincre que le crapaud de Rœsel est une espèce distincte et plus voisine du *B. calamita* que du *vulgaris*.

quel on a rattaché quelques merveilleuses prérogatives, comme celle d'avoir fourni tous les crapauds monstrueux observés par maints naturalistes mal dépouillés des préjugés du vulgaire (*Mentzelius, etc.*); celle encore de ne jamais paraître à la surface du sol, d'aller pondre dans des eaux souterraines, etc. J'ai trouvé et conservé plus d'un individu de taille plus ou moins monstrueuse, et qui pouvait, presque d'un jour à l'autre, mériter tantôt l'épithète de *vulgaris,* tantôt celle de *spinosus.* Je n'ai pas fait mention du crapaud vert, *bufo variabilis* (1), qui pourrait bien n'être qu'un calamite sans raie jaune sur le dos. J'ai rencontré plusieurs de ces derniers dont la raie était presque effacée; j'en ai trouvé dont la peau était d'un fond blanc mêlé de rouge et semé de taches olives, bordées et pointillées d'un vert noirâtre; chez d'autres, la couleur était d'un gris brunâtre, etc. En un mot, la couleur de la peau varie assez pour rendre insuffisans des caractères distinctifs qui ne sont basés que sur elle.

CHAPITRE II.

DU SQUELETTE A L'ÉTAT ADULTE.

§ I.

Du crâne et de la mâchoire supérieure considérés dans leur ensemble.

La tête osseuse des batraciens (fig. 1, 2, 3) se distingue de celle de tous les autres vertébrés par son aplatissement, sa largeur, et la dispersion au pourtour du crâne, et à une assez grande distance même de cette boîte osseuse, des os qui composent la mâchoire supérieure et de ceux auxquels est suspendue la mâchoire inférieure. C'est dans les anoures

(1) Espèce bien distincte que M. Cuvier m'a fait voir depuis.

surtout qu'est bien remarquable cette disposition. La mâchoire supérieure, avec quelques pièces additionnelles, représente un cadre parabolique dont l'aire en avant est occupée par la cavité olfactive et unie par cet intermédiaire à l'extrémité antérieure d'un crâne allongé, prismatique, à peine élargi en arrière; en arrière aussi ce cadre est encore arc-bouté sur le crâne par un support composé de deux branches, une antérieure ou ptérygoïdienne, une postérieure ou ptérygo-tympanique, qui se réunissent sur un gros pédicule transversal, lequel contient l'appareil de l'audition; une troisième branche, souvent en partie ligamenteuse, descend de la partie la plus élevée et la plus externe de ce pédicule vers le milieu de la partie latérale du cadre parabolique, c'est l'arcade zygomatique. Un grand espace libre, circonscrit en dedans par le crâne, en arrière par le pédicule susdit, en dehors par la plus antérieure des deux branches qui en partent, et au-dessus par le zygoma (n° **10**), enfin en avant par une partie de la face proprement dite, constitue le représentant de l'orbite et de la fosse temporale. Un autre intervalle, entouré en dedans par les deux branches du support mentionné ci-dessus, en dehors par la partie la plus postérieure du cadre (arcade sous-zygomatique, n° **11′**), en haut par le vrai zygoma, représente la fosse zygomatique de l'homme. Derrière le pédicule dont il a été question plus haut, est une excavation contenant les osselets de l'ouïe, c'est la fosse tympanique. Plus en dedans est une surface alternativement convexe et concave, c'est la région ou la fosse occipitale. Les narines antérieures, supérieures ou extérieures se voient dans un troisième espace, plus petit que les deux précédemment mentionnés, et resté libre entre plusieurs os de la face vers l'extrémité du museau : les narines postérieures, inférieures ou intérieures, sont

situées presque directement au-dessous des premières, un peu plus en arrière pourtant, entre des os qui ne se voient qu'à la face palatine.

Malgré sa forme singulière, cette tête, comme nous le verrons dans les détails subséquens, se laisse assez bien ramener à des déterminations analogues à celle des autres vertébrés, et c'est avec celle des oiseaux, dont elle diffère si fort au premier aspect, qu'elle présente le plus de conformité. Qu'il nous suffise, pour le moment, de faire remarquer que les uns et les autres manquent de l'os appelé transverse ou ptérygoïdien externe par M. Cuvier, d'os nasaux distincts des frontaux antérieurs, et de frontaux postérieurs; que l'os jugal, qui n'existe pas, libre du moins, chez les uns, est rudimentaire chez les autres; que les uns et les autres enfin ont, plus visiblement que la plupart des autres vertébrés, une sorte de double zygoma, dont l'inférieur, que nous nommons arcade sous-zygomatique (n° 11'), n'a nulle analogie avec le zygoma des mammifères, quoique ces parties aient été considérées comme identiques par beaucoup d'anatomistes.

Les serpens, les lézards nous offriront aussi des analogies nombreuses dans les détails, et nous pourrions trouver, même dans l'ensemble, des rapports de forme entre celle des batraciens anoures d'une part, des ophidiens et des geckos de l'autre. Cette ressemblance tient surtout au grand écartement des os ptérygoïdiens chez ces derniers, lequel, comme nous l'avons déjà fait sentir, est porté à l'extrême chez les premiers.

La forme générale que nous venons d'assigner à la tête des reptiles qui nous occupent, n'offre, à part une seule exception, que des différences assez peu considérables dans les genres et les espèces dont leur famille se compose. Le crâne, allongé et étroit dans la grenouille verte, est déjà

beaucoup plus court et plus large dans la rousse. Il l'est plus encore chez toutes les espèces des autres genres que nous avons énumérés; cette tête est aussi plus haute, plus concave en-dessous chez les crapauds. La face supérieure du crâne est fortement creusée en gouttière longitudinale chez la *R. esculenta,* plane ou à peine concave chez la *temporaria* et les crapauds, cartilagineuse en grande partie chez la raine verte, le *bombinator igneus* et les deux *obstetricans, vulgaris et punctatus*. Enfin la grenouille verte a l'orbite garnie en dehors d'un long zygoma presque entièrement osseux; les autres, même la grenouille rousse, ont ce zygoma fort court, souvent rudimentaire et remplacé par un ligament. Dans les crapauds, surtout le crapaud commun, la fosse temporale affecte une direction verticale et même un peu inclinée en avant et en bas, tandis que dans les grenouilles, la raine, les accoucheurs et les sonneurs, c'est-à-dire chez tous les anoures pourvus de dents, elle se rejette en arrière et en haut au point de se trouver bientôt sur un plan horizontal, circonstance qui en augmente l'étendue et fournit aux muscles masticateurs des points d'attache plus multipliés; au contraire les crapauds ont sur ce même plan une fosse considérable et destinée à l'insertion des muscles élévateurs de la tête, ce qui se lie parfaitement avec leur vie souterraine.

Quant au *bombinator fuscus* adulte (Fig. 11, 12, 13, 14, 15), sa tête mérite d'autant mieux une description toute spéciale qu'elle n'a point, que je sache, été jusqu'ici signalée nulle part. Comme la tête des tortues marines et celle des lézards, celle-ci est recouverte d'une voûte osseuse (1) hérissée à sa surface d'une foule d'aspérités qui

(1) Peut-être, dans des climats moins chauds que le midi de la France,

traversent toute l'épaisseur de la peau dont le tissu semble combiné à l'os, tant elle lui est adhérente. Cette voûte donne à toute la tête une solidité que n'a pas celle des autres espèces que nous avons examinées, et les os intermaxillaires sont les seuls qui conservent leur mobilité. Les fosses zygomatiques et les fosses temporales sont entièrement cachées par le casque osseux continu au zygoma élargi; la partie interne des orbites en est aussi un peu recouverte, et leur ouverture est de toutes parts circonscrite par un bord osseux presque circulaire; les vaisseaux destinés à l'œil, et qui, chez les grenouilles, serpentent entre la peau et les muscles temporaux; qui, chez les crapauds, tracent sur les os du crâne un sillon court et profond vers l'angle interne et postérieur de l'orbite, traversent ici un véritable canal, protégé par la voûte osseuse.

J'ai dit que la peau semblait combinée au tissu osseux, ici comme chez les lézards. Cette circonstance paraîtra peu étonnante, si l'on considère que déjà, chez le crapaud commun, la peau est fort adhérente à la surface du crâne, que cette peau est très épaisse et très dure, qu'elle résiste beaucoup au scalpel, qu'enfin elle contient une proportion considérable de phosphate de chaux. Cette dernière particularité est facile à constater par la plus grossière analyse du charbon provenant de la combustion de cette peau : traité par l'acide muriatique, puis par l'ammoniaque, ce charbon a donné un précipité blanc, gélatiniforme et très chargé. La peau des grenouilles est beaucoup moins

---

l'ossification du casque dont il est ici question est-elle moins complète. Le squelette figuré par Rœsel n'offre qu'un élargissement des os superficiels, et plusieurs ne se touchent même pas; encore moins forment-ils une voûte continue. Mais il est plus probable encore qu'il en a enlevé la majeure partie avec la peau et les chairs en préparant le squelette.

abondamment pourvue de ce sel calcaire; cependant elle crie aussi sous le tranchant du scalpel, mais elle n'adhère point aux os du crâne comme celle des crapauds.

§ II.

Énumération des os du crâne et de la mâchoire supérieure.

Nous ne retrouvons point, chez les batraciens sans queue, tous les os que présentent certains autres reptiles; il en est qui manquent peut-être en totalité, mais on peut aussi attribuer, en grande partie, à une *fusion primordiale* la diminution du nombre de ces pièces osseuses. Par ces mots fusion primordiale je ne veux point parler de la soudure de rencontre, ou *fusion secondaire,* de quelque pièces primitivement séparées, mais bien d'un développement originairement simultané, c'est-à-dire d'un développement tel, que, à quelque époque que ce soit de la vie embryonnaire, on n'aperçoit aucune distinction entre les pièces composant un os unique, qui pourtant, par ses connexions et ses usages, est évidemment le représentant de plusieurs. Cette fusion primordiale, il faut bien l'admettre chez les mammifères pour chaque moitié latérale de la mâchoire inférieure (Cuvier, *Oss. foss.*, t. V, 2e partie, p. 89) et du frontal (Béclard); et nous trouverions chez les oiseaux, les reptiles et même les poissons, des preuves nombreuses du même fait, mais qu'il faudrait discuter longuement ici en raison du désaccord des écrivains sur les divers points que nous serions obligé de mettre en avant. Plusieurs de ces discussions se reproduiront, avec les preuves susdites, à l'occasion des os dont nous présenterons bientôt l'énumération et la détermination motivée : remarquons seulement, en terminant ces

préliminaires, que la différence entre la fusion primordiale et la fusion secondaire pourrait bien n'être souvent qu'apparente. Un os multiple, un ensemble d'os nombreux même, n'est souvent que le produit de points d'ossification, développés *dans un seul et même cartilage;* c'est ce qu'il est facile de reconnaître dans la tête des mammifères. Je ne veux point infirmer l'importance qu'on attache néanmoins à ces pièces, parties de centres particuliers et considérées, à juste titre sans doute, comme des organes séparés; la constance presque universelle de ces divisions dans des animaux très différens, suffit pour leur donner un intérêt incontestable en physiologie; mais les élémens de ces pièces peuvent exister dans des os simples en apparence, et dont le développement n'a paru être pourtant que l'extension d'un seul centre d'ossification: il suffit pour cela que les autres centres, plus tardifs dans leur ostéose, aient été envahis, avant leur manifestation, par les progrès rapides du premier. C'est ce que nous verrons arriver, de la manière la plus positive, dans le bassin des salamandres. Ces raisons nous paraissent suffisantes pour nous permettre d'adopter les dénominations suivantes; elles seront justifiées, je pense, par les observations qui font l'objet des paragraphes subséquens.

Les os dont nous allons nous occuper sont au nombre de 30 ou 32, dont deux impairs seulement, le sphénoïde et l'ethmoïde : en voici la liste, en commençant par la face supérieure et passant successivement à l'inférieure et aux latérales, pour finir par celui qui forme comme le centre ou la clé de tous les autres. 1° Fronto-pariétaux; 2° fronto-nasaux; 3° intermaxillaires; 4° maxillo-jugaux; 5° cornets; 6° vomers; 7° palatins; 8° sphénoïde; 9° ptérygoïdiens; 10° temporo-mastoïdiens; 11° tympano-malléaux; 12° rochers; 13° osselets de l'ouïe; 14° occipitaux

latéraux; 15° ethmoïde. A ce dernier se rattachent des portions cartilagineuses dont nous chercherons plus loin à apprécier la nature.

§ III.

Des os fronto-pariétaux.

Ces os (n° 1), qui recouvrent la presque totalité du crâne, sont assez nettement déterminés par cet usage, et par l'analogie qu'offriraient aisément toutes les classes de reptiles, les oiseaux, les mammifères même. Ils sont d'ailleurs du nombre des os complexes qui, simples chez l'adulte, sont multiples dans le bas âge comme nous le démontrerons ailleurs. Il ne faudrait pas croire pourtant qu'on y trouve un point particulier pour le frontal postérieur; celui-ci n'est plus ici, de même que dans les oiseaux, qu'une éminence du frontal principal qui fait une saillie variable selon l'espèce à la partie postérieure et interne de l'orbite. Chez le *B. fuscus* seul, elle s'unit au temporal par une suture à laquelle participe la portion pariétale. La soudure ne se borne pas toujours à réunir aux frontales les pièces pariétales; dans le sonneur brun, par exemple, il y a aussi soudure sur la ligne médiane, de sorte que chez l'adulte il n'existe plus qu'un os fronto-pariétal. Tous nos autres Batraciens conservent au contraire une suture sagittale, et même, comme nous l'avons déjà dit, plusieurs d'entre eux offrent un grand écartement sur la ligne médiane, une sorte de fontanelle qui réduit quelquefois leur portion osseuse à une arête constituant le bord interne de l'orbite.

§ IV.

Des os fronto-nasaux.

Il n'est pas aussi facile de bien déterminer les os que nous nommons fronto-nasaux (n° 2), et qui sont en effet des os nasaux pour la plupart des anatomistes allemands, des frontaux antérieurs pour M. Cuvier. Leur participation à l'encadrement de l'orbite (1), leur connexion avec le bord postérieur ou externe de l'apophyse montante du maxillo-jugal (au moyen d'une véritable apophyse orbitaire interne ou antérieure souvent fort longue) d'une part, leur contact sur la ligne médiane et leurs rapports avec les narines d'autre part, me semblent autoriser la double dénomination que je leur donne. Ce sont évidemment, et pour les mêmes motifs tirés de leurs connexions, les pareils des os qu'on a nommés tantôt nasaux et tantôt frontaux antérieurs chez les oiseaux. Un coup d'œil comparatif jeté sur la tête d'un de nos Batraciens et sur celle d'une tortue, prouvera aisément encore que ces os sont semblables à ceux qui ont, chez ces reptiles, reçu des qualifications également ici trop exclusives; car si c'est entre l'un ou l'autre de ces trois groupes d'animaux et un lézard, un crocodile ou un poisson osseux qu'on établit la comparaison, on verra que ce n'est que dans le nasal et le frontal antérieur à la fois qu'on peut trouver de quoi représenter l'os unique des oiseaux et des grenouilles, des crapauds; que pour les tortues il faudra y joindre encore le lacrymal, ou, ce qui revient au même, prendre à la fois le nasal et le frontal antérieur, ou mieux fronto-

(1) Chez le *B. fuscus* il forme le tiers environ de son contour.

lacrymal des serpens. Mais cette dernière observation ne s'applique ni aux oiseaux, ni probablement non plus aux Batraciens dont nous parlons, puisqu'ils possèdent un lacrymal isolé du fronto-nasal.

§ V.

Des os intermaxillaires.

Toujours doubles comme chez les mammifères, les crocodiles, les poissons, composés comme chez la plupart de ces animaux et chez les oiseaux, les lézards, les serpens qui l'ont unique, d'une apophyse montante et d'une portion palatine élargie, les intermaxillaires (n° 3) de nos Batraciens sont munis d'un bord aminci chez les crapauds, garni de dents crochues chez les grenouilles, les raines, les accoucheurs et les sonneurs. On les connaissait chez le *bombinator igneus;* Rœsel, et après lui Mertens, les ont indiquées dans le *B. fuscus;* mais je ne sache pas qu'on les ait signalées avant nous dans l'*obstetricans vulgaris*. Le crochet de ces dents, plus aminci que le reste, et qui paraît seul au dehors dans l'état frais, est couvert d'une couche d'émail.

§ VI.

Des maxillo-jugaux.

Ce que je viens de dire des dents est entièrement applicable à celles dont sont garnis les maxillo-jugaux (n° 4). Ces grands os, fort semblables à ceux des serpens, sont aussi pourvus d'une apophyse montante, mais qui n'est bien développée que dans les grenouilles; elle va, comme de coutume, se joindre à l'apophyse orbitaire interne ou

antérieure, c'est-à-dire à la queue de l'os fronto-nasal. Chez le *B. fuscus*, cet os, plus large que chez toutes les autres espèces, est, par une longue suture, articulé avec le temporal élargi comme lui, et de même hérissé d'aspérités aussi bien que tous ceux qui font partie de la face supérieure de la tête. C'est principalement cette dernière connexion, et la ressemblance parfaite qu'elle donne à cette partie postérieure et élargie de l'os en question avec le grand jugal de la cécilie, qui me détermine à croire que l'os dont nous nous occupons est aussi bien le représentant du jugal que du sus-maxillaire; nous verrons bientôt que l'os nommé jugal par beaucoup d'écrivains, ne peut être considéré comme tel; et quant à la fusion hâtive de ces deux pièces de la mâchoire supérieure, nous en avons un exemple dans les oiseaux, comme nous le prouverons sous peu; nous en avons un plus évident encore dans certains rongeurs, les lapins par exemple.

§ VII.

Des cornets.

Nous nommons ainsi deux petits os (n° 5) formés d'une lamelle repliée, courbée en plusieurs sens, situés au côté interne et à l'extrémité antérieure de chaque maxillo-jugal. Ces osselets sont suspendus dans un cartilage qui n'est qu'une dépendance de l'ethmoïde, et cette circonstance est déjà bien favorable à notre détermination. Ajoutez à cela leur forme, leur situation, comparée à celle des cornets des lézards, et l'analogie deviendra évidente; elle ne l'est pas moins si on les compare à ceux de la cécilie que nous avons trouvés attachés au devant de son ethmoïde (*Voyez* les fig. 96 et 97, *o*). Toutefois M. Cuvier les regarde comme des os nasaux rudimentaires et déformés.

§ VIII.

Des vomers.

Les vomers (n° 6), en raison de leur nombre pair, de leur forme aplatie, de leur position sur un plan horizontal, de leur écartement mutuel, pourraient laisser quelques doutes sur leur détermination ; mais déjà les fœtus des mammifères, de l'homme même, nous offrent un vomer presque double; déjà, dans les oiseaux et les serpens, on l'aperçoit entre les os palatins ; je le vois dans la tortue franche séparer, avec l'intermaxillaire, toute l'étendue de la portion palatine des sus-maxillaires et des palatins; dans les caïmans, déjà double, il apparaît entre les intermaxillaires; dans les lézards enfin, il fait une partie notable de la voûte palatine; là il est double aussi et presque horizontal; là il est aussi placé comme chez les Batraciens, entre les palatins et les sus-maxillaires. On ne peut donc, chez ces derniers, le prendre raisonnablement pour un palatin, d'après l'opinion de plusieurs anatomistes allemands. Le vomer est denté, comme en beaucoup de poissons, chez tous ceux de nos Batraciens qui portent des dents aux os de la mâchoire supérieure; il est aussi, chez eux, bien plus grand, plus fort, plus rapproché de son congénère que chez les crapauds, où on le voit long-temps cartilagineux ou rudimentaire.

§ IX.

Des palatins.

Le palatin (n° 7) a été méconnu par quelques zoologistes en raison de sa forme allongée et de sa direction transver-

sale ; mais ses rapports avec l'os ptérygoïdien, le vomer, l'éthmoïde et la narine postérieure, comparés à ceux des serpens, des lézards et même des mammifères, ne peuvent laisser aucun doute, si seulement on réfléchit que l'écartement considérable des os ptérygoïdiens motive la direction que nous venons de lui reconnaître. Le prendre pour un ptérygoïdien interne, c'est se mettre en contradiction avec toutes les connexions ordinaires à cet os chez les lézards, les serpens, les crocodiles.

Cet os offre aussi quelques différences, suivant les espèces : ainsi fortement élargi en dehors, épais et massif chez le *B. fuscus*, il se soude de très bonne heure avec le maxillo-jugal comme chez la cécilie, ou même fait primordialement corps avec lui. Chez le *B. igneus*, *l'obstetricans vulgaris* et le *punctatus*, il manque en totalité.

§ X.

Du sphénoïde.

L'os en forme de croix qui embrasse la partie inférieure du crâne et des rochers ne pouvait être méconnu par personne ; c'est le sphénoïde (n° 8) ; mais est-ce le postérieur et l'antérieur à la fois ? Cette dernière opinion nous paraît la plus probable, et, bien qu'à aucun âge nous n'ayons rencontré chez nos Batraciens cet os subdivisé, il faut pourtant qu'il en soit ainsi chez certaines espèces, puisque M. Morren (thèse, page 337) a trouvé et m'a fait voir une suture en V bien nette et bien évidente entre la branche antérieure et le reste, sur des ossemens fossiles qui paraissent avoir appartenu à des Batraciens adultes. La fusion primordiale des deux sphénoïdes admise par Bojanus et d'autres, tant pour nos

reptiles que pour les oiseaux et les poissons, me paraît appuyée sur cette considération que, chez les mammifères, c'est le sphénoïde antérieur seul qui est en rapport avec les palatins, le vomer et l'ethmoïde, comme l'est, dans les oiseaux, les Batraciens, les serpens et les poissons, l'extrémité antérieure de leur long sphénoïde. Une seule difficulté pourrait embarrasser dans cette détermination, c'est la présence d'un petit os impair et placé de champ devant l'ouverture antérieure du crâne chez les poissons, et qui est peut-être représenté chez les oiseaux par la partie postérieure et assez long-temps cartilagineuse de la cloison inter-orbitaire : cette circonstance ne détruit point la force des argumens énoncés plus haut, car cette portion osseuse ou cartilagineuse n'a point les connexions propres à la partie centrale du sphénoïde antérieur; elle ne touche point le vomer, et je n'y puis voir que le résultat de la fusion des ingrassiaux ou ailes orbitaires, qui sans cela manqueraient, selon moi, aux poissons osseux. Les rapports de cet osselet avec les nerfs optiques autorisent assez d'ailleurs cette détermination.

J'ai parlé des rapports du sphénoïde avec les palatins et les vomers; ils n'existent guère en réalité, parmi nos anoures, que chez la grenouille brune ; là, la pointe du premier est en contact avec les angles postérieurs et internes des derniers. Quoique plus allongé encore chez la verte, le sphénoïde arrive à peine au même contact; plus élargi, plus court dans les accoucheurs et les sonneurs (excepté le *B. fuscus* dont le sphénoïde est aussi étroit que chez la grenouille verte), la raine verte, les crapauds, sa pointe n'arrive plus au niveau des palatins, qui eux-mêmes s'arrêtent plus loin de la ligne médiane. Le *B. igneus* offre une sorte de troncature au niveau du bord postérieur de l'ethmoïde.

Si la branche longitudinale est bien l'analogue de l'avancement styliforme des oiseaux, il n'est pas moins évident que les branches transversales représentent les apophyses ou facettes articulaires qui supportent, chez les oiseaux et les sauriens, les os ptérygoïdiens.

§ XI.

Des Ptérygoïdiens.

En effet, c'est à l'extrémité de ces longues apophyses que s'appuient ici ces os (fig. 2, n° 9) et telle est en partie, la cause de cet écartement considérable qu'ils laissent entre eux, et dont il a déjà été plusieurs fois question. Je dis en partie, car cet écartement est aussi accru par une apophyse articulaire qui, partie du milieu des ptérygoïdiens, se porte en dedans vers le sphénoïde et donne à ces os la forme de lambda minuscule, qui les caractérise chez les Batraciens anoures. Des deux autres branches du lambda, la postérieure, plus courte, va, comme chez les oiseaux, les lézards et les serpens, affermir l'articulation de la mâchoire inférieure; elle est fort élargie chez le *B. fuscus* : l'antérieure plus longue, recourbée en dedans, offre ces particularités à un haut degré chez le *B. igneus;* c'est chez le *fuscus* qu'on lui trouve plus de brièveté et d'épaisseur. Cette dernière branche représente-t-elle à la fois, comme chez les tortues (1), une portion du ptérygoïdien interne et l'externe confondu par leur rapprochement, en raison de l'élargissement de la tête? On serait tenté de le croire,

(1). Chez la tortue franche, le jugal vient toucher le ptérygoïdien en même temps que le maxillaire et le palatin; connexions propres au ptérygoïdien externe ou transverse.

en examinant ceux du gecko, où ces os sont plus écartés de la ligne médiane que chez les autres lézards, et où le ptérygoïdien externe est accolé aux bords de l'interne; mais nous verrons plus loin que, chez les Batraciens, quelque chose peut aussi représenter cet os resté à l'état rudimentaire; à moins toutefois qu'on ne préfère le croire tout-à-fait nul, comme chez les oiseaux.

§ XII.

Des Temporo-mastoïdiens.

Je donne ce nom à un os (fig. 1 et 3, n° 10) en forme de marteau, qu'on a presque toujours désigné par celui de tympanique. Celui à qui nous réservons ce dernier nom fera l'objet du paragraphe suivant, et nous y compléterons la justification de la présente détermination. Pour le moment, faisons remarquer seulement que l'os temporo-mastoïdien n'est jamais ici en rapport d'articulation avec la mâchoire inférieure, comme l'est généralement le tympanique.

L'étude de la région temporale chez les oiseaux, les reptiles, les poissons même, pourra nous fournir les preuves de notre assertion; mais elle nous forcera d'entrer dans d'assez amples développemens et de combattre, chez plusieurs de ces animaux aussi bien que chez les Batraciens, quelques déterminations plus ou moins généralement adoptées. Avant d'entrer dans ces détails, jetons un coup d'œil sur les différences que présente le temporo-mastoïdien chez les Batraciens anoures, qui sont ici l'objet spécial de nos recherches.

La grenouille verte ou commune est remarquable par la longueur de la branche supérieure du T représenté par cet os; la portion antérieure de cette branche, véritable

apophyse zygomatique, touche presque le sus-maxillo-jugal ; la portion postérieure ou mastoïdienne est bien plus courte. Chez la grenouille rousse, les deux portions sont à peu près d'égale longueur et peu étendues ; la rainette verte, l'accoucheur ponctué, les crapauds ne possèdent guère que la portion mastoïdienne, et le sonneur pluvial que la portion zygomatique ; l'accoucheur vulgaire les a toutes deux fort courtes. Quant au sonneur brun, cet os offre chez lui une large plaque chagrinée en dehors, articulée par suture avec le fronto-pariétal au-dessus de la fosse temporale, avec le maxillo-jugal au-dessus de la fosse zygomatique (fig. 13), et garni en dedans de deux apophyses ; l'une, qui est la branche inférieure du T des autres anoures, s'articule par son bord postérieur avec le ptérygoïdien ; l'autre, dirigée en dedans, vers le rocher, est la portion mastoïdienne.

Le temporal écailleux des oiseaux présente, dans un certain nombre d'espèces, une apophyse zygomatique distincte, descendante et dirigée vers le maxillaire et le jugal comme chez la grenouille verte ; le mastoïdien n'est pas plus séparé de l'écailleux que chez les Batraciens. Ce serait déjà là une donnée favorable à nos idées ; mais on pourrait croire que la branche descendante de ceux-ci représente le tympanique de ceux-là, s'il n'y avait pas ailleurs un tympanique véritable, et si nous ne trouvions pas dans les reptiles de quoi expliquer cette forme trifide du temporo-mastoïdien.

Chez le crocodile, un os nommé temporal par M. Geoffroy, et mastoïdien par Cuvier, mais répondant exactement à l'écailleux ou plutôt au temporo-mastoïdien des oiseaux, occupe les angles postérieurs de la tête ; il est en rapport avec les occipitaux et le pariétal, il ferme en arrière et en dehors la fosse ou le trou (véritable fosse

temporale) qui se voit sur les côtés du crâne, et avance jusqu'à s'articuler (apophyse zygomatique) avec le frontal postérieur; de même que dans beaucoup d'oiseaux et dans les cétacés on voit l'apophyse zygomatique s'unir à l'apophyse orbitaire externe et changer en trou la fosse temporale; de même aussi qu'on voit le temporal des lacertiens aller au-dessus de la fosse temporale s'articuler avec le frontal postérieur, sans arriver, la plupart du temps, jusqu'au jugal qu'il touche pourtant chez quelques espèces. Le même os embrasse en-dessus le tympanique et l'emboîte encore en arrière par une éminence descendante. Voilà l'analogue de toutes les parties du temporo-mastoïdien des Batraciens anoures; rien n'y manque en fait de connexions, si ce n'est que l'apophyse descendante est devant l'oreille chez les Batraciens, derrière chez le crocodile. Cette différence n'existe pas chez le caméléon, dont le temporal, bien reconnu pour tel par Cuvier, a, comme celui de la grenouille commune, une branche zygomatique et une descendante, à la vérité assez courte, mais qui couvre un peu le tympanique en arrière et en dehors.

C'est, au reste, le même os, le temporal (1) qui ayant été qualifié de mastoïdien chez le crocodile, où il n'y en a pas qui mérite ce nom, si ce n'est peut-être à l'état fétal comme chez l'homme, l'a été également chez la tortue et chez les poissons osseux; d'où il est résulté qu'on a méconnu leur mastoïdien véritable. Cet os avait été fort bien indiqué par Cuvier chez les lézards, dont le temporal était aussi déterminé à merveille, quoi-

(1) C'est évidemment aussi un temporo-mastoïdien que l'os mobile, nommé mastoïdien, qui soutient le tympanique chez les serpens hétérodermes.

que ce savant zoologiste n'eût pas reconnu son identité, si évidente pourtant, d'après ses connexions et sa situation, avec le temporo-mastoïdien du crocodile. Le mastoïdien existe aussi bien, aussi distinctement chez les tortues et les poissons osseux que chez les lézards; c'est ce petit os qui a embarrassé Cuvier, et dont il a fait pour la tortue un démembrement de l'occipital sous le nom d'occipital extérieur, et pour les poissons un occipital supérieur; il est facile de s'en convaincre par une comparaison attentive. De plus amples détails seraient déplacés et tout ce que nous venons de dire pourrait même être regardé comme superflu, s'il ne devait nous aider dans la détermination de l'os dont nous allons nous occuper; là aussi nous trouverons l'occasion d'éclaircir une question que nos remarques actuelles ne peuvent manquer de faire naître: qu'est-ce donc que le temporal écailleux ou l'os déterminé comme tel par Cuvier chez les crocodiles et les tortues?

§ XIII.

Des Tympano-malléaux.

Examinés la plupart du temps sur des têtes sèches, les os dont nous voulons ici parler (fig. 1, 2, 3, etc., n^os^ 11, 11′) ont été généralement méconnus par les zoologistes, si l'on en excepte le docteur Mertens, pour qui les os précédemment décrits ne sont que des temporaux écailleux, et ceux-ci de vrais os tympaniques ou os carrés. Restés en grande partie cartilagineux, même à l'âge adulte, chez la plupart des Batraciens anoures, ils n'offrent plus, à l'état de dessiccation, qu'une petite portion osseuse dirigée horizontalement, recourbée en forme de virgule (n° 11′), faisant partie de la fa-

cette articulaire de la mâchoire inférieure, et s'unissant par sa pointe avec l'os réputé sus-maxillaire (maxillo-jugal), pour former le sous-zygoma : cette dernière connexion a généralement motivé sa détermination, et c'est là le *jugal* de Cuvier et de bien d'autres anatomistes ; nous verrons bientôt jusqu'à quel point cette opinion est admissible.

Le cartilage, qui forme la portion la plus considérable de l'os tympano-malléal, est attaché à la partie externe du rocher et caché entre le ptérygoïdien et le temporo-mastoïdien qui l'environnent jusque près de la facette articulaire qui reçoit la mâchoire inférieure, mais sans participer en rien à la composition de cette facette. La portion osseuse varie sous ce dernier rapport ; tantôt étroite et longue, comme chez la grenouille commune, elle n'offre en arrière qu'une tête un peu élargie qui concourt à la formation de la facette susdite pour son tiers externe seulement ; tantôt, comme chez le *B. fuscus*, l'élargissement postérieur occupe toute l'étendue de la facette et remonte entre le ptérygoïdien et le temporo-mastoïdien ; de sorte que la portion cartilagineuse est fort courte et n'occupe plus que la partie la plus élevée de l'intervalle de ces deux os. Entre ces deux extrêmes se trouve le crapaud calamite, chez lequel la branche horizontale de cette pièce est presque entièrement cartilagineuse aussi bien que le haut de la branche verticale et toute sa partie interne, l'angle externe étant seul bien ossifié. Tout cela prouve que cet os est bien réellement unique, quoique rarement ossifié dans toute son étendue ; ses rapports avec le rocher, avec l'osselet de l'ouïe qu'il protége en avant (excepté chez les *bombinator* qui en manquent) formant ainsi la majeure partie de la paroi antérieure de la caisse du tympan, et enfin avec la mâchoire inférieure : tout cela manifeste assez son identité avec le tympanique des oiseaux

et des autres reptiles. Reste sa connexion avec l'os principal de la mâchoire supérieure qui a déterminé à le regarder comme un jugal, même lorsqu'il est privé de ces rapports, comme dans les salamandres et les poissons. (Cuvier). Les détails d'analogie dans lesquels nous allons entrer résoudront cette difficulté, qui s'étend à plus d'êtres qu'on ne l'imaginerait d'abord.

S'il est vrai, comme nous avons tâché de le démontrer plus haut, que l'apophyse zygomatique réelle existe ailleurs que dans le sous-zygoma qui nous occupe maintenant (1), si la connexion du vrai zygoma avec l'os principal de la mâchoire supérieure, soit médiate (grenouille, etc.), soit immédiate (sonneur brun), prouve que cet os contient les élémens du jugal; il est évident que le jugal n'appartient pas à l'arcade sous-zygomatique. Cette réflexion est entièrement applicable aux oiseaux; chez eux, l'arcade zygomatique est quelquefois complète (perroquets), indépendamment du sous-zygoma. Le plus souvent c'est par des ligamens, ou bien c'est par fusion avec le sous-zygoma qu'elle se complète; mais alors même on peut trouver à la fois et le vrai jugal, et l'osselet qui représente la branche horizontale du tympano-malléal de nos Batraciens. Ce jugal très petit (2), très mince et collé sur l'union de l'apophyse postérieure du maxillaire avec l'osselet dont nous venons de parler, a été trouvé d'abord par M. Geoffroy Saint-Hi-

(1) Les muscles masseters ne s'attachent pas plus au sous-zygoma des oiseaux qu'à celui des Batraciens, preuve de plus que ce n'est point là la véritable arcade zygomatique.

(2) Celui du hérisson n'est pas proportionnellement plus considérable. Celui du dauphin est suspendu à l'os lacrymal (Meckel) comme dans les *Sterna*. Dans les oiseaux de proie le lacrymal descend jusqu'à l'arcade sous-zygomatique où se trouve le petit jugal (Meckel).

laire sur le poulet où nous l'avons rencontré sans peine, aussi bien que sur de jeunes palmipèdes ; Meckel l'a vu sur beaucoup d'autres oiseaux; il l'a observé chez les *Sterna*, mais détaché du maxillaire, et en rapport avec le lacrymal auquel d'ordinaire il ne tient que par un ligament : sans doute il y tient immédiatement dans les perroquets et autres oiseaux à arcade zygomatique double et complète comme chez les mammifères (carnassiers); donc, encore une fois, l'os annexe au tympanique n'est pas jugal.

Si nous étendons nos recherches à d'autres animaux, nous y retrouverons plus manifestement encore, et cet os particulier, et le jugal. Ce dernier, par exemple, ne peut être méconnu chez le crocodile, malgré la dénégation de M. Geoffroy Saint-Hilaire qui donne ce nom à un autre os (frontal post.-*Oss. foss.* T.V, 2ᵉ p., pl. III, fig. 1, 2, 3, 5, 6, lettre P). C'est, chez cet animal, comme chez les lézards, un vrai jugal de mammifère; eh bien! entre le jugal et le tympanique, est un os allongé qui ne peut être que l'analogue de l'osselet sous-zygomatique des oiseaux et des Batraciens anoures. Ce n'est pas un temporal comme l'a déterminé Cuvier; nous avons prouvé ci-dessus que le vrai temporal, le pareil de celui si évident des oiseaux, de celui des lézards, c'était l'ensemble ou une partie de son prétendu mastoïdien ; mais ce serait plutôt un démembrement du temporal, un cotyléal comme le veut M. Geoffroy. Remarquez que cet os fait partie d'un sous-zigoma et non d'une vraie arcade zygomatique; la véritable arcade, nous l'avons dit ailleurs, c'est celle qui borde le trou qu'on voit sur le crâne du crocodile, trou qui n'est autre que la fosse temporale ou du moins sa partie supérieure débouchant dans une énorme fosse zygoma-

tique (1). Meckel l'a bien compris quand il a parlé de deux arcades zygomatiques chez les crocodiles.

Le même os se retrouve chez la tortue (fig. de Cuvier, *l. c.*, pl. XI, lettre K, désignation *temporal écailleux*), souvent plus développé encore; mais sa détermination *à priori* y serait moins facile à cause de l'oblitération de l'ouverture de la fosse temporale, qui n'est tout au plus représentée que par un trou fort étroit (*l. c.*, fig. 6, 18, 21); mais chez les lézards et les serpens, cet os n'a plus pour analogue qu'un ligament qui paraît néanmoins susceptible de s'ossifier, comme Meckel l'assure pour l'orvet. Aussi, à part cette dernière circonstance, les sauriens n'ont-ils qu'un seul zygoma, lequel même est souvent confondu (lézards, geckos, scinques, orvets), avec le bouclier qui recouvre le crâne; mais plus souvent encore est libre et distinct (monitors, sauvegardes, dragonnes, stellions, agames et même caméléons).

Il faut donc reconnaître l'analogie de l'os que je nomme ici provisoirement sous-zygomatique des oiseaux, des crocodiles, des tortues, avec la portion horizontale de l'os tympano-malléal des Batraciens anoures. Maintenant il s'agit de trouver à quel os, à quelle portion d'os elle peut répondre chez les mammifères, afin de pouvoir la désigner par son nom véritable.

La forme de cet osselet chez les oiseaux, ses rapports avec le tympanique auraient pu faire croire que c'était un styloïdien devenu libre par l'atrophie des cornes antérieures de l'hyoïde; mais chez les Batraciens anoures, ces

(1) C'est ce qu'a bien vu M. Geoffroy. C'est l'analogue de la large ouverture que circonscrivent les os temporaux et frontaux postérieurs chez beaucoup de sauriens.

pièces existent et vont s'attacher au crâne; de même le styloïdien existe chez les monotrèmes, dont la tête offre aussi, selon Meckel, un double zygoma ou un zygoma à deux racines, entre lesquelles il y a une ouverture considérable comme chez les reptiles : ce sont ses expressions. Dans la tête d'échidné figurée par Cuvier, on voit que l'ossification a envahi, ainsi que chez les tortues et *le B. fuscus,* le dessus des fosses temporales et zygomatiques, et par conséquent les deux arcades; mais on voit bien aussi que le bord inférieur de ce large opercule répond parfaitement au sous-zygoma des oiseaux et des reptiles. Donc ce n'est pas un styloïdien que représente l'os qui nous occupe. Serait-ce quelque portion du tympanique? Mais ses deux portions existent distinctement, au témoignage de Meckel, chez les monotrèmes; plusieurs tortues, pourvues de l'os en question, ont aussi un cercle tympanique complet.

Cherchons enfin s'il n'y a pas une partie qui manque uniformément à tous les animaux à double zygoma. Il leur manque à tous un osselet de l'ouïe; monotrèmes, oiseaux, reptiles n'en ont que deux ou trois, savoir : l'étrier, toujours reconnaissable à ses connexions avec la fenêtre ovale; quelquefois un second, petit et cartilagineux, intermédiaire à l'étrier et au suivant, et qui ne peut être que le lenticulaire; enfin, vient celui qui naturellement doit représenter l'enclume; mais c'est aussi le dernier, c'est celui qui touche à la membrane du tympan. Cette connexion suffirait-elle pour infirmer une détermination si rationnelle? Supposons, chez un mammifère, le marteau chassé ou attiré hors du tympan, pourquoi l'enclume n'en prendrait-elle pas la place sur la membrane qui le clot? Ce serait donc le marteau qui manquerait à la chaîne des osselets chez les

vertébrés ovipares? Serait-ce cet os qui, dirigé au devant du tympanique sans l'abandonner, constituerait la partie postérieure de l'arcade sous-zygomatique? Cette opinion ne nous a point paru dénuée de fondement, et de là la dénomination de *malléal*, déjà consacrée par M. Geoffroy, que nous avons cru devoir lui donner, et celle de tympano-malléal, que nous appliquons à l'os en partie cartilagineux mais unique, de nos Batraciens.

Cette manière de voir peut être appuyée sur les argumens suivans : 1° chez l'homme et plusieurs mammifères, le marteau a généralement une communication avec l'extérieur de la caisse par la fente glénoïdale, et une longue apophyse en part pour se diriger en avant; 2° chez les tatous « l'apophyse antérieure du marteau, bien plus longue que le manche, se loge en partie dans une rainure externe du cercle du tympan, et par conséquent est presque tout entière hors de la cavité. » (De Blainv., *Princip. d'Anat. comp.*, T. I, p. 501). L'oryctérope paraît avoir un gros malléal presque tout-à-fait hors du tympan, si j'en juge sur la figure donnée par Cuvier dans ses *Ossemens fossilles*. Dans les dauphins « le marteau est comme dans les tatous, sorti de la caisse du tympan. » (De Bl. p. 503). Cet os, ici volumineux, est *sans manche*, et articulé sans mobilité sur le bord antérieur de la caisse : son apophyse antérieure est fort grosse et assez longue; j'ai constaté ces derniers détails. On peut croire que la seule chose qui empêche un os ainsi placé de se diriger vers la mâchoire supérieure, c'est la présence de la mâchoire inférieure, qui ne s'articule pas avec le tympan, comme chez les oiseaux et les reptiles, mais avec le temporal écailleux. Un ligament prend, selon M. Magendie, la

place des muscles du marteau dans les mammifères éloignés de l'homme; un fort ligament s'attache aussi au sous-zygomatique ou malléal des oiseaux (du moins dans le genre *anser;* L.), mais s'insère sur le bord interne d'une fosse profonde de la mâchoire inférieure; serait-ce à la fois le représentant du muscle antérieur du marteau et du ligament latéral interne de l'articulation, tous deux attachés, dans l'espèce humaine, pour ainsi dire, bout à bout sur l'épine du sphénoïde? Si le rapprochement de cet osselet et du sus-maxillaire semblait surprenant, on pourrait rappeler que cet os dans le cabiai s'articule avec le temporal près de la glénoïde (Cuv. T. V, 1re partie, p. 23), que d'ailleurs, dans tous les ovipares, le tympanique semble avoir été attiré au devant de la caisse, qu'il recouvre et entoure chez les mammifères (1).

---

(1) On trouvera dans le tableau de la tête des vertébrés cinq os des poissons osseux mis en regard du tympanique et du marteau. Justifions brièvement ici cette détermination, que nous ne donnons pas d'ailleurs comme bien certaine. 1° L'os nommé temporal par Cuvier, et qui s'articule *mobilement* avec notre temporal (son mastoïdien), et le frontal postérieur, doit nécessairement faire portion du tympanique par analogie avec ce qui se voit chez les oiseaux. 2° Le tympanique de Cuvier semble faire partie inséparable du précédent, tant il lui est intimement uni. 3° Le symplectique, recevant un cartilage dont il sera question plus loin, donnant, de sa base, insertion au styloïdien, ressemble beaucoup au tympanique des Batraciens. 4° Le préopercule, solidement uni aux deux précédens, s'articule aussi par symphyse avec la mâchoire inférieure; n'est-ce point là l'extrémité articulaire du tympanique? 5° L'os jugal de Cuvier, celui qui sert au ginglyme de la mâchoire inférieure, comme chez les Batraciens, est placé immédiatement devant et en dehors du préopercule et du symplectique, comme le malléal des oiseaux est en avant et en dehors du tympanique. Les cinq os représentent donc le tympano-malléal de nos Batraciens. Peut-être trouverait-on l'analogue des quatre que nous attribuons à la représentation du tympanique, dans les points d'ossification assez multipliés que présente la caisse des mammifères; on y rapporterait le serrial, l'uro-serrial et le cotyléal de M. Geoffroy.

§ XIV.

Des Rupéo-ptéréaux.

Chez toutes les espèces ici étudiées (pl. 1, n° 12) le rocher paraît être, dans le jeune âge, séparé de l'occipital latéral; cela existe du moins, même chez le *B. fuscus,* dont l'adulte offre une complète soudure de ces deux os. Chez la grenouille verte, au contraire, ils restent séparés durant la vie, si ce n'est peut-être à un âge très reculé. Sa soudure est un peu plus prompte chez la grenouille brune (1), plus encore chez la rainette et les sonneurs, surtout le brun : toujours c'est la suture d'en haut, celle qui borne en arrière la fosse temporale chez les grenouilles, qui s'efface la première; celle d'en bas, que recouvrent les apophyses latérales du sphénoïde, reste plus long-temps large et cartilagineuse; elle l'est encore chez le crapaud commun adulte, tandis que la supérieure a dès long-temps disparu. Ces deux os participent à la formation du labyrinthe et de la fenêtre ovale sur laquelle nous reviendrons plus bas à l'occasion des osselets de l'ouïe; une portion cartilagineuse borne généralement le rocher en dehors, même dans un âge assez avancé; c'est là que s'attachent, par continuité de substance, en avant, en haut, et tout-à-fait en dehors, le cartilage tympanique, plus en de-

(1) Je trouve en général l'ossification plus hâtive chez celle-ci que chez la grenouille verte; mais je dois avertir que les squelettes qui m'ont particulièrement servi appartenaient au sexe masculin pour celle-là, au féminin pour celle-ci; or, si j'en juge par le crapaud commun, il me paraît que la solidification des os marche beaucoup plus vite (du moins proportion gardée à la taille) chez le mâle que chez la femelle.

dans, plus bas et en arrière, le cartilage styloïdien, ou le prolongement de la corne antérieure de l'hyoïde. Ce cartilage est constamment percé d'un trou oblique par lequel passe un nerf qui va, au-dessus de l'osselet principal de l'ouïe s'anastomoser, dans la fosse tympanique, avec celui auquel le trou condyloïdien sert d'issue (8e et 9e paires). Ce trajet semble devoir être celui d'un nerf facial ou portion dure de la 7e paire : et en effet, né du même point que l'auditif, ce nerf sort du crâne par le trou ovale avant de gagner celui dont il vient d'être question. Quant au trou ovale lui-même, il a été connu de tous les anatomistes; situé à l'angle postérieur et interne de l'orbite il donne passage au nerf facial, au trijumeau et à plusieurs moteurs de l'œil. Il n'appartient pas toujours en entier au rocher, surtout dans le jeune âge : alors même on ne voit qu'une échancrure que convertit en trou le cartilage qui va à l'ethmoïde et qui nous occupera bientôt : dans l'adulte le trou est presque complet chez la grenouille verte ; il l'est chez le crapaud commun, où l'on trouve une languette assez large entre lui et le cartilage. Cette languette est même percée d'un petit trou qui n'a généralement pas été indiqué, bien qu'il donne passage à la 6e paire de nerfs. Chez les grenouilles, il est percé aussi bien que le trou optique dans le cartilage même. Ces détails vont nous aider dans la détermination d'une portion de l'os qui nous occupe. Jusqu'ici, en effet, nous n'en avons parlé que comme d'un rupéal, pour nous servir du terme employé par M. Geoffroy; il faut maintenant justifier l'expression composée qui fait l'intitulé de ce chapitre. Le passage des nerfs dont nous venons de parler prouve que toute la portion au moins qui avoisine ou précède le trou ovale est le représentant de la grande aile du

sphénoïde; car ces nerfs sont ceux qui, chez les mammifères, traversent les trous rond et ovale et la fente orbitaire; cette portion est d'ailleurs plate, élargie; elle occupe dans l'orbite la même place que la grande aile ou aile temporale (ptéréal Geoffroy) occupe chez les oiseaux. Enfin, c'est une de ses connexions ordinaires, que d'être articulée avec la partie antérieure du rocher et souvent de partager avec lui la fonction de transmettre hors du crâne plusieurs nerfs importans, la 5ᵉ paire par exemple. Si l'on admet, comme nous sommes porté à le faire, les déterminations de Meckel (*Anat. comp.* T. II, p. 473 et suiv.) préférablement à celles de Cuvier, les poissons osseux nous offrent ici, à part la fusion des deux pièces, une analogie complète. La portion ptéréale de l'os qui nous occupe ici est la première ossifiée, et c'est de proche en proche que le reste ou la portion rupéale se solidifie de dedans en dehors; il n'y a là, il est vrai, qu'un premier point d'ossification; mais nous nous sommes suffisamment expliqué précédemment à ce sujet pour que cette circonstance ne présente ici aucune difficulté.

§ XV.

Des osselets de l'ouïe.

Je désigne par cette expression collective une chaîne de trois pièces cartilagineuses ou osseuses (fig. 3, 9 et 10, n° 13) étendues de la fenêtre ovale à la membrane du tympan. Ceux du crapaud ont été assez exactement décrits par M. de Blainville (*Anatomie comparée*, T. I, p. 546); il m'a paru qu'il n'en était pas ainsi de ceux de la grenouille, et la même obscurité est répan-

due sur la description donnée dans les *Leçons d'anatomie comparée* (T. II, 506).

La première pièce ou la plus externe, celle qui est engagée dans la moitié supérieure de la membrane du tympan (fig. 9 et 10, *a*, *b*) chez les grenouilles, qui l'envahit presque tout entière chez les crapauds (1), notamment le calamite, est large et en raquette chez ces derniers, étroite et en spatule chez les premières; toujours cartilagineuse elle offre aussi toujours en haut un pédicule également cartilagineux qui va s'attacher, en se courbant, au cartilage tympanique et par conséquent à la paroi antérieure de la fosse de ce nom. Pour les auteurs cités plus haut ce pédicule est un ligament, et la pièce elle-même représente le marteau. Nous avons dit précédemment que le marteau ne faisait point ici partie de la chaîne des osselets, et c'est pour nous l'enclume bien déterminée par ses connexions avec la pièce suivante.

Celle-ci (*c*), qui est la deuxième, toujours osseuse chez les crapauds comme chez les grenouilles, est prismatique et en massue, mince en dehors, épaisse en dedans, renforcée encore de ce côté par une épiphyse cartilagineuse. On ne peut méconnaître ici l'étrier, comme il existe chez les oiseaux, chez les crocodiles, les tortues, les lézards, les serpens; c'est toujours un os allongé, situé horizontalement et en travers, élargi vers la fente ovale qu'il ferme en tout ou en partie. Chez nos Batraciens, cet os est uni par une articulation très mobile, à l'enclume, et par une autre articulation non moins libre, de la troisième pièce ou de la plus interne.

(1) Les osselets de la rainette ressemblent à ceux des grenouilles; les accoucheurs se rattachent plutôt aux crapauds sous ce rapport.

Celle-ci (*d*) est cartilagineuse; c'est un disque épais, conique même chez les crapauds, où il est plus large que l'extrémité interne de l'étrier, et qui attaché (quoique mobile) au bord de l'occipital latéral, là où il concourt à la formation de la fenêtre ovale, achève de fermer cette fenêtre. Une portion du muscle occipito-sous-scapulaire s'attache à ce disque et doit le tirer fortement en arrière. Elle existe seule et sans autre osselet chez le *B. fuscus* et *igneus* et ferme complètement la fenêtre ovale. Cette dernière circonstance nous permet de la comparer avec un os souvent fort petit, quelquefois même nul, qui ferme aussi en bas la cavité labyrinthique des poissons osseux; c'est celle que Cuvier nomme *rocher*, dénomination que nous avons cru devoir, avec Meckel, appliquer à un autre os; mais si la comparaison est facile à établir, pour la pièce qui nous occupe, entre les Batraciens et les poissons, sa détermination n'est pas aisée, si l'on veut la rapporter à quelqu'une des vertébrés supérieurs. Est-ce un démembrement de l'étrier, ou bien une pièce particulière et indépendante? Ce n'est que par une conjecture qu'il serait assez difficile d'appuyer sur des bases bien solides, qu'on pourrait regarder ces portions de cartilages comme représentant les trompes d'Eustache. Leurs connexions avec le rocher, l'occipital latéral et le sphénoïde (qui entre aussi pour quelque chose dans la formation du contour de la fenêtre ovale) porteraient à le croire, et il resterait même peu de doute sur cette analogie si la table pharyngienne des oiseaux (lame du sphénoïde postérieur) correspondait aussi évidemment que le pense M. Geoffroy Saint-Hilaire (*Phil. anat.*, pl. 6 et p. 224) au cartilage de la trompe d'Eustache des mammifères. A la vérité, si l'on voulait suivre aussi la détermination du

même auteur pour les osselets de l'ouïe chez les ovipares, il faudrait abandonner celle que nous venons d'énoncer. Dans sa manière de voir, la pièce qui nous occupe serait clairement cet étrier qui, aussi cartilagineux, est renfermé dans le vestibule chez le crocodile, la chouette, etc. (*Phil. anat.* pl. 1). Les pièces que nous avons appelées étrier et enclume deviendraient l'enclume et le marteau (1), et il faudrait faire de notre malléal un cotyléal.

§ XVI.

Des Occipitaux latéraux.

Ces os (fig. 1 et 2, etc., n° 14) forment presque tout le contour d'un trou occipital assez grand, plus large que haut dans la grenouille verte, le *bombinator fuscus*, les *obstetricans vulgaris* et *punctatus*, plus haut que large, et terminé en haut par un angle aigu dans les crapauds, le *B. igneus*, et un peu dans la *rana temporaria*, arrondi chez la rainette. En bas ces os ne se touchent point immédiatement; un basilaire cartilagineux les sépare; mais le sphénoïde les maintient solidement en rapport. En haut ils sont en contact immédiat, comme chez les ruminans, les crocodiles, les serpens, les poissons, dont l'occipital supérieur est un peu plus en avant, et tel que nous le retrouverons ici à l'état de cartilage.

---

(1) Telle est, au reste, la détermination donnée pour les osselets de l'ouïe des Batraciens anoures, par Cuvier, qui combat pour le crocodile celle de M. Geoffroy Saint-Hilaire. Il me semble que, si l'on admet ici que l'os allongé en massue est l'enclume, il faut en faire autant pour tous les autres ovipares, à l'imitation de M. Geoffroy. L'os en trompette des tortues et du crocodile est bien le même que celui-ci; mais c'est bien aussi le même que l'étrier à deux branches de la chouette et des mammifères.

Les occipitaux latéraux méritent encore notre attention, non-seulement pour la part qu'ils prennent à la formation de l'oreille et du crâne, mais aussi par les attaches musculaires que fournit leur surface extérieure à laquelle il faut noter sous ce rapport, 1° une apophyse mastoïde située en haut sur la suture d'union ou la ligne de soudure entre cet os et le rocher, 2° en dedans et en haut une fosse occipitale, 3° en bas une autre fosse, la sous-condyloïdienne, dans laquelle se voit l'orifice d'un trou condyloïdien considérable. Quant aux condyles mêmes, assez rapprochés en général vers le milieu du bord inférieur du trou occipital et en forme de larme renversée, ils sont, au contraire, fort écartés, forts petits et arrondis chez la rainette.

§ XVII.

De l'ethmoïde, du lacrymal, de l'adgustal, de l'ingrassial, de l'occipital supérieur et du basilaire.

Nous comprenons ici sous un titre commun (fig. 6 et 7 n° 15, etc.) des pièces fort diverses, mais toutes continues, et dont la continuité est très importante à remarquer pour l'étude de l'anatomie du tétard et des transformations que subit l'organisation chez des reptiles dont la métamorphose est accompagnée de changemens si considérables.

Examiné dans son ensemble le système osso-cartilagineux dont il s'agit ici offre une forme très irrégulière, mais en harmonie avec celle de la tête à laquelle il sert de centre et d'arc-boutant. Épais et prismatique dans les deux tiers postérieurs de la partie centrale, il sert là à former la cavité du crâne; élargi en avant il forme les fosses nasales, et deux branches latérales, bientôt recourbées en arrière, circonscrivent les orbites en avant

et en dehors. Presque tous les os de la tête sont en connexion directe avec ce système; les fronto-pariétaux recouvrent la face supérieure de la portion cranienne, ils bouchent deux ouvertures latérales qui se voient en arrière, et une grande lacune médiane et plus antérieure : ils s'enfoncent même dans ces ouvertures, du moins les postérieures, de sorte que, quand ils en sont détachés, on voit à leur surface inférieure un disque saillant comme surajouté à leur épaisseur (Merteus). Les fronto-nasaux couvrent aussi la partie antérieure et moyenne; c'est entre eux et les vomers que se trouve la portion cartilagineuse où sont creusées les cavités olfactives; c'est entre eux et les palatins que se trouve cachée la portion transversale de la branche latérale que nous avons mentionnée tout à l'heure. La portion longitudinale de cette même branche est protégée par le ptérygoïdien en dedans, par le maxillaire en dehors; en arrière seulement elle est à nu sur le ptérygoïdien jusqu'à l'endroit où elle se confond avec la portion cartilagineuse du tympano-malléal. Chez le *B. fuscus* seul cette partie est couverte et enveloppée de toutes parts, le ptérygoïdien lui formant un canal complet et très étroit. Ce système, dont l'ethmoïde est comme la clé, a d'autres connexions encore : en avant, l'intermaxillaire et le sus-maxillaire sont attachés, le premier, par son apophyse montante, le second, par l'élargissement de son extrémité antérieure, à des pédicules cartilagineux larges pour ceux-ci, étroits pour ceux-là : c'est dans l'épaisseur même des pédicules destinés aux sus-maxillaires que se trouvent incrustés les cornets nasaux : en arrière les rochers et les occipitaux latéraux lui sont comme soudés; en-dessous enfin, le sphénoïde en protége et en cache une grande partie. En un mot, il n'y a que le temporo-mastoïdien

qui ne soit pas avec lui en rapport immédiat, à moins qu'on ne considère comme lui appartenant la portion cartilagineuse du tympano-malléal avec laquelle cet os est en connexion entière.

Je n'examinerai pas ici jusqu'à quel point il serait possible de retrouver un pareil système dans les portions cartilagineuses de la tête des autres vertébrés à l'état fétal, mais je dois faire remarquer que son analogue existe, même à l'état adulte, chez un certain nombre de poissons. Je l'ai parfaitement reconnu chez les gades (fig. 8), et je tirerai parti de cette circonstance dans la détermination des portions diverses que nous allons successivement passer en revue. Commençons par la portion osseuse, qui est d'ailleurs la plus centrale et sert de lien à toutes les autres.

1° *Ethmoïde* (n° 15). C'est l'os en ceinture de Cuvier. Sa partie postérieure seule a pu lui faire donner ce nom, car en avant, au lieu de former un anneau, il présente un double canal qui sert au passage des nerfs olfactifs, et constitue, en s'élargissant subitement, le commencement des fosses nasales. Il faut aussi rattacher à l'ethmoïde toute la portion cartilagineuse située au devant de l'os en ceinture, et qui lui est unie par continuité de substance, de telle sorte que, par les progrès de l'âge, elle finit par être envahie dans l'extension successive de l'ossification chez le *B. fuscus*.

Les usages ci-dessus assignés à cet os, le trou qu'il offre aussi pour le passage du rameau nasal du nerf ophthalmique le déterminent assez comme ethmoïde; son ossification complète, son unité peut-être, ont paru à Cuvier peu favorables à cette opinion; mais on vient de voir qu'il est en grande partie cartilagineux, et son ossification, assez tardive, s'opère toujours par deux points

isolés, situés au-dessous des angles internes et antérieurs des orbites. Cette origine (en-dessous) doit éloigner toute idée d'analogie avec un frontal; cependant Cuvier le compare au frontal des serpens; mais ce dernier renferme, selon moi, les élémens de l'ethmoïde, qui aident seuls à fermer le crâne en-dessous et en avant. Si l'on veut, au reste, comparer cet ethmoïde des Batraciens anoures avec celui d'autres vertébrés, on lui retrouvera facilement les rapports avec les frontaux, les nasaux, les maxillaires, les palatins, le vomer, le sphénoïde, qu'on lui connaît chez les mammifères. Chez les oiseaux on trouvera son parfait analogue pour les rapports, et jusqu'à un certain point pour la forme, avec l'os de la cloison inter-orbitaire (sphénoïde antérieur de quelques-uns, ethmoïde du plus grand nombre), comme doivent le faire penser son usage de protéger le nerf olfactif, ses rapports avec le vomer en avant et en bas, le sphénoïde en bas aussi et en arrière, le lacrymal sur les côtés (Meckel, T. III, p. 281), les frontaux et les fronto-nasaux en haut, etc. Il est à remarquer que ces rapports sont exactement semblables chez nos Batraciens, et que chez eux, comme chez les oiseaux, fort souvent un intervalle entre les frontaux principaux et les fronto-nasaux laisse voir à nu une portion de la lance horizontale de l'ethmoïde, circonstance qui se retrouve chez quelques crocodiles au témoignage de Cuvier (*Oss. foss.* T. V, 2^e^ part., p. 81). Parmi les autres reptiles, je pourrais citer la cécilie, qui a un ethmoïde tout-à-fait semblable; mais la tête de cet animal est si peu connue, que c'est plutôt des anoures à la cécilie que de la cécilie aux anoures qu'il faut demander des lumières et emprunter des secours. Néanmoins l'ethmoïde de la cécilie peut ajouter beaucoup de force à notre détermination des cor-

nets, des ingrassiaux, etc.; c'est pourquoi nous l'avons dessiné avec soin, aussi bien que le reste de la tête de ce singulier reptile. Comme chez les anoures, une portion se montre à la surface du crâne entre les frontaux (fig. 92, 95, 96, 97; *c.*).

Chez les poissons l'ethmoïde est unanimement reconnu, et ses rapports avec les frontaux principaux, les frontaux antérieurs, le vomer, etc., prouvent déjà assez son analogie avec celui que nous regardons comme tel chez les oiseaux et les Batraciens anoures; mais des analogies plus fortes encore se montrent quand on met à découvert sa portion cartilagineuse, et qu'on la voit se loger en-dessous dans la gouttière du sphénoïde, se prolonger en-dessus, couverte par les frontaux, jusqu'au crâne même, en protégeant les nerfs olfactifs, en présentant une grande lacune médiane, et plus loin deux ouvertures latérales telles que celles qui ont été indiquées plus haut.

2° *Lacrymal.* La branche latérale (fig. 1, 6, 7; *b*) qui se glisse sous le fronto-nasal, s'élargit en s'appliquant contre la face interne du sus-maxillaire, et se porte ensuite en arrière, est assez difficile à rapporter à quelque pièce bien connue du crâne des autres vertébrés; cependant la proximité ordinaire du lacrymal et de l'ethmoïde, les rapports du premier avec les autres os que nous venons de nommer, soit chez les mammifères, soit chez les oiseaux, m'avaient fait soupçonner la présente détermination, lorsqu'une remarque importante est venue la confirmer : chez le *B. fuscus* adulte, cette portion est envahie par l'ossification très étendue de l'ethmoïde, et elle est alors percée d'un trou en entonnoir, qui se porte dans les fosses nasales, et qui semble ne pouvoir être destiné qu'au passage des larmes,

bien que je n'aie pu en trouver aucune trace chez les autres Batraciens anoures qui conservent cette pièce à l'état cartilagineux.

Quant à la partie postérieure de cette branche (*o*) on pourrait, en raison de ses rapports avec le ptérygoïdien, y voir l'analogue d'un os transverse ou ptérygoïdien externe (*adgustal* de Geoffroy Saint-Hilaire); mais on peut objecter aussi, 1° que cet os, dans les autres reptiles, ne se porte point, comme fait ici le cartilage, en avant jusqu'au lacrymal, en arrière jusqu'au tympanique; 2° que chez les poissons, on trouve, entre les deux ptérygoïdiens, qui existent bien distincts, un filet cartilagineux partant de la substance même du palatin, avec lequel il fait corps, et allant s'identifier avec la substance d'une pièce du tympanique (symplectique) en passant entre plusieurs autres. Cette circonstance ne prouve-t-elle pas que le cartilage en question est autre chose que le représentant d'un adgustal, quoiqu'il puisse lui appartenir en partie (1).

3° *Ingrassial.* Derrière l'os en ceinture (fig. 2, 3, 6, 7; *d*) est en-dessus une grande lacune et sur les côtés une portion cartilagineuse qui s'étend jusqu'au ptéréorupéal et dans laquelle est percé le trou optique. Cette circonstance, aussi bien que ses rapports avec le sphénoïde, avec l'os représentant la grande aile ou ptéréal en font un ingrassial (aile orbitaire) bien prononcé. Chez les oiseaux l'ingrassial est également représenté par une portion long-temps cartilagineuse qui circonscrit le trou optique et se continue d'une part avec la portion cartilagineuse de l'ethmoïde (cloison inter-orbi-

(1) Le jugal y est peut-être aussi pour quelque chose; il compléterait, comme chez beaucoup de reptiles, la chaîne entre l'adgustal et le lacrymal.

taire) comme cela a clairement lieu chez quelques quadrupèdes, vivipares, le saïmiri, par exemple (Cuv. *Oss. foss.*, T. V, 2e part., p. 74), et d'autre part avec la grande aile dont l'ossification l'envahit à la longue. Chez la cécilie adulte, cette dernière circonstance existe bien nettement, et l'ethmoïde osseux est séparé, par un cartilage, d'un ingrassial également osseux mais soudé à la grande aile et au corps même du sphénoïde.

4° *Sus-occipital.* Entre les rochers et les occipitaux latéraux (fig. 6, *e*) est une portion cartilagineuse assez large qu'on ne voit qu'après l'ablation des fronto-pariétaux; cette situation doit nous la faire regarder comme un occipital supérieur enfoncé sous les pariétaux aussi bien que chez les lézards, les crocodiles, les tortues : il est seulement ici plus caché à cause d'un contact immédiat, et de là sans doute aussi la consistance cartilagineuse qu'il conserve. Les deux trous qu'on y remarque se voient dans l'occipital supérieur de plusieurs oiseaux, de l'oie, de divers canards, de la grue, etc. Chez les poissons nous trouvons à la vérité un occipital supérieur osseux (*inter-pariétal,* Cuvier) extérieur, et une portion cartilagineuse cachée par les pariétaux et les frontaux, et offrant aussi deux grandes ouvertures, ou, plus rigoureusement, une ouverture presque complètement divisée en deux par une languette naissant de son bord antérieur; mais l'os et le cartilage sont en continuité de substance : on peut croire que l'un et l'autre font partie d'un occipital supérieur dont la partie qui est à découvert s'est seule ossifiée.

5° *Sous-occipital.* Entre les os occipitaux latéraux et les rupéo-ptéréaux (fig. 7; *f*) se trouve aussi une portion de cartilage ordinairement cachée par le sphénoïde, et que des connexions dénotent assez comme l'a-

nalogue du basilaire : on sait que, chez les oiseaux, une partie de cet os est cachée aussi par le sphénoïde élargi en arrière. La portion qui vient, jusqu'au trou occipital, séparer les occipitaux latéraux est fort étroite dans les grenouilles, plus large chez les crapauds. Chez le *B. fuscus* adulte, elle est d'une consistance presque osseuse.

Telles sont les diverses pièces auxquelles se rapportent évidemment les portions d'un tout qui, avec les tympaniques, les occipitaux postérieurs et les rochers, constitue, comme nous le verrons ailleurs, presque exclusivement la tête des tétards.

§ XVIII.

De la Mâchoire inférieure.

Presque toujours étudiée sur des pièces sèches, la composition de la mâchoire inférieure (fig. 4, 5) n'a pas été généralement reconnue : selon Meckel, il ne s'y trouverait que deux pièces osseuses pour chaque côté ; Cuvier en admet trois, un os dentaire, un tubercule articulaire et un os représentant la plupart des autres pièces sous-maxillaires qu'on trouve chez les vertébrés inférieurs. Cette détermination est sans doute celle qu'adopte, dans une proposition de sa thèse, M. Morren, qui admet trois os, sans entrer à ce sujet dans aucun détail.

Mertens n'en compte que quatre en tout, deux de chaque côté; mais, autant que le permet l'inextricable obscurité de son style, on peut deviner qu'il a pourtant connu même les pièces cartilagineuses que nous allons indiquer. Nous en comptons quatre de chaque côté, huit en tout par conséquent.

1° La pièce principale (fig. 4 et 5, n° 16), osseuse, forte et solide, creusée en gouttière en-dessus et en dehors, occupe presque tout le côté interne et inférieur du sous-maxillaire. En arrière et en dedans elle forme une éminence plus saillante chez les grenouilles que chez les crapauds, et qu'on a comparée à l'apophyse coronoïde dont elle remplit les fonctions. En conséquence cette grande pièce doit renfermer les élémens de l'operculaire, de l'angulaire et du complémentaire. Nous la nommerons *operculo-angulaire.*

2° Une pièce plate, allongée (n° 17), recouvre au devant une bonne partie de la gouttière formée par la face antérieure de l'os précédent; sa position nous la fait regarder comme un *sur-angulaire.*

3° La partie interne et antérieure de la branche sous-maxillaire (n° 18) est constituée par un petit os recourbé sur les bords et à concavité supérieure; c'est le *dentaire.* Le précédent s'applique un peu sur sa face antérieure (presque jusqu'au bout dans le *B. fuscus*) et y adhère souvent au point que ces deux pièces ont été considérées comme une seule par Cuvier et par Mertens. Elles sont effectivement tout-à-fait soudées chez le *B. igneus* adulte. Par son extrémité interne, le dentaire est uni mobilement avec son congénère; par l'externe, il fait suite à un cartilage mince, allongé, caché entre l'operculo-angulaire et le sur-angulaire, puis logé à nu dans la gouttière du premier de ces os et formant par son renflement la pièce suivante.

4° *L'articulaire* (n° 19). Toujours cartilagineuse, celle-ci offre une facette pour l'articulation tympano-maxillaire et une apophyse qui se prolonge en arrière à quelque distance au-delà même de l'os operculo-angulaire, dans lequel il est du reste contenu comme

chez le crocodile, mais sur lequel il n'est pas mobile, comme semble l'avoir cru Mertens.

Ainsi, une continuité non reconnue jusqu'ici, existe entre l'articulaire et le dentaire, au moyen d'une longue tige cartilagineuse, dont le premier ne se distingue pas du tout, et dont le second n'est distinct que par son ossification. C'est, comme nous le verrons ailleurs, le reste du cartilage fondamental du sous-maxillaire chez les têtards, et il est bien remarquable que ce cartilage se retrouve chez presque tous les ovipares, du moins comme faisant suite à la pièce articulaire et s'enfonçant entre l'operculaire et le sur-angulaire. Je l'ai trouvé chez les jeunes oiseaux; et on le connaissait déjà chez les autres reptiles et les poissons osseux (Meckel, T. II, p. 509), où je l'ai facilement observé moi-même.

Il est assez singulier que ce soient justement les pièces par lesquelles les deux mâchoires se touchent et s'articulent, qui restent cartilagineuses comme elles l'étaient chez le têtard; il l'est aussi de voir les dentaires s'ossifier si peu et rester à l'état presque rudimentaire, même chez ceux de nos reptiles qui sont pourvus de dents à la mâchoire supérieure. Cette particularité ne semble-t-elle pas indiquer que l'os dentaire joue ici un rôle inaccoutumé? C'est ce que l'observation m'a démontré. Chose assez difficile à prévoir *à priori*, ce n'est plus à l'*alimentation*, c'est à la *respiration* qu'il est destiné à servir; et c'est, non dans la mâchoire inférieure, mais dans la supérieure, que se passe le mouvement pour la production de laquelle le dentaire conserve une mobilité dépendant de l'élasticité des pièces osseuses ou cartilagineuses auxquelles il est attaché.

Remarquons d'abord la corrélation qui existe entre cette mobilité et celle des intermaxillaires, et ajoutons, par anticipation, que ces derniers ne sont pourvus que

de muscles abaisseurs. En effet, ceux qu'on trouve entre les intermaxillaires ne sont propres qu'à rapprocher leurs apophyses montantes et à faire basculer en bas leur partie horizontale. L'antagonisme à ce mouvement ne se trouve que dans celui des os dentaires de la mâchoire inférieure. Lorsque la bouche est fermée, ceux-ci se logent dans une concavité de la portion horizontale des intermaxillaires; chez la grenouille commune même et chez le crapaud commun, il y a là une fossette destinée à recevoir une saillie formée par les extrémités internes des deux dentaires réunis. Cette saillie est susceptible d'augmenter beaucoup par un mouvement de bascule de ces deux osselets, analogue à celui qui peut déprimer les os intermaxillaires. Un muscle transversal, que nous indiquerons plus tard sous le nom de sous-mentonnier, produit cet effet, en rapprochant l'un de l'autre les bords inférieurs des dentaires; alors leurs extrémités internes forment un angle saillant, s'élèvent et repoussent en haut les intermaxillaires. Voilà des phénomènes qu'il est facile de constater par l'inspection, et l'expérience faite à l'aide du bout du doigt sur le cadavre frais ou même sur le vivant. Mais quelle est l'utilité de ces mouvemens? C'est ce qu'apprend encore l'inspection et l'expérience. L'abaissement des intermaxillaires porte en avant et en dedans leur apophyse montante et ouvre largement les narines; leur élévation produit l'effet opposé et ferme ces ouvertures; or pour peu qu'on examine avec attention la respiration des Batraciens anoures, on voit, comme Laurenti et Townson l'ont fort bien observé, que les narines restent ouvertes durant les mouvemens fréquens et rapides qu'exécute la région gutturale, mais qu'elles se ferment quand un mouvement plus considérable pousse l'air dans les poumons, ce qui arrive à des intervalles variés, mais

assez réguliers entre eux. On conçoit que, dans ces grands mouvemens, l'air, fortement pressé dans le sac guttural, sortirait aussi aisément par les narines qu'il entrerait dans la glotte, si celles-ci n'étaient point solidement obstruées. Dans les petites oscillations, cette clôture n'est pas nécessaire, parce qu'elles ne sont pas destinées à remplir le poumon, mais seulement à y donner une impulsion, une secousse, un mouvement à l'air qu'ils renferment, à en renouveler même peut-être une petite partie, ce qui n'empêche pas qu'il ne s'échappe peu-à-peu jusqu'à ce qu'une grande déglutition vienne le remplacer tout-à-fait. On a attribué à la langue cette clôture des narines; il peut en être ainsi chez les salamandres, dont la langue ne paraît pas avoir d'autre destination et dont la cavité gutturale a peu d'étendue; mais ce moyen serait probablement très insuffisant pour le large et musculeux gosier des Batraciens anoures.

§ XIX.

De l'Hyoïde.

Une plaque cartilagineuse large et mince (fig. 16 21), deux longues tiges cartilagineuses plates, étroites et recourbées en S, attachées à la partie antérieure de la précédente et fixées au crâne dans la substance même de la portion non ossifiée du rocher, enfin deux os allongés, solidement fixés au bord postérieur de la plaque, et embrassant entre eux le larynx : voilà ce qui constitue généralement l'hyoïde des Batraciens anoures à l'état adulte. Nous verrons ailleurs comment se forment et se joignent ces diverses pièces, dans lesquelles il est facile de retrouver le corps de l'hyoïde, les cornes styloïdiennes ou antérieures, et les cornes thyroïdiennes ou postérieures.

Le premier (fig. 16, n° 20) ne peut donner lieu à aucune difficulté; mais pour les cornes antérieures, si l'on considère leur continuité de substance, d'une part avec le rocher, de l'autre avec le corps hyoïdien, chez les grenouilles, etc., on peut se demander si ce cartilage représente l'os styloïdien (n° 22) ou la corne styloïdienne. Le long styloïdien des mammifères autorise la première détermination, et ce qui la confirmerait encore, c'est que, chez le *B. fuscus*, la tige cartilagineuse partie du rocher n'est unie que par une jointure ligamenteuse à l'avancement du corps hyoïdien (n° 21), qui pourrait à lui seul représenter la corne styloïdienne. Et en effet, en suivant les transformations de la grosse branche qui contient l'hyoïde du tétard, il semble qu'elle se partage en deux parties, dont la plus courte et la plus large se soude au corps hyoïdien, l'autre au rocher.

D'après cela on pourrait dire que la corne styloïdienne (n° 22), bien qu'ayant ici son usage réel, est restée rudimentaire comme chez les oiseaux, où elle a été souvent méconnue.

Comme chez eux aussi la corne thyroïdienne (n° 25) a acquis un grand développement et une consistance presque tout osseuse; elle offre seulement, à son extrémité, le rudiment d'une 2e pièce, qui existe mieux prononcée chez les ovipares emplumés.

En énonçant cette comparaison, je dois avertir que je ne considère pas l'hyoïde des oiseaux comme différent de celui des autres vertébrés : la corne postérieure, quelque grande qu'elle soit, quoique composée de plusieurs pièces (comme chez les tortues, les salamandres, un de nos Batraciens même), n'est toujours que la thyroïdienne et non la styloïdienne, comme l'ont pensé Cuvier et M. Geoffroy. Elle ne s'attache point à la région temporale,

et ses muscles ne sont autres que ceux de cette corne; l'hyoglosse, en particulier, la caractérise aussi nettement chez les oiseaux que chez les reptiles. Dès lors il est clair aussi que les pièces osseuses ou cartilagineuses dont M. Geoffroy a démontré l'existence au devant du corps hyoïdien des oiseaux, ne sont que des cornes styloïdiennes refusées à tort à ces animaux par Cuvier, mais avortées par défaut de connexion avec l'apophyse stylóïde qui leur manque; connexion que l'avancement de la langue dans un bec toujours prolongé en avant rendait au moins fort difficile.

Terminons cet article par quelques remarques sommaires sur les diversités offertes par l'hyoïde chez nos Batraciens anoures. Celui des grenouilles (fig. 16) est remarquable par sa largeur, celui des crapauds par sa longueur, celui des sonneurs, des accoucheurs et de la rainette, par la profondeur de son échancrure antérieure et la brièveté de son corps d'avant en arrière. Les grenouilles offrent deux petits ailerons (n° 21) sur le trajet des branches hyostyloïdiennes. On peut les regarder comme l'extrémité libre des cornes antérieures (fig. 18). Chez le *B. fuscus*, les cornes postérieures s'élargissent beaucoup en s'ossifiant vers leur extrémité antérieure : le *B. igneus* et *l'obst. vulgaris* (fig. 19, 20) ont la plaque du corps hyoïdien ossifiée partout excepté au milieu, mais de cette ossification imparfaite, et comparable à celle de squelette des poissons cartilagineux. Enfin, l'*obst. punctatus* (fig. 21) est remarquable par la réunion des bords du corps de l'hyoïde avec l'extrémité des petites ailes latérales que le corps de cet os présente chez tous nos anoures; d'où résulte un trou de chaque côté. De plus l'articulation des cornes postérieures avec le corps est munie, en-dessous, de deux osselets fort adhérens à l'un et à l'autre (n° 23 *bis*),

mais bien distincts et en forme de marteau; nous les avons dessinés avec des proportions un peu fortes pour les faire mieux distinguer; ils n'ont rien de commun avec le larynx, aucun muscle ne s'y attache, et ils sont collés mais non incrustés, dans le cartilage hyoïdien. On peut les comparer à la branche cartilagineuse ou osseuse qui répète ou du moins fortifie la corne thyroïdienne des salamandres.

§ XX.

De la Colonne vertébrale.

Dix pièces entrent dans la composition de cette colonne (fig. 30, 32— 35), et le sonneur brun lui-même n'offre point, comme le pipa, la soudure des deux dernières, que Mertens lui attribue.

Sans décrire minutieusement les huit premières vertèbres (fig. 32, n°24), nous rappellerons seulement quelques particularités qui les signalent chez les diverses espèces.

1° Leur corps épais chez les crapauds, le sonneur brun, aplati de haut en bas chez les grenouilles, l'est beaucoup chez le sonneur pluvial, dont le canal vertébral est fort large. Ces corps sont unis entre eux par un condyle reçu dans une cavité; ce condyle est à la face postérieure chez la plupart, à la face antérieure chez le sonneur pluvial; il manque à l'une et à l'autre face de la 8e vertèbre des grenouilles, dont la 9e, ou sacrum, est munie d'un condyle à la face antérieure et de deux à la postérieure (1). Ces singulières différences s'expliquent

(1) Les crapauds ont aussi deux condyles à la face postérieure du sacrum ou neuvième vertèbre; les *B. fuscus* et *igneus* n'en ont qu'un seul; chez le premier c'est une articulation presque immobile.

très aisément quand on considère ces condyles comme formés par l'ossification et l'adhésion à l'un ou à l'autre corps vertébral, des cartilages intervertébraux (Cuvier), cartilages placés entre deux fossettes chez les jeunes individus. On en acquiert aisément la certitude chez le sonneur brun, dont les condyles, quoique bien ossifiés sous forme sphéroïdale restent long-temps, quelques-uns même toujours, distincts de l'une et de l'autre des vertèbres qui les emboîtent et les cachent entre elles, comme le démontre la figure que nous en donnons ici (fig. 33; *c*).

2° Les apophyses épineuses manquent à beaucoup d'espèces, ou bien un simple tubercule les remplace; l'atlas même des grenouilles n'est complété en-dessus que par une petite portion de cartilage. Mais ces apophyses, déjà saillantes chez le crapaud commun, le sont autant que dans la région dorsale de l'homme, chez le sonneur brun (fig. 32).

3° Les apophyses transverses varient en direction, les dernières surtout offrent, sous ce rapport, quelque chose de générique; elles sont fortement inclinées en avant dans les 4 dernières vertèbres des *bombinator* comme des pipas.

Une particularité très remarquable, c'est la présence d'appendices *costiformes*, articulés avec les apophyses transverses des trois vertèbres qui suivent la première chez l'*obstetricans vulgaris* (fig. 34; *b*). A la 4ᵉ vertèbre ces côtes, semblables à celles des Batraciens urodèles, sont soudées; mais on voit les traces bien nettes de la soudure. J'en vois des traces moins distinctes aux trois mêmes vertèbres du *B. igneus*, auxquelles Mertens attribue des appendices costiformes articulés même par une double tête avec l'apophyse transverse. Cette circonstance doit faire penser que les appendices cartilagineux suspendus au bout de ces apophyses chez les autres Batraciens anoures et notamment le pipa, sont des côtes rudimentaires.

La 9e vertèbre (n° 25) a reçu de Scheneider le nom de *sacrum*, qui lui convient très bien en raison de ses connexions avec les os coxaux. Les apophyses transverses, à l'aide desquelles cette connexion s'opère, étroites et épaisses chez les grenouilles, aplaties, élargies chez les rainettes et les crapauds, prennent chez tous nos *bombinator* et *obstetricans* des dimensions plus considérables encore et qui rappellent celles des pipas. Chez eux, ces apophyses représentent deux grandes ailes arrondies en avant et pointues en arrière, elles ont surtout cette forme et ces dimensions énormes chez le *B. fuscus* et *l'obst. punctatus*, malgré tant de ressemblance extérieure qu'a ce dernier avec les grenouilles. C'est ce grand développement de la pièce en question qui paraît décider l'inclinaison en avant des apophyses transverses des quatre vertèbres qui précèdent celle-ci.

La 10e et dernière pièce (n° 26), qu'on a nommée tantôt *coccyx* et tantôt *sacrum*, est un os allongé, unique, mais dans lequel on retrouve encore des restes de la forme vertébrale chez le *B. igneus* (Mertens) et l'*obstetricans vulgaris*. Chez l'un et l'autre une apophyse transverse styloïde se voit de chaque côté de sa base, et derrière elle est un trou par lequel passe le dernier nerf vertébral; l'avant-dernier passe entre la 9e et la 10e pièce du rachis, au devant de l'apophyse transverse dont nous venons de parler. Je trouve même ces apophyses à l'état rudimentaire chez la *R. esculenta* très âgée, et les trous y sont bien distincts; ces derniers se voient seuls, et sont fort petits chez le crapaud commun, le calamite et la *R. temporaria*. Cette circonstance militerait contre la dénomination de coccyx donnée à cette 10e pièce, si l'on n'établissait la comparaison qu'avec l'homme; mais les vertèbres caudales des animaux à longue queue n'ont-elles pas des

trous de conjugaison? en quoi diffèrent-elles des sacrées dans beaucoup d'animaux? si non par la petitesse de leurs appendices coxaux; car on peut comparer, je pense, aux os du bassin, les os en V qui caractérisent les vertèbres caudales, comme on peut comparer les os coxaux aux côtes proprement dites (1).

§ XXI.

Du Sternum.

Bien que la plupart des zoologistes allemands attribuent au sternum des parties que nous croyons devoir, avec Cuvier, rapporter à l'épaule, (fig. 22, 25, 27, 31), nous compterons peut-être plus de pièces sternales que ces auteurs mêmes. Si nous prenons la grenouille pour type, nous trouverons en effet le sternum séparé en deux parties, (fig. 22, n^os^ 27, 28), l'une antérieure, l'autre postérieure, composées chacune de deux pièces susceptibles d'une ossification distincte, le manche et le disque. Le manche de chacune de ces parties est toujours bien nettement osseux, le disque n'est qu'un cartilage encroûté de phosphate calcaire, et de la consistance du carton; mais on voit, par cela même, que son ossification n'est pas une extension de celle du manche. C'est chez la *R. esculenta* que cette remarque est surtout véritable, et en comparant ce qui existe chez elle à ce qu'offre le crapaud commun avancé en âge, on peut observer la différence qu'il y a entre l'ossification d'une pièce unique comme chez ce dernier et des deux qui viennent de nous oc-

(1) Si l'on objectait ici que les salamandres ont l'os coxal plus une côte à leur première vertèbre sacrée, il suffirait de rappeler que les côtes sont souvent de deux pièces, vertébrale et sternale par exemple.

cuper. Des quatre pièces sternales des grenouilles, les deux disques extrêmes sont clairement l'épisternum et le xiphoïde; les deux manches représentent les deux pièces osseuses du sternum de l'homme. J'ai déjà dit que le crapaud commun n'avait, à la partie postérieure du sternum, qu'une pièce tenant lieu à la fois d'entosternal et de xiphisternal (Geoffroy); la partie antérieure manque. Il en est de même du calamite; mais celui-ci m'offre, sur un individu, une particularité assez remarquable, c'est que le manche seul ossifié, l'est en partie seulement, et par deux points latéraux bien distincts; la ligne médiane est restée entièrement cartilagineuse.

Chez la rainette, je retrouve au sternum une partie antérieure et une partie postérieure; mais toutes deux d'une seule pièce, dans laquelle l'ossification se répand, s'irradie, pour ainsi dire, du manche à l'extrémité du disque.

L'*obstetricans punctatus* ne diffère des grenouilles que par l'état cartilagineux et presque membraneux des disques, et la petitesse de la partie antérieure du sternum, qui est plus étroite encore que chez la rainette. Le *B. fuscus* a (fig. 25), comme les grenouilles, deux pièces à la partie postérieure, un manche osseux fort large, un disque cartilagineux assez étroit; mais la partie antérieure n'est plus représentée que par une languette cartilagineuse, courte, obtuse et sans disque.

Quant à l'*obstetricans vulgaris* et au *B. igneus* il n'y a chez eux pas plus de partie antérieure que chez les crapauds; la postérieure, formée d'une seule pièce toute cartilagineuse, a une forme très singulière; déjà le disque postérieur est fort échancré chez les grenouilles; il est comme fourchu, mais à branches courtes, plates, chez

la rainette ; ici, d'un disque assez large partent deux longues branches étroites et cylindroïdes, qui se dirigent en arrière et en dehors dans les muscles de l'abdomen. Cette disposition était déjà connue chez le *B. igneus*.

§ XXII.

De l'Épaule.

Nous aurons ici à examiner six pièces distinctes (fig. 22, 31), dont une a été souvent attribuée au sternum, dont une autre n'a été décrite que par Mertens. Indiquons-les d'abord sous les dénominations que nous avons cru devoir leur donner, nous les justifierons ensuite.

1° *Ad-scapulum* (*omolite* de Geoffroy) (fig. 22, n° 29) partie supérieure de l'omoplate ; toujours moins ossifiée et plus mince que la suivante, elle n'est pourtant jamais entièrement cartilagineuse chez l'adulte ; néanmoins il est visible que l'ossification se *propage* au reste, du bord antérieur et de l'inférieur ; c'est donc une seule et même pièce quand elle n'est qu'en partie ossifiée (crapauds, sonneurs, rainettes) comme quand elle l'est tout-à-fait (grenouilles) ; ce qui réfute l'argument par lequel Cuvier a combattu l'opinion de M. Geoffroy, qui voit dans cette pièce le représentant du cartilage surajouté à l'omoplate chez les jeunes mammifères. Mais cette pièce a aussi son cartilage, dit Cuvier ; oui, mais non distinct et séparé ; non rattaché à la partie osseuse comme une véritable épiphyse.

2° *Scapulum*. (n° 30). Toujours plus court, plus épais que la pièce précédente, plus long que large chez la plupart des Batraciens anoures, plus large que long, et par conséquent fort court, chez le *B. igneus*, et les deux *obstetricans*,

il est comme bifurqué à son bord ou bout inférieur, là même où il fait partie de la cavité glénoïde. Des deux branches de cette bifurcation, l'interne et postérieure est clairement l'apophyse coracoïde des mammifères, de l'homme par exemple ; l'externe et antérieure est clairement l'acromion ou son commencement, l'épine de l'omoplate.

3° L'échancrure qui sépare ces deux éminences est convertie en trou par une pièce qui reste long-temps cartilagineuse, mais qui s'ossifie enfin à part, et semble intercalée entre l'omoplate et les autres pièces de l'épaule (n° 31). Cette pièce, que je nomme *paraglénale*, et qui a été connue de Mertens, représente le ligament acromio-coracoïdien de l'homme; comme lui, elle sert à compléter la cavité articulaire qui reçoit la tête de l'humérus. Elle est grande chez le crapaud commun, la grenouille verte ; je n'en vois rien sur le squelette sec du *B. fuscus*.

4° On a universellement reconnu comme semblable à la *clavicule coracoïdienne* des oiseaux un os (n° 32) élargi à ses extrémités, qui, articulé par l'intermédiaire du précédent avec l'apophyse coracoïde de l'omoplate, s'approche, en dedans, de son congénère et semble soutenir la partie postérieure du sternum. La première de ces connexions suffirait, s'il était besoin de preuves nouvelles, pour justifier la dénomination d'os *coracoïdien* donnée à cet os par Cuvier, M. Geoffroy, etc.

5° Parallèlement à l'os précédent on voit, en devant de l'épaule, un autre os (n° 32) qui, articulé avec l'apophyse acromion du scapulum, se rapproche, par l'autre extrémité, de la partie antérieure du sternum sans s'y articuler, comme on l'a cru. Cet os, droit chez les grenouilles et les crapauds, très arqué chez la rainette, les

sonneurs et les accoucheurs, est partout désigné sous le nom de clavicule furculaire, de fourchette, et comparé à la fourchette des oiseaux. Il est même indiqué comme tel dans les figures de M. Geoffroy (*Phil. anat.* pl. 2, fig. 22), bien que, chez les autres reptiles, ce savant zoologiste ait exactement déterminé et désigné, par un autre nom, son véritable analogue. Selon nous, c'est un *acromial;* c'est l'acromial des lézards (*l. c.* fig. 23) et de l'ornithorhynque (*ib.* fig. 19), os qui, chez certains mammifères, a déja une grande longueur, bien que confondu encore avec l'acromion (paresseux).

6° La véritable *fourchette* ou *clavicule furculaire* (n° 31) est cette pièce regardée comme sternale par les uns, comme appartenant à l'épaule, mais sans détermination précise, par les autres (Cuvier, Meckel). Ce qui a pu la faire regarder comme dépendance du sternum, c'est qu'on n'en a pas connu toute l'étendue, parce que long-temps cartilagineuse, et même toujours peu consistante, cette pièce se déforme par la dessiccation; que d'ailleurs sa branche horizontale est en partie masquée par la pièce précédente : on prendra aisément, dans nos figures, une idée exacte de cette clavicule en forme d'équerre, dont la branche transversale va jusqu'à l'os *paraglénal* et lui est même continue quand l'état cartilagineux est encore complet, tandis que l'antéro-postérieure sert d'intermédiaire entre l'acromial et le coracoïdien, souvent fort éloignés (crapaud) (fig. 26), et empêche même les os de ce nom, d'un côté de toucher leurs congénères sur la ligne médiane. Ce qui n'est pas moins remarquable, c'est qu'à elle seule appartiennent les connexions de l'épaule avec le sternum, comme on peut le voir dans les figures 22, 23, 25.

La fourchette reste cartilagineuse chez les rainettes,

les sonneurs ; elle ne s'ossifie que fort tard et imparfaitement chez les crapauds ; mais, dans toutes ces espèces, surtout les *bombinator* (fig. 25), sa branche antéro-postérieure est fort élargie; aussi celle d'un côté croise-t-elle constamment celle de l'autre, la droite étant généralement plus superficiellement placée que la gauche. Chez les grenouilles (fig. 22, 23, 31), la fourchette, plus osseuse et ayant au moins la même consistance que le carton ou de la partie blanche des plumes des oiseaux, n'offre point cet élargissement de la branche antéro-postérieure, ni le croisement susdit. De bonne heure même les deux cartilages se soudent sur la ligne médiane; il en résulte un os impair en forme de T, dont on n'a connu que la partie longitudinale (Cuvier, *Oss. foss.* T. V, 2e p., pl. XXIV, fig. 31, 9), et qu'on a cru manquer aux crapauds. C'est ainsi qu'elle est devenue pour M. Geoffroy un entosternal (*Phil. anat.*, pl. 2, fig. 22, *o*), tandis que d'autres ont pensé que les grenouilles manquaient des cartilages reconnus chez les crapauds en raison de leur grand développement (Meckel).

Prévenons les objections qu'on pourrait tirer, contre les déterminations que je viens d'admettre, de la disposition de l'épaule chez plusieurs reptiles et chez les monotrèmes. Chez ceux-ci, comme chez les sauriens, il existe deux pièces visiblement comparables à nos clavicules furculaires, et qui sont désignées comme un double épisternal par M. Geoffroy (*l. c.* pl. 2, fig. 19, 20, 23; *l. l.*), comme pièces non déterminées de l'épaule par Cuvier (*Oss. foss.*, T. V., 1re part., pl. XIII et XIV, *m*, *m*; et 2e part., pl. XVII, *d*, *d.*) : Si les rapports de ces pièces avec les autres os de l'épaule et le sternum ne suffisaient pas pour les faire reconnaître comme clavicules furculaires, la voie d'exclusion nous y conduirait nécessairement. En effet, 1° dans les idées de M. Geoffroy, la vraie fourchette se-

rait cet os en forme de T ou de croix, que Cuvier a marqué *n. f. f.* pour l'ornithorynque, *a* pour les sauriens (fig. citées); mais Cuvier a fort bien reconnu que ce n'était là qu'une pièce du sternum : chez les monotrèmes, il la compare à la 1re pièce sternale du kabasson, auquel on peut ajouter bien d'autres mammifères, qui ont cette 1re pièce (*manubrium*) fort élargie : chez les sauriens, il la rapporte tout naturellement à l'épisternum des crocodiles (pl. v, fig. 5), pièce reconnue pour épisternale même par M. Geoffroy (*Phil. anat.* T. I, p. 123), et qui représente parfaitement le T du tupinambis, la croix des lézards et la partie antérieure du sternum des Batraciens anoures. En effet, sous ce dernier rapport, l'analogie est accrue par la position avancée et la forme en palette de la pièce crocodilienne dont il s'agit ici, seulement elle est en relation avec les autres parties du sternum; ce qui n'a pas lieu chez les Batraciens. Supposez, chez l'ornithorynque et les lézards, les pièces furculaires rapprochées comme chez les grenouilles, et l'épisternal repoussé en avant, séparé ainsi du reste du sternum, et vous aurez une analogie évidemment complète; vous pourrez même trouver, dans le manche du sternum postérieur du crapaud calamite le représentant des deux pièces de l'entosternal (*o*) de M. Geoffroy; et quant au reste de l'épaule, la comparaison sera plus facile encore en s'en tenant aux déterminations de ce dernier, à part son prétendu furculaire et son épisternal, qui doivent selon nous faire échange mutuel de dénomination.

2° Selon Cuvier, c'est notre acromial chez les Batraciens anoures, celui de M. Geoffroy chez les monotrèmes et les sauriens, qui est la vraie fourchette; mais alors on ne sait plus à quoi rapporter nos furculaires, il faut les laisser sans détermination. Remarquons aussi que l'acromial est

souvent attaché à l'ad-scapulum, comme dans les lézards, les iguanes, les scinques et l'orvet, circonstance qui peut bien convenir à l'acromion, dont la base, chez les mammifères, règne sur toute la face externe de l'omoplate, et non à la clavicule toujours appendue à son extrémité libre.

Je mets ici en regard de l'épaule des Batraciens anoures celle de l'orvet (fig. 27), où l'on trouve absence d'épisternal comme chez les crapauds, un acromial osseux attaché à l'ad-scapulum, une clavicule cartilagineuse élargie comme chez les *bombinator*, les *obstetricans*, et partant bien évidemment du scapulum; celui-ci osseux, aussi bien qu'un coracoïdien dont la forme est exactement celles de nos reptiles anoures, et enfin un large xyphoïdien comme chez les pipas. Cette épaule ressemble évidemment autant à celle des Batraciens qu'à celle des sauriens.

Nous avons aussi mis en parallèle ici cette portion du squelette des Batraciens anoures avec le bassin de quelques autres animaux. Aucun autre vertébré en effet ne nous paraît plus propre à faire ressortir la ressemblance de l'épaule et de la hanche, déja signalée par bien des physiologistes. Peut-être la préciserons-nous, la particulariserons-nous davantage, et l'on nous pardonnera, en conséquence, cette courte digression. Je ne veux point d'ailleurs entrer dans de longs détails : les figures en disent plus ici que les mots. La ressemblance est frappante pour le bassin du caméléon (fig. 28) dont l'ilium est composé de deux pièces, et de même que le scapulum des Batraciens, suspendu, non articulé, à la colonne vertébrale: l'analogie se soutient aussi entre l'épaule de ces reptiles et l'os coxal d'un jeune mammifère (fig. 29, 29 *bis*); on y voit la crête iliaque représenter l'ad-scapulum, un osselet particulier, que je nommerai *paracotyléal* (n° 51),

répondre au paraglénal, le pubis tenir la place de la clavicule furculaire, l'ischion celle du coracoïdien, et le trou sous-pubien rappeler le trou sous-claviculaire de la grenouille ou mieux du crapaud. Quant à l'acromial il n'a pas ici d'équivalent, il n'a qu'un représentant rudimentaire chez le caméléon, c'est ce petit marsupial cartilagineux (fig. 28; *b*) que porte le pubis; mais chez les monotrèmes l'analogie devient plus frappante quand on voit leur os marsupial occuper, par sa base, tout le bord supérieur du pubis, de la même manière que l'acromial des Batraciens anoures couvre presque tout le bord antérieur de la clavicule.

Ces réflexions pourraient s'appliquer à l'épaule des lézards, si leurs clavicules n'étaient point séparées par le sternum : nos Batraciens au contraire les ont réunies comme les pubis des mammifères; et l'on pourrait ajouter encore à ces analogies la profondeur de la cavité glénoïde, la forme de l'humérus fort semblable au fémur, et son union à l'épaule au moyen d'un ligament rond semblable à celui qui se porte ordinairement de ce dernier os à la cavité cotyloïde.

§ XXIII.

Du Bras.

Une première remarque à faire sur l'humérus (fig. 30, 31; n° 35), c'est que, de même que tous les autres os longs des Batraciens, il est moins tordu sur son axe que chez les mammifères. Du reste il diffère peu dans nos différentes espèces, seulement il est plus courbé en S dans les crapauds que dans les grenouilles, sa crête bicipitale varie peu aussi, mais la grenouille rousse offre seule une longue et saillante crête dirigée un peu en arrière dans la

moitié inférieure du bord interne. La tête supérieure est toujours plus tardivement ossifiée que l'inférieure. Elle reste même, à ce qu'il paraît, toujours cartilagineuse chez les *bombinator;* circonstance remarquable, surtout chez le *B. fuscus*, dont le squelette offre une rapide et complète ossification dans tant de portions qui restent cartilagineuses chez les autres Batraciens anoures. Cette tête osseuse n'est pas parfaitement sphérique; elle est même anguleuse en bas et en dehors, circonstance qui doit nuire beaucoup à la facilité des mouvemens de rotation générale qui sont suppléés par d'autres, ainsi que nous le démontrerons bientôt.

§ XXIV.

De l'Avant-bras.

Toujours soudés ensemble comme chez les ruminans, etc., le radius et le cubitus (fig. 30, 36, n° 36) offrent ceci de particulier que c'est leur partie supérieure qui est le plus étroitement confondue (1) et que les deux os sont unis parallèlement, le radius placé au devant du cubitus, mais sans aucune décussation.

De là résulte que, dans la flexion de l'avant-bras, le radius est en haut, le cubitus en bas, et comme il n'y a pas ici possibilité d'une rotation telle que chez les animaux qui ont ces deux os mobiles l'un sur l'autre, la main ne devrait toucher le sol que par son bord cubital inférieur ou digitulien. Mais, 1° l'humérus en s'écartant du corps et se rapprochant d'une direction horizontale tend

(1) Il est assez remarquable qu'avec une pareille soudure coïncide l'isolement de l'olécrâne : on peut du moins raisonnablement donner pour telle ce sésamoïde osseux chez le pipa (Rudolphi), cartilagineux chez nos anoures, que contient dans son épaisseur le tendon du triceps brachial.

à incliner en bas la face palmaire de la main. 2° L'articulation du carpe sur les os de l'avant-bras permet à la main de s'incliner davantage encore par un seul et même mouvement en dedans et en bas, en vertu de l'obliquité des surfaces articulaires, obliquité telle, qu'il ne peut y avoir de flexion du carpe sans qu'il y ait aussi nécessairement adduction et pronation, et que le plan du carpe, parallèle à celui de l'avant-bras dans l'extension, le croise presque à angle droit dans la flexion; voilà pourquoi, lorsque nos reptiles sont appuyés sur les membres antérieurs, on voit généralement l'extrémité des doigts tourner en dedans comme si les mains cherchaient à s'entrelacer. 3° Les deux derniers os du métacarpe et même un peu aussi le troisième peuvent aisément éprouver sur le carpe un mouvement de glissement d'avant en arrière, d'où résulte une rotation de toute la main ayant pour pivot le premier os; rotation qui achève d'appuyer à terre les cinq doigts d'une manière égale. Les os du carpe jouissent d'ailleurs entre eux d'une mobilité qui supplée, dans certains cas, au défaut de quelqu'une des trois conditions précédentes, quand, par exemple, l'avant-bras est vertical et non parallèle à l'horizon, comme nous l'avons supposé jusqu'à présent.

§ XXV.

De la Main.

A. Le carpe (fig. 30, 36, 52) n'est pas toujours composé du même nombre d'os, et ce n'est que chez le *B. fuscus* qu'on peut y trouver isolés tous les représentans des os du carpe de l'homme et quelques autres appartenant à un doigt souvent méconnu, quoique toujours pourvu d'une phalange. Ce doigt est le pouce, qu'on a souvent ap-

pelé ergot, parce qu'il fait à peine saillie au dehors, ou qu'il est même tout-à-fait caché sous la peau, bien que assez long quelquefois, par exemple chez les grenouilles. Au sonneur (1) on trouve d'abord près de l'avant-bras deux os dont l'un articulé avec le cubitus, est le *pyramidal* (n° 37), l'autre est le *semi-lunaire* (n° 38) articulé avec le radius. Un troisième os assez grand, placé en dehors et devant le précédent, est le *scaphoïde* (n° 39). Celui-ci, quoiqu'un peu plus avancé, forme évidemment avec les deux précédens la première rangée; quant au *pisiforme* il est représenté par un gros sésamoïde situé au centre de la face palmaire du carpe. C'est bien à tort que Mertens nomme tout différemment les trois os que nous venons d'indiquer. Notre scaphoïde, par exemple, est son pyramidal; cette détermination est évidemment fausse, vu la position de cet os du côté du pouce et ses connexions avec les os voisins. A la vérité, il n'a pas ici d'articulation directe avec le radius, comme chez l'homme, mais il y a du moins union par des ligamens entre ces deux os; ils peuvent même se toucher dans l'adduction de la main; et cela est plus facile encore chez la *R. temporaria* et les crapauds.

La deuxième rangée se compose d'un os *crochu* (n° 40) fort grand, d'un *capitatum* médiocre, d'un *trapézoïde* (n^os^ 41, 42) plus petit encore, et d'un *trapèze* (n° 43) du même volume que son voisin. Plus en dedans est un

(1) Meckel ne lui accorde que cinq os comme aux autres anoures, chez lesquels il a méconnu aussi le métacarpien du pouce. La phalange qui représente ce doigt n'existe, selon lui, que chez les mâles (T. II, p. 638, 639, 646). Toutes ces inexactitudes prouvent qu'il s'est servi de squelettes mutilés. Les mâles ne m'ont paru différer des femelles que par le volume, les crêtes et les tubérosités du deuxième métacarpien, celui qu'on prend ordinairement pour le premier.

osselet un peu plus volumineux, articulé avec le trapèze, mais un peu enfoncé entre un des métacarpiens et le scaphoïde; c'est le métacarpien du *pouce* (n° 44), sur lequel est portée librement la phalange (n° 47) qui représente ce doigt.

Le *B. igneus* offre encore la division du capitatum, du crochu et du trapézoïde, mais chez tous nos autres anoures il y a soudure de ces trois os (fig. 52), ce qu'on peut reconnaître à la grandeur de l'os qui les remplace, et à ses connexions avec les trois derniers métacarpiens. Du reste, ces os sont plus ou moins solides suivant les espèces; ils restent long-temps cartilagineux chez la grenouille verte, le crapaud commun; ils s'ossifient vite chez les *bombinator* et les *obstetricans*, la *rana temporaria*, le crapaud calamite. Le pisiforme de ce dernier est gros et osseux; en outre il porte un petit sésamoïde derrière l'os semi-lunaire; ce sésamoïde se retrouve dans la *R. temporaria*.

B. Le *métacarpe* (n° 44), outre l'osselet qui soutient le pouce rudimentaire, est formé de quatre os qui n'offrent de remarquable qu'une grande mobilité et le grand écartement dont sont susceptibles leurs extrémités digitales. Ceci s'applique surtout au deuxième, qui passe communément pour le premier.

C. Les doigts (n^{os} 45, 46, 47) sont aussi au nombre de quatre, outre le pouce. Celui-ci n'a jamais qu'une phalange, encore est-elle souvent remplacée par un tubercule à peine cartilagineux. Le second doigt a deux phalanges ainsi que le troisième; le quatrième et le cinquième en ont trois chez tous nos anoures, et la différence de longueur qu'on observe dans les différentes espèces tient à la longueur des phalanges mêmes et non à leur nombre.

§ XXVI.

Du Bassin.

Malgré sa forme singulière, le bassin (fig. 30) offre ici, par une analyse très facile, la même composition que celui des mammifères. Il ressemble surtout beaucoup à celui des salamandres, si l'on veut supposer que l'ischion (n^os^ 49, 50) et le pubis d'un côté, au lieu d'être articulés par un de leurs bords avec ceux du côté opposé, le sont par toute l'étendue de leur face interne, de manière à réduire la cavité pelvienne à l'intervalle qui sépare les iliums. Ceux-ci (n° 48), fort allongés en avant, élargis en arrière, se touchent à peine chez le crapaud; ils paraissent se toucher assez largement chez la grenouille verte, quoique en réalité séparés par une couche de cartilage qui s'amincit avec l'âge et finit par disparaître; il en est de même des ischions osseux qui forment la partie postérieure et supérieure du bassin, et du pubis long-temps cartilagineux, toujours même peu consistant, qui se voient en bas et en avant. Réunis pour former la cavité cotyloïde, ces trois os ne se joignent point à son centre; sur le squelette sec, on y voit, comme chez les jeunes mammifères, un intervalle triangulaire. Dans l'état frais un cartilage ferme cet intervalle et fait cloison entre les deux cavités cotyloïdes; c'est le même qui, dans les jeunes sujets, sépare les iliums et surtout les ischions et semble faire corps avec les pubis. Mais, à mesure que l'ossification fait des progrès, il s'amincit entre ces os, et il n'en reste plus qu'une languette, laquelle s'ossifie elle-même et reste distincte sur le bord libre des ischions. Ce n'est aussi que par les progrès de l'ossification des pubis,

qu'ils se distinguent de cette cloison. Cette ossification commence sur le bord de la cavité cotyloïde. Elle s'étend plus rapidement chez la grenouille brune, le C. calamite, la rainette, que chez la G. verte, le C. commun. Il semble qu'elle ne s'opère jamais chez les sonneurs et les accoucheurs. D'après ce que nous venons de dire il est facile de reconnaître le cartilage supplémentaire pour un véritable os *paracotyléal* (n° 51) (*voyez* ci-dessus, § XXII) qui achève de compléter les pièces pelviennes chez nos Batraciens anoures. Je remarquerai même à ce sujet que l'épiphyse de l'extrémité antérieure des iliums représente la crête de ces os chez les autres animaux; peut-être aussi la languette dont nous avons parlé au sujet de l'ischion représente-t-elle la tubérosité sciatique, aussi épiphysée chez les mammifères.

§ XXVII.

De la Cuisse et de la Jambe.

Je n'ai, relativement au fémur (fig. 30, n° 52), que peu de remarques à faire : 1° j'observe qu'il manque de col, et ressemble ainsi à l'humérus; une crête saillante chez les crapauds, l'accoucheur vulgaire, etc., mais nulle chez les grenouilles, ajoute à la ressemblance; 2° cette absence de col doit rendre la rotation du membre inférieur moins facile, mais aussi elle permet à la flexion de se faire presque en tout sens, et notamment de s'opérer de dehors en dedans comme faisant suite à une forte abduction qui a d'abord porté la cuisse de dedans en dehors. En raison de cette absence du col, la rotation, moins facile peut-être, disions-nous, est aussi moins bornée; elle a lieu même dans la plus forte flexion,

et c'est de cette manière que, dans le repos, la plante du pied peut poser sur le sol.

A peine un noyau cartilagineux, logé dans l'aponévrose du genou, indique-t-il l'analogue de la rotule. Quant au tibia et au péroné (n° 53), ils sont soudés comme les os de l'avant-bras; s'il fallait ajouter des argumens à l'analogie généralement reconnue qui les détermine ainsi, malgré quelques écrivains allemands qui en ont fait une cuisse secondaire, nous parlerions des muscles qui les environnent, du canal médullaire double partout, excepté dans le tiers moyen, et enfin des deux trous nourriciers, un antérieur ou externe, un postérieur ou interne, que l'on y aperçoit; chez les mammifères, on trouve de même le trou nourricier du péroné en avant, celui du tibia en arrière.

§ XXVIII.

Du Pied.

A. Le tarse (fig. 30, 38, 39, 56) peut être considéré comme formé de huit os, si l'on compte pour un le sésamoïde des extenseurs du pied, qui, placé derrière les os longs du tarse, a pu être, avec quelque raison, comparé à la tubérosité du calcanéum séparée de son corps (Meckel). Cet osselet est cartilagineux chez la plupart des anoures. En omettant celui-là, restent sept os plus ou moins durs que nous pourrons rapporter peut-être à leurs analogues chez les mammifères.

Les deux plus remarquables (n° 54 et 55) sont allongés, parallèles et si semblables, par leur forme et leur disposition, au tibia et au péroné des lézards, des salamandres, etc., que quelques anatomistes n'ont voulu y voir qu'une vraie jambe ou qu'une jambe secondaire (*Rudolphi*). Ces deux os, bien distincts dans leurs corps,

sont chez les grenouilles, comme scellés, à chacune de leurs extrémités, dans une épiphyse commune et qui s'ossifie d'assez bonne heure, quoique d'une manière incomplète (fig. 30 et 56). Ils restent toujours distincts chez le *B. fuscus* (fig. 38) dont les épiphyses sont fort minces et réduites à un cartilage d'encroûtement. Chez l'*obstetricans punctatus*, au contraire, j'ai découvert une disposition assez remarquable; ces deux os (fig. 39) répètent exactement l'organisation de ceux de la jambe par leur fusion au milieu, le double sillon qui indique, vers leurs extrémités, la composition multiple de cet os unique, étroit et allongé, qui ne diffère, en un mot, du tibia-péroné que par moins de longueur.

Cette particularité militerait peut-être en faveur de l'opinion de Rudolphi, si d'autres argumens ne la réfutaient victorieusement. Et d'abord, on peut voir, chez plusieurs reptiles, les crocodiles, les lézards, les tortues, que les deux os les plus postérieurs et les plus grands du tarse sont aussi parallèles; mais ce qui mérite encore une grande considération, selon nous, c'est que pareille chose se remarque au carpe de plusieurs des reptiles cités : l'analogie de forme et de rapports est même frappante dans le carpe du crocodile (Cuv. *Oss. foss.*, T. V, 2e part., pl. IV, fig. 13, *c*, *d*.). La disposition des muscles de la jambe fournirait encore des preuves à l'appui de cette opinion, puisque la plupart s'attachent au tibia-péroné d'une part, à ces os tarsiens de l'autre; quelques-uns seulement laisseraient de l'incertitude, mais nous n'attachons pas d'ailleurs une grande importance à ces relations avec des organes qui nous ont toujours paru subordonnés aux besoins du squelette, chose dont nous aurons encore la preuve à l'occasion de ceux du tétard.

En définitive, nous nous rangeons, avec le plus grand

nombre des anatomistes, au sentiment de Cuvier; l'os situé en dedans, c'est-à-dire vers le bord tibial ou pollicien, est pour nous l'*astragal*, l'autre le *calcanéum* (n°s 54, 55).

Entre eux et le métatarse d'une part, et en dedans même de l'articulation tarso-métatarsienne, c'est-à-dire au bord pollicien du pied, d'autre part, se trouvent cinq autres osselets ou cartilages que nous déterminerons comme il suit. Celui qui est logé entre l'épiphyse commune à l'astragale et au calcanéum et les trois métatarsiens du milieu, est un cartilage rarement osseux, plat, et qui représente le *cuboïde*, mais atrophié, aplati, et, comme tous les suivans, refoulé du côté pollicien du pied. 2° En dedans de celui-ci en est un, aussi cartilagineux, de même épaisseur, mais de dimensions bien plus faibles, et même, confondu avec le précédent chez les grenouilles (n° 56), mais bien distinct chez le crapaud commun, ainsi que chez le calamite malgré sa petitesse; nous y voyons le représentant du troisième *cunéiforme*; il soutient le deuxième métatarsien. 3° Entre le premier métatarsien et l'astragale en est un plus volumineux, plus solide, bien ossifié chez le *B. fuscus* : c'est le *scaphoïde* (n° 57). 4° Enfin, deux autres supportés par ce dernier, et composant l'ergot, qu'on a généralement considéré comme un rudiment du sixième doigt, me paraissent être le deuxième et le premier cunéiformes (n° 58, 59). Dans cette hypothèse il semblerait que les muscles nombreux et robustes qui garnissent les deux faces du pied aient rapproché violemment le métatarse des grands os tarsiens, refoulant les petits os vers le côté interne, et forçant le scaphoïde de s'interposer entre les cunéiformes.

Outre ces osselets ou cartilages, il existe, sous l'articulation du calcanéum avec le quatrième métatarsien un sé-

samoïde (n° 60) qui donne attache à divers muscles. Il est osseux chez le pipa; chez les crapauds il est enveloppé, de même que l'ergot formé par les cunéiformes, d'un tégument corné, sans être, pour cela, plus que lui un doigt rudimentaire (1).

Voilà la détermination qui nous a paru la plus rationnelle; elle met en rapport exact le tarse des Batraciens anoures et celui des mammifères, comme nous l'avions fait déjà pour le carpe. Mertens nomme tout différemment, et sur des données aussi peu motivées que pour le carpe, les os que nous venons de passer en revue, et il est même difficile de faire l'application de sa nomenclature exposée en latin peu correct.

Quant aux cinq métatarsiens (n° 61) et aux orteils (n°s 62 — 65), je n'ai rien de particulier à en dire; comme pour les doigts de la main, leur longueur tient à celle des phalanges plus qu'à leur nombre, quoiqu'il soit ici généralement assez considérable (deux pour les deux premiers, trois pour le troisième et le cinquième, quatre pour le quatrième). Les dernières sont un peu crochues et terminées par une petite tête comme à la main.

---

(1) Ces deux ergots, chez le crapaud commun et le calamite, aussi bien que le grand ergot cultriforme qui se trouve seul au pied du *B. fuscus*, servent à creuser la terre par un mécanisme facile à observer, mais que je n'ai vu mentionné nulle part. C'est à reculons que ces animaux s'enfoncent dans leurs galeries souterraines; leurs membres postérieurs sont alors ployés et ramassés près du corps; la plante des pieds, armée de ses ergots, écarte la terre et la pousse latéralement en agissant de dedans en dehors; c'est ainsi qu'elle l'ouvre peu à peu et la tasse de côté et d'autre; les deux pieds agissent tantôt simultanément, tantôt alternativement. Les callosités de la paume de la main peuvent remplir aussi un peu ce dernier office de fouler la terre et d'affermir ainsi les parois du boyau.

CHAPITRE III.

DU SQUELETTE CHEZ LE TÉTARD ET DANS LES AGES SUIVANS.

§ I.

Généralités. — Division des âges. — Première période.

Nous n'avons pas le projet de suivre ici l'évolution complète de l'embryon des Batraciens anoures; ce serait sortir de la question proposée, et nous nous bornerons à l'histoire des changemens extérieurs ou intérieurs qui suivent l'éclosion. Pour cet objet nous diviserons la vie du Batracien une fois né en six périodes: la première, caractérisée par la présence de branchies extérieures (fig. 59 — 65), la forme allongée du corps; la deuxième, par l'absence de branchies extérieures et de membres (fig. 67, 68), la forme globuleuse du corps; la troisième, par le développement des membres postérieurs (fig. 80); la quatrième, par la sortie des antérieurs et l'atrophie graduelle de la queue; la cinquième, par l'état dit parfait ou plutôt anoure et abranche, mais avec un développement peu considérable; la sixième par un développement complet ou à peu près complet. Cette dernière a fait le sujet de notre deuxième chapitre; nous allons jeter un coup d'œil rapide sur les autres.

Première période. Nous avons examiné avec soin le tétard de la grenouille verte prêt à sortir de l'œuf et dans les jours qui suivent son éclosion, et il nous a paru que quelques particularités avaient échappé aux observateurs; c'est pourquoi nous en avons soigneusement conservé la figure dans des dessins d'après nature. Le premier jour, ou pour mieux dire immédiatement avant

l'éclosion spontanée (fig. 59, 60, 61), le têtard est formé 1° d'un gros ventre oblong et rempli de pulpe jaunâtre visible à travers la peau; 2° ce ventre est surmonté d'une échine plus étroite, assez élevée, de couleur grise, composée d'une masse musculeuse disposée par faisceaux en chevrons comme chez les poissons, et d'une tige cartilagineuse; 3° cette masse se continue en forme de queue courte, obstuse, à peine bordée d'une étroite lanière de peau; 4° enfin, en avant est une tête grise également bien distincte, irrégulièrement arrondie, ne dépassant pas en grandeur la moitié du ventre, divisée à sa face inférieure par une fissure profonde et séparée ainsi en deux grandes éminences terminées chacune par une surface sphéroïdale d'où suinte sans doute une humeur visqueuse qui fixe l'animal aux corps submergés et se réduit souvent en un fil long et étroit (1). Dans la partie antérieure de la fente qui sépare ces deux éminences est un petit trou, ou du moins une fossette à peine perceptible; c'est la bouche ou son ébauche. Au devant de chaque éminence, un peu en dehors et aussi en-dessous de la tête est une petite tache noire; c'est la narine; on l'a prise ordinairement pour l'œil (Rœsel) qu'on n'aperçoit pas encore. Enfin, à la partie latérale et postérieure de la tête se trouve un tubercule arrondi. La longueur totale est de deux lignes à deux lignes et demie.

La longueur s'accroît les jours suivans, et c'est surtout en raison de l'allongement de la queue qui se borde largement d'une lame de peau; le ventre s'allonge un

(1) Rœsel a bien observé ces éminences qu'il a prises pour une sorte de bouche ou trompe. M. Rusconi en parle sous le nom de *crochets;* nom qui leur convient fort peu (*Amours des salamandres*, p. 39). Je n'ai pu me procurer son dernier ouvrage sur le têtard de la grenouille.

peu plus, les deux éminences de la tête se raccourcissent, la bouche est manifestement en losange, les narines un peu plus avancées vers le bout du museau; au lieu du tubercule arrondi on trouve, dès le second jour, un appendice trifide (fig. 62, 63) adhérent à la peau devant une fente latérale qui de chaque côté sépare la tête du tronc. Ces trois filamens sont autant de branchies renfermant chacune une anse vasculaire dans laquelle le microscope fait voir les globules du sang marchant de la base à l'extrémité et revenant de celle-ci à la base; un courant circulaire, aperçu par Rœsel, Rusconi, M. Raspail et autres, s'établit et se soutient continuellement dans l'eau qui entoure ces branchies.

Le troisième jour, l'animal commence à se tenir de champ; jusque là il était habituellement couché sur le côté dans le repos, à moins qu'il ne fût attaché à un point fixé par les éminences dont il a été question plus haut. On voit paraître l'œil à travers la peau sous forme d'un grand cercle noir; les narines sont nettement ouvertes; et les éminences de la tête s'affaissent presque totalement; une tâche noire marque toujours leur extrémité arrondie; les fentes latérales sont manifestement continues avec une transversale et inférieure, de manière à former un opercule unique, mais bilobé; comme chez les têtards des salamandres; le ventre est très aminci en arrière.

Dès le quatrième jour, (fig. 64, 65) l'animal approche davantage de la forme de têtard, qu'il conservera long-temps par la suite; le ventre n'a pas plus de volume que la tête, et sa partie postérieure est atténuée et représente un intestin rectum libre dans la membrane large qui borde la queue; l'anus est alors évident; les éminences de la tête sont tout-à-fait aplaties; les narines

ne sont plus en-dessous, mais pas encore en-dessus de la tête ; l'opercule est plus distinct ; les branchies sont plus grandes et un peu ramifiées de façon à former un nombre de quatre à cinq troncs ; enfin la bouche a déjà deux lèvres bien distinctes.

Le sixième jour (fig. 66), la forme est décidément celle du tétard, la taille de quatre lignes, dont deux tiers pour la queue ; la tête n'est plus séparée du corps, et une enveloppe commune et transparente donne au tout une forme ovalaire. L'opercule semble s'être collé à la peau du ventre au milieu et du côté droit ; les branchies paraissent encore du côté gauche, mais elles semblent fanées et ne tardent pas à disparaître tout-à-fait. La bouche est munie de mâchoires cornées, de muscles, etc. ; l'intestin laisse voir sa forme spirale ; il ne reste plus, des éminences placées sous la tête, que deux taches noirâtres qui, situées derrière les angles de la bouche, paraissent répondre au point de jonction de la mâchoire inférieure avec le cartilage de la tête. Les narines sont déjà passées en-dessus ; le museau est devenu bien plus court.

Passé cette époque, le tétard (fig. 67, 68) est parvenu à la seconde période qui va nous occuper maintenant : mais comme nous considérerons désormais plus en détail les particularités de l'organisation intérieure, au lieu de décrire tout le squelette pour chaque période, nous ne suivrons cette méthode que pour chacune de ses parties principales examinées successivement. La plupart de nos descriptions seront empruntées au tétard du *bombinator fuscus,* qui acquiert parfois jusqu'au volume d'un gros œuf (le corps et la tête) avant de subir sa métamorphose. Le tétard de la rainette, en raison de la transparence de ses enveloppes, nous a aussi donné moyen de faire quelques vérifications, surtout pour l'âge qui suit

immédiatement celui qui vient de nous occuper. La grenouille commune nous a aussi servi à vérifier bien des détails.

§ II.

De la Tête durant la seconde période.

A. *Des appendices cornés des lèvres et des mâchoires.* Quoique solides, ces portions ne font pourtant pas réellement partie du squelette : ce sont des appendices en quelque sorte épidermiques. Chaque mâchoire est emboîtée entre les deux lames d'une pièce de corne brune ou noirâtre (fig. 73, 80, 81, 82). Ces deux lames, unies à angle aigu, forment ainsi un bord uniformément concave pour la pièce supérieure, bilobé pour l'inférieure, denticulé pour l'une et l'autre; les denticules s'effacent avec l'âge, sans doute par une sorte d'usure. Ces deux pièces se croisent comme des lames de ciseaux de façon que l'inférieure passe derrière la supérieure; c'est ainsi qu'elles coupent les plantes aquatiques dont les têtards se nourrissent généralement, quoique ceux du crapaud accoucheur (Duméril) et même ceux de la grenouille verte et de la rainette dépouillent fort bien les animaux, même de leur espèce, morts et ramollis par la macération. On reconnaît aisément, dans cette structure, celle du bec des mollusques céphalopodes; comme chez eux, le bec est environné d'une lèvre circulaire ou de deux lèvres charnues qui peuvent les recouvrir en entier; mais une organisation toute particulière aux têtards, c'est l'armure de ces lèvres. Au premier abord on n'y découvre que des lignes noires, saillantes et dures, transversalement posées à leur face interne; mais vues à la loupe, ces lignes ne paraissent plus qu'une sorte de peigne composé d'une série de soies parallèles, aplaties, recourbées en crochet (fig. 69), et dont la

pointe seulement se montre au dehors, la majeure partie de leur longueur étant enfoncée dans la chair. C'est à l'aide de ces peignes que les têtards, dépourvus de tout autre moyen de préhension, se fixent aux corps submergés, et saisissent la nourriture qu'ils veulent diviser, avec leurs mâchoires.

B. Du *cartilage cranio-facial* (fig. 70, 71, 72). Ce cartilage, qui constitue à lui seul la majeure partie de la charpente de la tête chez le têtard à sa seconde période, est d'une forme très complexe et dont les figures donneront mieux une idée que la description la plus minutieuse. Distinguons-y seulement une partie médiane et deux latérales : la première, ou *cranienne* enfermant l'encéphale dans une cavité largement ouverte en-dessus, où une membrane molle ferme le crâne, excepté un peu en avant et tout-à-fait en arrière, où un pont transversal complète le cintre du trou occipital : en arrière aussi cette partie médiane s'étend sur les côtés, pour représenter, à droite et à gauche, le *rocher* de l'adulte; en avant, elle se bifurque; les deux branches de la bifurcation, que nous gratifierons du nom d'*ethmoïdales* (*a*) s'élargissent, s'écartent l'une de l'autre; elles supportent la mâchoire supérieure. Chacune des parties latérales, ou lame *ptérygo-tympanique* (*b*), est plate, concave en-dessus; elle fait, en grande partie, le plancher de l'orbite. En arrière elle est attachée au rocher par un pédicule étroit et court; mais une production plus longue, dirigée transversalement en dedans, s'appuie aussi sur le côté du crâne, où elle adhère également par continuité de substance : une troisième production plus large attache aussi, de la même manière, cette partie latérale à la médiane vers l'endroit où elle se bifurque, et laisse, entre elle et la précédente, un espace libre, un grand

trou, qui rend incomplet le plancher de l'orbite. En avant, la lame ptérygo-tympanique donne naissance, par son bord externe, à une apophyse montante, recourbée, large et mince, qui s'attache par un ligament à la portion médiane; c'est l'*apophyse orbitaire* (*c*): plus en avant encore, cette lame se termine par une autre plus épaisse et un peu inclinée vers le bas; celle-ci, qui supporte, à son extrémité, la mâchoire inférieure, et à sa base, la branche styloïdienne de l'hyoïde, recevra la dénomination de *tympanique* (*d*); entre elle et la branche antérieure de la partie médiane qui lui correspond est une échancrure profonde, fermée à son extrémité par un ligament, et divisée par un autre, qui convertit en trou la partie la plus reculée du sinus qu'elle représente. Ce trou est celui de l'arrière-narine. La cavité olfactive occupe également l'intervalle des deux productions cartilagineuses dont il s'agit: elle remplit la partie la plus élevée et la plus postérieure de l'échancrure qui les sépare. Le trou du nerf de la cinquième paire est percé sous le pédicule transverse de la partie latérale du cartilage cranio-facial; celui du nerf optique est percé à part dans ce pédicule même, réuni à la paroi latérale du crâne; enfin les branches de la bifurcation de la partie médiane sont percées, au côté externe de leur pédicule, d'un grand trou pour le passage du nerf olfactif, qui s'épanouit immédiatement dans la membrane pituitaire.

C. *De la mâchoire supérieure* (fig. 70—75). Elle se compose de deux paires de cartilages, dont deux, que je nommerai *rostraux supérieurs* (*e*), grands, larges, concaves en-dessous, unis ensemble sur la ligne médiane par une articulation que rend immobile le bec corné qui les enveloppe l'un et l'autre, attachés en arrière à la bifurcation du cartilage cranio-facial, terminés en dehors et en ar-

rière par une apophyse qui donne attache à divers muscles ou ligamens et soutient le deuxième cartilage. Celui-ci, que j'appelle *adrostral supérieur* (*f*) n'est, pour ainsi dire, qu'un appendice posé sur l'angle ou apophyse dont il vient d'être question; sa forme est celle d'un petit crochet courbé en bas et déjeté en arrière et en dehors; sa mobilité est assez considérable; il suit d'ailleurs dans tous ses mouvemens le cartilage rostral.

D. *De la mâchoire inférieure.* Elle est également composée de quatre pièces; deux médianes ou *rostrales inférieures* (*i*), plus épaisses que les supérieures, mais emboîtées de même par leur lame cornée, servant aussi de point d'appui aux deux pièces latérales ou *adrostrales inférieures* (*h*), contournées et crochues comme celles d'en haut, mais plus considérables, bien plus épaisses et surtout moins mobiles sur les pièces médianes; ce sont les adrostrales qui s'articulent avec l'apophyse tympanique par une large surface ginglymoïdale.

E. *Réflexions.* En considérant l'ensemble des pièces que nous venons de décrire succinctement, on s'apercevra aisément qu'il n'a, avec l'état adulte que des ressemblances très éloignées. Ces différences ressortiront davantage par l'exposé que nous allons faire des changemens ultérieurs que l'ostéose amène dans toutes ces parties; mais auparavant, essayons de tirer quelque fruit de ce que nous venons de faire connaître relativement à l'ensemble de la science; voyons à quelle classe ou à quel ordre nous pourrons rapporter cette organisation du tétard. La consistance seule de sa charpente porte à la comparer à celle des poissons cartilagineux, des squales, par exemple; et un examen plus attentif apprend que l'analogie ne se borne pas à ce premier aperçu. Toute la charpente cranio-faciale des squales est composée d'un seul cartilage plus large-

ment continu dans toutes ses parties que chez le tétard, mais constituant de même une cavité pour enfermer l'encéphale, un plancher pour soutenir l'œil et représenter la lame ptérygo-tympanique, une double voûte analogue à l'apophyse ethmoïdale et destinée à couvrir la cavité olfactive. Un appendice de ce grand cartilage, suspendu au rocher (mais ici par articulation mobile), représente l'apophyse tympanique et supporte de même les deux mâchoires et l'hyoïde. A la mâchoire supérieure des squales nous voyons un grand palatin (Cuvier) ou peut-être des intermaxillaires, représenter notre pièce rostrale, et des cartilages sus-maxillaires rudimentaires offrir quelque analogie avec l'adrostral. Quant au mode de jonction des deux mâchoires, c'est plutôt chez les poissons osseux que nous trouvons son analogue. Un ligament attaché vers la partie antérieure de la mâchoire inférieure et à l'angle postérieur de la supérieure (fig. 73 ; *d*), les unit ensemble de telle façon, que la première ne peut s'abaisser sans faire basculer et sans élever l'autre. De même aussi, la mâchoire supérieure ne peut s'abaisser sans élever l'inférieure ; de sorte que les mouvemens de l'une et de l'autre sont toujours simultanés.

§ III.

De la Tête durant la troisième période.

J'aurais voulu pouvoir donner, des changemens ultérieurs de la tête, des figures aussi exactes que celles qui ont trait à la deuxième et à la sixième ; j'aurais voulu pouvoir préciser avec certitude les époques auxquelles s'observe chacune de ces permutations ; mais les circonstances ne m'ont pas permis de suivre la métamorphose chez un aussi grand nombre d'individus qu'il l'aurait fallu faire, et

m'ont réduit même à me servir de têtards conservés dans l'alcool, et dont les cartilages, ramollis par la transformation même et par conséquent fort difficiles à débarrasser des parties adjacentes assez altérées elles-mêmes, se sont montrés à moi avec une forme trop indécise pour pouvoir être rendue avec la netteté désirable; mais du moins j'ai pu reconnaître sans équivoque la marche de la nature et l'établissement progressif des différences qui distinguent la larve de l'animal parfait.

Durant la troisième période, le cartilage cranio-facial n'éprouve pas de grands changemens dans sa forme; cependant, vers la fin, les avances ethmoïdales se raccourcissent un peu, l'apophyse tympanique se retire en arrière et s'abaisse aussi; l'orbitaire rétrograde dans la même proportion, au point de venir répondre au-dessous du centre de l'œil; mais à pareille époque cette apophyse a beaucoup perdu de sa hauteur; la mâchoire inférieure s'est aussi alors un peu allongée dans sa portion adrostrale.

Mais ce que cette période offre de plus remarquable, c'est la formation des os occipitaux, temporaux, sphénoïdes, pariétaux et frontaux principaux (fig. 70, 71). Une importante remarque à faire ici, c'est que, de tous ces os, les occipitaux et temporaux sont les seuls qui se développent à l'instar de ceux des mammifères, par l'ossification du cartilage; aussi, dans l'adulte, font-ils corps avec le grand cartilage cranio-facial aussi bien que l'ethmoïde et les malléaux, presque tous les autres étant seulement appliqués ou appendus à ce cartilage : c'est qu'en effet ils se forment à la surface, dans le périoste ou péricondre (1),

(1) Il en est de même de beaucoup d'os de la tête des poissons osseux, comme les frontaux principaux, les pariétaux, les sphénoïdes, le vomer, etc. Cette disposition semble être un premier degré d'acheminement vers l'organisation des animaux invertébrés à squelette extérieur.

et point du tout dans le cartilage même. Rien n'est plus évident pour le sphénoïde cruciforme, qui est peut-être le premier formé de tous les os du crâne. On peut, à toute époque, l'enlever tout entier de la surface du cartilage qui constitue la boîte cranienne. Quant aux pariétaux, ils se forment isolément des frontaux, auxquels on les trouve soudés chez l'adulte. Chez le *B. fuscus*, il ne se forme qu'un pariétal impair et arrondi ; quelquefois il y a deux points d'ossification, discoïdes aussi, mais placés l'un devant l'autre. Chez la plupart des autres Batraciens anoures (*R. esculenta, obst. punctatus, hyla*) que j'ai examinés, il y a deux points d'ossification symétriques et formant d'abord une double lentille osseuse. Dans tous les cas, c'est le pont sus-occipital du cartilage cranio-facial qui sert de support à ces pièces osseuses ; les pièces frontales, toujours paires, s'appuient sur les bords du coffre cranien, dont elles tendent à recouvrir peu à peu l'ouverture supérieure.

§ IV.

De la Tête durant la quatrième période.

C'est l'époque où le bec corné se détache et disparaît conjointement avec les lèvres armées de dents qui entourent la bouche, de sorte que celle-ci n'est plus garnie que de deux bords arrondis, mous, formés par la peau intimement unie au cartilage sous-jacent. Cette bouche est encore presque aussi étroite que chez le têtard, c'est une petite fente transversale dont les commissures sont à peine plus reculées que le milieu. La langue est déjà formée comme chez l'adulte, mais peu grande. Quant aux diverses pièces composant la tête, nous devons nous occuper d'abord de leur forme, puis de leur consistance.

A. *Forme.* 1° Les avances ethmoïdales se sont rac-

courcies et déjetées latéralement au point que le cartilage offre en avant la forme d'un T et non une bifurcation, comme dans la période précédente; les narines en sont presque totalement entourées; en un mot, ces avances sont réduites à former la portion antérieure de l'ethmoïde qui, chez la plupart des Batraciens anoures, est constamment cartilagineuse. (*Voy.* Ch. II.)

2° Les lames ptérygo-tympaniques reculent peu à peu jusque derrière l'œil, et leur apophyse orbitaire, devenue de moins en moins saillante, lui imprime en même temps une élévation progressive qui finit par la mettre de niveau avec le rocher. La portion postérieure de cette lame s'est raccourcie d'autant: par degrés même, elle se confond avec le prolongement cartilagineux du rocher. En même temps, la portion tympanique se sépare de plus en plus de la ptérygoïdienne, comme si la lame ptérygo-tympanique se partageait en deux portions sur sa longueur (à partir du ligament que nous avons dit achever en avant le contour de la narine postérieure ou inférieure du tétard): l'interne se rétrécissant de plus en plus, se déjetant un peu en dehors, et continuant à circonscrire l'orbite, comme dans l'état parfait; l'externe s'abaissant peu à peu jusqu'à devenir perpendiculaire et même se diriger plus tard en arrière, comme le tympanique de l'adulte. Ces deux portions, d'abord parallèles, se sont donc écartées, d'abord à angle aigu, puis à angle droit, et enfin à angle très ouvert.

3° La mâchoire supérieure ne peut manquer de suivre jusqu'à un certain point les changemens qui viennent d'être indiqués; elle rétrograde de presque toute la longueur des apophyses ethmoïdales, et en outre elle s'allonge par ses extrémités latérales et se prolonge en arrière; mais cette marche se lie plutôt aux progrès de l'ossification

dont nous parlerons tout à l'heure qu'au changement des cartilages ; ceux-ci s'atrophient peu à peu et finissent par disparaître à mesure que les os qui les remplacent prennent plus d'accroissement.

4° Il n'en n'est pas ainsi de la mâchoire inférieure : suspendue à l'apophyse tympanique du cartilage cranio-facial, elle rétrograde avec lui, et s'allonge pour rester en rapport avec la supérieure, dont le reculement n'est pas à beaucoup près aussi considérable. C'est le renversement en arrière des tympaniques qui produit cette différence ; car ce qui tient au raccourcissement des cartilages suspenseurs de l'une et de l'autre mâchoire est à peu près égal (lame ptérygo-tympanique pour l'une, apophyse ethmoïdale pour l'autre). Tout en s'allongeant, et en se courbant en arrière, les pièces cartilagineuses de la mâchoire inférieure s'atrophient bien un peu, mais non assez pour disparaître totalement comme dans la supérieure ; l'adrostrale est la seule qui s'allonge en réalité ; mais elle se soude d'abord avec la rostrale, puis elle s'amincit de plus en plus dans sa portion la plus antérieure, à mesure que se forment les os dont nous parlerons ci-après ; et en suivant cette transformation, on peut reconnaître aisément l'identité de ces deux cartilages, de l'articulaire et du dentaire de l'adulte.

B. *Consistance.* 1° Les pièces osseuses dont la solidification ou plutôt la formation caractérise le commencement de cette période, sont l'intermaxillaire, le maxillo-jugal et le fronto-nasal. Ce dernier n'est d'abord qu'une très mince écaille qui se forme sur le cartilage cranio-facial un peu derrière sa bifurcation. L'intermaxillaire est d'abord représenté par une languette osseuse verticale appliquée sur le cartilage rostral : c'est l'apophyse montante, laquelle s'élargit bientôt vers la partie inférieure. Une

lame plate, qui s'étend et se prolonge peu à peu d'avant en arrière après avoir commencé aussi sur le cartilage rostral et recouvert l'adrostral et le ligament qui va de l'apophyse ethmoïdale à la tympanique, constitue le maxillo-jugal ; ce ligament semble s'attacher à lui en abandonnant l'ethmoïde, et entraîner ou allonger en arrière le sus-maxillaire à mesure que le tympanique recule ; plus tard, ce même ligament en s'ossifiant, constituera la portion dure du tympano-malléal. Enfin, à mesure que le maxillo-jugal se prolonge, il emboîte en dehors la portion ptérygoïdienne de la lame ptérygo-palatine.

2° Un peu plus tard deux points osseux se forment dans l'épaisseur du cartilage cranio-facial, en-dessous et à l'origine même des lames ptérygo-tympaniques : c'est le commencement du futur *os en ceinture* de Cuvier.

3° Enfin c'est à l'approche de la période suivante qu'appartient la naissance des os ptérygoïdiens : ils apparaissent sous forme d'une lamelle contournée au bord interne de la lame ptérygo-tympanique, déjà divisée et amincie comme il a été dit plus haut ; ils l'embrassent aussi bien que la racine transverse de cette lame ; racine qui s'atrophie et disparaît par la suite, ou bien adhère par continuité de substance au ptéréo-rupéal, sur lequel elle est pressée par le ptérygoïdien et les apophyses transverses du sphénoïde.

Le temporo-mastoïdien apparaît à peu près à la même époque ; mais son développement est un peu plus lent.

C'est plus absolument encore au moment du passage de l'état de larve à l'état parfait, c'est-à-dire entre la quatrième et la cinquième période, qu'une larme osseuse très mince (fig. 74) devant, et une plus épaisse derrière, s'applique sur le cartilage adrostral de la mâchoire inférieure ; c'est là l'origine du sur-angulaire et de l'operculo-angulaire.

§ V.

De la Tête dans la cinquième période.

A l'extérieur rien ne la distingue alors de celle de l'adulte, qu'un peu moins de consistance : elle en a en effet toute la conformation ; mais quelques os sont encore fort minces, tels les fronto-nasaux ; d'autres encore séparés dans leurs pièces élémentaires, comme les fronto-pariétaux chez la grenouille commune et la rainette ; d'autres même ne se forment réellement qu'un peu plus tard, exemples, le palatin, le vomer, le malléal, le cornet, le dentaire, os dont les deux premiers se font par apposition au cartilage, les autres par solidification de cette substance.

Toutes ces modifications, au reste, ne sauraient être précisées sans des détails infinis, si l'on voulait en faire la distinction dans toutes les espèces de Batraciens anoures ; il en est en effet, comme les crapauds, chez lesquels l'ostéose est très tardive et très lente (surtout dans le sexe féminin), tandis qu'elle est des plus hâtives dans le *bombinator fuscus* et autres. Contentons-nous ici d'un résumé propre à rappeler les faits principaux qui signalent la transformation de la charpente du tétard en celle de l'adulte, en y joignant le peu que nous aurons à dire de plus des progrès ultérieurs de l'ossification.

1° Le cartilage cranio-facial d'abord nu, s'entoure bientôt du sphénoïde et des fronto-pariétaux ; ses longues apophyses ethmoïdales se raccourcissent, se renversent en dehors, se réduisent à une sorte de T : c'est la portion de l'ethmoïde destinée à la cavité olfactive ; elles attirent ainsi en arrière la mâchoire supérieure qui y est suspendue. Les lames ptérygo-tympaniques se fendent longitudinalement d'avant en arrière ; la portion interne s'amincit, s'allonge,

se jette plus en dehors, et devient cette équerre cartilagineuse qui, soutenue par le ptérygoïdien, représente, chez l'adulte, le lacrymal et le ptérygoïdien externe des autres vertébrés. La portion externe se raccourcit beaucoup, se dirige en bas, puis en arrière avec le ligament qui l'unissait d'abord à l'apophyse ethmoïdale; ce ligament seul s'ossifie par la suite, et constitue, avec le reste demeuré cartilagineux, le tympano-malléal de l'adulte, dont la portion la plus inférieure s'ossifie largement dans la vieillesse chez les crapauds, plus amplement encore et d'assez bonne heure, chez le sonneur brun. Le bord externe de ce cartilage est bientôt emboîté par le temporo-mastoïdien, dont l'apophyse zygomatique ne se développe qu'assez tard même chez la grenouille verte : peut-être les restes de l'apophyse orbitaire du cartilage cranio-facial lui servent-ils de point d'appui; elle est cependant, même avant cette époque, réduite à un coude ou angle arrondi à peine plus large que le reste du cartilage tympanique, réduction qui semble préluder à son atrophie complète. Enfin, la partie centrale du cartilage cranio-facial se solidifie en arrière par quatre points osseux (occipitaux et ptéréo-rupéaux) qui, parfois, se réduisent à deux avec l'âge, un pour chaque côté. En avant deux points osseux, réunis bientôt en-dessous, beaucoup plus tard en-dessus, forment la partie osseuse de l'ethmoïde, celle qui loge les lobes et nerfs olfactifs et donne passage au nerf ophthalmique.

2° La mâchoire supérieure se dépouille de ses enveloppes cornées et s'atrophie à mesure que les os intermaxillaires et les maxillo-jugaux se développent sur leur face antérieure.

3° La mâchoire inférieure s'allonge à mesure que le tympanique rétrograde; son cartilage rostral se soude à

l'adrostral. Ce dernier prend seul un grand accroissement, il reste toujours cartilagineux, et forme, chez l'adulte, l'articulaire et le filet qui va jusqu'au dentaire. Ce dernier est dû à l'ossification assez prompte du cartilage rostral; enfin une plaque osseuse devant, une gouttière osseuse derrière, et en-dessous des pièces primordiales, ou plutôt seulement de l'adrostral, achèvent la mâchoire de l'adulte.

§ VI.

De l'Hyoïde et des Branchies, durant la deuxième et la troisième période.

Depuis le premier moment où l'hyoïde (fig. 72, 75) devient perceptible en raison de son volume et de sa consistance, jusque vers l'apparition des membres antérieurs, il est composé de cinq pièces correspondantes à celles de l'hyoïde des mammifères, deux cornes styloïdiennes, deux pièces thyroïdiennes et un basi-hyal.

A. Celui-ci, le plus petit des cinq (*l*), n'est d'abord qu'un petit cartilage plat, oblong ou ovale, situé au centre de réunion des quatre autres. Par la suite il s'agrandit et s'élargit, surtout en avant, en prenant une forme pentagonale.

B. Les *cornes styloïdiennes* (*m*), séparées par le basi-hyal, touchent aussi, par leur extrémité interne, les cornes thyroïdiennes. Elles sont robustes, épaisses, surtout en dehors, auguleuses et comme tordues; de sorte que leur plan est horizontal pour la partie interne, oblique et presque vertical pour l'externe. Leur direction est presque transversale, parallèle à celle de la mâchoire inférieure, à laquelle elles tiennent par des liens membraneux. Leur extrémité externe est articulée, de façon à jouir d'une assez

grande mobilité, avec le cartilage cranio-facial, sous son apophyse orbitaire.

C. La *pièce thyroïdienne* (*n*) est beaucoup plus complexe et plus différente encore de ce qu'elle doit être à l'état adulte. Le cartilage mince qui la forme, bien que continu dans toutes ses parties, offre pourtant deux portions qu'il faut distinguer : l'une plate, entière et petite; l'autre grande, concave et fenêtrée. La première touche en dedans celle du côté opposé, par un bord arrondi dans le très jeune âge, droit et de plus en plus prolongé par la suite. Le bord antérieur, toujours incliné en dedans, reçoit dans le sinus qu'il forme avec son semblable, l'angle postérieur du cartilage basi-hyal; en outre il est uni lâchement avec la corne styloïdienne. En arrière, une petite pointe libre est le rudiment bien évident de la corne thyroïdienne qui s'ossifiera à l'état parfait. En dehors, enfin, la portion plate dont nous parlons est continue avec la portion concave par quatre points différens. Cette dernière, considérée en totalité, représente à peu près un hémisphère creux, un peu oblong pourtant, ouvert en haut et partagé en bas par trois fentes parallèles à sa plus grande longueur, c'est-à-dire, dirigées d'avant en arrière et de dedans en dehors. En conséquence, cette pièce est divisée en quatre lames allongées, dont les marginales sont plus concaves, plus courbées que les mitoyennes; toutes quatre sont crénelées sur leurs bords, et leur surface convexe supporte de gros vaisseaux parallèles à leur longueur et donnant naissance, de toute leur étendue, à des arbres vasculaires ramifiés en forme de houppes nombreuses. Ces houppes sont les branchies, et les lames cartilagineuses sont les arcs branchiaux. Outre les houppes arborisées (1) qui

(1) Ces arbuscules, serrés les uns contre les autres, sont disposés en quin-

garnissent leur extérieur ou face convexe, les arcs branchiaux portent encore à leur face concave ou intérieure des franges transversales (huit à neuf à chaque arc) parallèles et toutes garnies de villosités vasculeuses. Ces franges occupent la face concave seulement, pour les arcs marginaux; pour les médiaux, elles occupent les deux faces d'une cloison ou grand pli membraneux élevé perpendiculairement dans la cavité hémisphérique qu'ils concourent à former. Les quatre arcs branchiaux sont unis entre eux, à leur extrémité libre, par une continuité de substance qui se détruira par la suite, mais qui n'offre, dans les périodes où nous les examinons, rien de particulier qu'une grande minceur du cartilage. Cette ténuité se joint à une étroitesse aussi très notable à l'endroit où les trois arcs branchiaux internes se continuent avec la portion plate qui les supporte; l'arc externe, au contraire, naît de cette portion plate par un pédicule bien plus fort, surtout en épaisseur.

§ VII.

Des changemens de l'Hyoïde durant la quatrième période.

A mesure que les mâchoires (fig. 76, 77) reculent, dépouillées de leur bec corné, les cornes styloïdiennes reculent

---

conce, sur quatre pour les arcs mitoyens, sur trois pour les marginaux. Leur nombre total peut être de 112 environ pour chaque côté, 224 en tout. Ces houppes ne paraissent, selon *Van-Hasselt*, qu'à l'époque où les branchies extérieures de la première période se flétrissent; et celles-ci ne doivent point être confondues avec les houppes, comme l'ont fait Swammerdam, Rœsel, etc. : il faut les comparer aux aigrettes ou lanières branchifères des larves des salamandres, des sirènes, du protée, lesquelles sont suspendues à l'extrémité des arcs branchiaux, et non disséminées sur leur longueur comme les houppes de la deuxième période de nos têtards de Batraciens anoures, et comme chez les poissons.

aussi, s'allongent en s'atténuant, et se ramollissant même par degrés; c'est surtout leur extrémité externe qui éprouve cet amincissement; l'interne semblerait s'élargir, au contraire, ou du moins l'angle antérieur devenir plus saillant et le bord interne moins convexe; enfin sa moitié postérieure, tout-à-fait droite, s'unit plus intimement à un basi-hyal tout-à-fait pentagonal.

Mais c'est la pièce thyroïdienne qui offre les changemens les plus notables. En même temps que les houppes branchiales s'atrophient graduellement par une sorte de flétrissure, les arcs qui les supportaient se ramollissent davantage. 1° Dès le commencement de la quatrième période, les trois arcs internes ne tiennent plus à la portion plate de cette pièce que par la membrane muqueuse et un tissu cellulaire filamenteux; l'externe est encore, avec elle, dans les mêmes rapports que dans la période précédente. 2° Un peu plus tard, lorsque l'articulation de la mâchoire est arrivée déjà sous l'œil et que la bouche commence à s'entr'ouvrir, que la queue a perdu un peu de sa longueur, il y a solution de continuité complète, non-seulement entre l'extrémité antérieure des trois arcs internes et la corne thyroïdienne, mais encore entre les extrémités postérieures de ces trois arcs; de sorte qu'ils sont tout-à-fait libres, suspendus seulement par les membranes et les vaisseaux flétris qu'ils supportaient naguère, et réduits de beaucoup (surtout les deux intermédiaires et le troisième en particulier, en comptant de dedans en dehors) dans leur volume et leur consistance. L'arc externe est celui qui conserve encore le plus de fermeté et de longueur, mais il est partagé en deux parties par une fissure transverse : l'une plate et mince, encore courbe, concave et crénelée, est le véritable représentant de l'arc; l'autre, épaisse, est un simple prolongement, une apo-

physe de la pièce thyroïdienne déjà presque réduite à sa portion plate. Mais cette portion plate, outre l'apophyse dont il est ici question, en offre une bien plus saillante que précédemment, vers son extrémité postérieure; c'est la véritable corne qui se rapproche de plus en plus de la forme adulte. 3° Enfin, à l'approche d'une complète métamorphose, quand la queue s'absorbe et que la bouche s'ouvre presque comme chez l'adulte, l'arc externe lui-même n'est plus qu'un petit cartilage allongé, mou et suspendu à l'apophyse dont il était question tout à l'heure. Les débris des autres ne se retrouvent qu'en lacérant des papilles noirâtres entassées en petit paquet, et qui sont le reste des houppes branchiales.

§ VIII.

Des changemens de l'hyoïde dans la cinquième période.

Ce n'est que lors du complément de la métamorphose que s'opèrent les autres changemens qui doivent ramener l'hyoïde à l'unité, à la consistance, à la forme adulte (fig. 78, 79). Les restes des branchies et de leurs arcs disparaissent peu à peu à l'aide d'une absorption complète, par une progression à peu près parallèle à celle de l'atrophie de la queue. L'apophyse cartilagineuse externe de la pièce thyroïdienne se réduit à un angle proportionnellement bien moins prolongé que chez le tétard, c'est l'angle postérieur et externe du corps de l'hyoïde chez l'adulte. De très bonne heure, un peu même avant la disparition complète de la queue, la pièce thyroïdienne s'est réunie, soudée intimement au basi-hyal, et la même soudure s'est opérée entre le basi-hyal et l'extrémité interne de la corne styloïdienne. Chez le sonneur brun, la trace de

ces réunions dure au-delà même de la première année, sans persister toutefois jusqu'à l'âge de l'adulte, comme pour la grenouille commune; la partie postérieure de cette trace en forme d'Y est celle qui se voit le plus long-temps comme une ligne opaque dans la transparence du cartilage. Quelques semaines après la chute de la queue, la majeure partie des cornes thyroïdiennes prend décidément la consistance osseuse et une couleur rouge qu'elle n'avait point eue jusque-là. La corne styloïdienne rétrécie et amincie par degrés, devenue de plus en plus oblique et presque longitudinale, se termine en arrière par une pointe mousse, lâchement unie au cartilage cranio-facial, auquel elle se soude dans un âge plus avancé. Une remarque assez intéressante relativement à cette corne, c'est qu'elle se divise chez le *B. fuscus* qui nous a servi jusqu'ici de texte (1), à son élargissement interne, de façon qu'une portion courte et large reste adhérente, continue au basi-hyal, dont elle forme, en s'arrondissant et s'échancrant, les apophyses antérieures; l'autre longue et étroite, n'étant unie à celle-ci que par une attache membraneuse, comme on le voit encore dans l'adulte.

De ce mode de développement, nous pourrions tirer peut-être cette conclusion, que la première portion représente seule la corne styloïdienne, et que la seconde n'est que l'apophyse styloïde du temporal.

Quant à la pièce thyroïdienne, ses transformations successives et son passage graduel vers l'état adulte nous prouvent qu'elle n'a, en réalité, d'autres analogues que la corne qu'elle finit par représenter bien positivement.

---

(1) Nous avons toutefois constaté les mêmes changemens et la même marche chez les grenouilles communes et la rainette, mais avec moins de facilité et de certitude.

Les arcs branchiaux qu'elle supporte d'abord, mais *qui font corps avec elle*, ne peuvent détruire en rien cette détermination. Il y a plus, on peut au contraire faire valoir, selon nous, les connaissances certaines que nous donne l'examen du tétard aux diverses périodes de la métamorphose, pour aider à la détermination des pièces branchiales chez les poissons. Ne peut-on pas dire aussi pour eux, comme on y est bien forcé pour nos tétards, que les arcs branchiaux ne sont que des répétitions ou des dépendances de la corne styloïdienne? La première de ces deux opinions, qui fut énoncée il y a long-temps déjà par M. Duméril, méritait-elle l'oubli où on l'a laissée? Nous ne le pensons pas, et, outre la présente analogie, nous ferons valoir en sa faveur, 1° la position, la forme et les rapports des arcs branchiaux qui, à part leur nombre, rappellent presque involontairement l'idée de la corne thyroïdienne des mammifères; 2° la ressemblance de ces arcs avec la corne styloïdienne chez les poissons cartilagineux; 3° la multiplicité des pièces médianes de l'hyoïde chez les poissons osseux; multiplicité où l'on ne peut guère voir raisonnablement qu'une répétition du basi-hyal, comme celle que nous supposons pour la corne thyroïdienne. Aurais-je besoin de rappeler les nombreux exemples de répétitions analogues à celles-ci? Les doigts de nos Batraciens mêmes, mais surtout les membres des icthyo-saurus et plésio-saurus, les nageoires des poissons, en offrent des modèles si frappans que je n'y insisterai pas davantage.

Si l'on ne voulait voir dans les arcs branchiaux qu'une addition, un appendice des cornes thyroïdiennes, on pourrait encore établir le parallèle entre nos tétards et les poissons, en rappelant la comparaison déjà faite par Cuvier entre la corne susdite et le pharyngien inférieur des poissons osseux, et faisant remarquer que, chez les uns et

chez les autres, c'est entre cette corne et la styloïdienne que l'appareil branchial est placé.

§ IX.

Des Vertèbres et de leurs changemens.

Durant la *première période*, et avant même le moment de l'éclosion, on voit très bien que l'axe du tétard, depuis la tête jusqu'au bout de la queue, est formé par une colonne cartilagineuse cylindrique, ou plutôt en forme de cône très allongé, et qui paraît divisée transversalement en rondelles ou vertèbres. Un sillon de la face supérieure de ce cylindre loge la moelle épinière et des vaisseaux sanguins; un vaisseau non moins considérable côtoie la face inférieure. Quand on dépouille exactement ce cartilage des chairs environnantes, avec la pointe d'une aiguille, on s'aperçoit aisément que ses divisions transversales n'ont rien de réel, qu'elles ne sont que simulées par les intersections des muscles qui l'entourent et les branches transverses des vaisseaux qui accompagnent chaque paire de nerfs à son départ de la moelle.

Cette continuité du cartilage rachidien est plus facile encore à constater durant la *seconde période;* mais alors on peut suivre, en outre, le développement progressif d'apophyses également cartilagineuses, continues aussi à la tige rachidienne, et qui s'élèvent par paires, des deux côtés de sa face supérieure, de manière à embrasser la moelle épinière. On compte de ces apophyses autant qu'il y aura de vertèbres par la suite, y compris la neuvième; deux crêtes même s'élèvent un peu plus tard pour former les parois du canal coccygien. C'est successivement d'avant en arrière que la première apparition, comme aussi le développement ultérieur, se remarquent, et la solidifi-

cation suit une progression analogue. D'abord constituées par un petit tubercule, ces apophyses ne tardent pas à se bifurquer en s'allongeant davantage; une branche est l'apophyse transverse; l'autre forme la lame vertébrale et plus tard sert à la formation des apophyses articulaires.

Mais ceci ne devient perceptible que durant la *troisième période;* c'est alors aussi (dans les commencemens), que la forme devient toute semblable à celle de l'adulte et que la solidification s'annonce et s'accroît sans s'achever complètement. Cette ossification ne marche pas absolument de la même manière chez le *B. fuscus*, *l'obst. punctatus*, la rainette, d'une part, et la grenouille commune d'autre part. Ce sont les seules espèces dont j'aie suivi le développement, et je commence par les premières mentionnées.

Dans le principe de la troisième période, si l'on ouvre avec une épingle le canal vertébral en partie membraneux, en partie cartilagineux, qu'on le vide de son contenu, qu'on ouvre en-dessous la gaîne du cartilage rachidien, et qu'après en avoir enlevé sans violence la partie la moins consistante, on étale le reste sur une lame de verre, on apercevra un commencement d'ossification pour chaque corps de vertèbre. Une opacité notable à l'état frais, en examinant le cartilage à contre-jour, la blancheur des points où l'ossification commence à la surface supérieure de ce cartilage desséché et observé à la lumière réfractée, signalent ce commencement de solidification. Est-ce par un point central ou par deux points latéraux que le corps des vertèbres s'ossifie d'abord? Question assez importante relativement aux lois de l'ostéogénie, et qui a été diversement résolue chez les vertébrés supérieurs, affirmativement par M. Serres, négativement par Béclard. On se rangerait aisément à l'avis de ce dernier, si l'on se

contentait d'observations peu nombreuses et peu variées ; mais la duplicité primitive du noyau d'ossification ne peut plus être révoquée en doute quand on a suivi par gradations presque insensibles le passage de l'état cartilagineux pur à l'état osseux. Deux nuages bien isolés troublent d'abord la transparence du cartilage, sur deux points parallèles et aussi écartés entre eux qu'ils le sont des masses ou apophyses latérales ; peu à peu ces nuages deviennent plus épais ; ils sont enfin tout-à-fait opaques, mais cette intensité de *visibilité*, s'il est permis de s'exprimer ainsi, ne s'accroît qu'à mesure qu'ils s'élargissent ; c'est surtout du côté de la ligne médiane qu'ils gagnent à mesure qu'ils s'épaississent ; de sorte que quand leur centre primitif est bien opaque, bien blanc (par la dessiccation), déjà un nuage, pareil à celui de leur première origine, les réunit entre eux. Ce nuage ne tarde pas à devenir aussi opaque que les points latéraux ; mais il reste quelque temps plus étroit ; de sorte que chaque vertèbre n'a qu'un noyau, mais bilobé ; plus tard enfin ce noyau unique a pris la forme carrée. Comme l'ossification marche plus vite dans les vertèbres antérieures que dans les postérieures, il y a un moment où l'on trouve un noyau carré dans les plus avancées, bilobé un peu plus en arrière ; plus loin deux noyaux réunis par un nuage ; plus loin encore deux points nébuleux séparés, et tout-à-fait en arrière le cartilage pur.

Les masses latérales commencent à s'ossifier en même temps et peut-être plus rapidement que le corps ; car on aperçoit bientôt la structure osseuse dans toute leur étendue.

Ce n'est pas pour ces dernières, mais seulement pour le corps, que nous avons à signaler quelques différences entre ce que présente la grenouille et ce que nous venons

de décrire ; après les premiers pas de l'ossification, on la voit, dès le milieu de la troisième période, envahir au niveau de chaque vertèbre future le pourtour du cartilage rachidien. Une virole osseuse remplace ici le point carré ou cuboïde dont nous parlions plus haut ; ces viroles s'élargissent peu à peu, se touchent enfin dans la période suivante, et en s'épaississant par degrés, de la circonférence au centre, amincissent de plus en plus le cartilage central, qui, toujours continu dans toute sa longueur, se trouve ainsi renfermé dans un étui partie osseux, partie membraneux. J'en ai acquis la complète certitude, et j'ai vu que ce n'était que long-temps (plusieurs mois du moins) après la métamorphose complète, que les vertèbres ressemblent, comme l'a dit M. Dutrochet, comme Cuvier l'a constaté ensuite, à celles des poissons ; je parle des poissons adultes et de la majeure partie d'entre eux. Dans les périodes précédentes, c'est parmi certains chondroptérygiens, la lamproie, par exemple, qu'il faut chercher une analogie plus complète.

Revenons maintenant au *B. fuscus* et à ceux qui lui ressemblent, et voyons quels changemens éprouvent leurs vertèbres dans la *quatrième période* : c'est pendant sa durée que s'achèvent le rapprochement et la soudure des lames vertébrales entre elles, et des masses latérales avec le corps ; de sorte qu'à l'état parfait (1) l'animal a ses vertèbres complètes et d'une seule pièce, quoique fort jeune encore (*cinquième période*). J'en excepte toutefois le condyle au globe intervertébral que nous avons déjà

(1) Chez le crapaud commun, je trouve au contraire les masses latérales séparées par un grand intervalle cartilagineux du noyau central encore petit et bilobé, quoique le sujet ait, depuis plusieurs mois, perdu sa queue de têtard, et qu'il ait toutes les formes et les proportions de l'adulte.

étudié chez l'adulte ; mais, avant de parler de ces globes, suivons le développement ultérieur du corps des vertèbres et les modifications de la tige cartilagineuse, comme nous l'avons fait par anticipation pour la grenouille. Le noyau carré s'épaissit et s'élargit peu à peu, mais reste toujours concave, non-seulement en-dessus, mais encore en avant et en arrière, et surtout en-dessous. Pendant toute la durée de la quatrième période la portion déjà ossifiée des vertèbres représente en-dessous un demi-canal ou gouttière qui loge la tige cartilagineuse. Cette gouttière devient de moins en moins profonde à mesure que la métamorphose approche, la tige cartilagineuse se ramollit dans la même proportion, et à la fin sa gaîne membraneuse seule lui conserve sa forme ; piquée, elle s'affaisse en laissant écouler un liquide visqueux, grumeleux, débris de l'ancien cartilage, et l'on peut, en l'insufflant, lui rendre brusquement la forme qu'elle avait aux précédentes périodes. Durant la *cinquième période,* la gaîne est affaissée, aplatie, toujours adhérente au devant du corps des vertèbres ; mais elle paraît plus étroite, parce que celles-ci se sont élargies sans qu'elle ait changé de volume ; la gouttière du corps s'est peu à peu remplie, et la gaîne semble se réduire enfin en un ligament plat, sans avoir été, comme chez la grenouille, envahie ou entourée par l'ossification. Chez celle-ci on pouvait croire que les globes intervertébraux n'étaient dus qu'à la solidification de la tige cartilagineuse emprisonnée dans l'anneau du corps vertébral et coupée en segmens par l'occlusion de ces anneaux ; on a ici la preuve du contraire. A la fin de la quatrième période, on voit, entre les vertèbres, des boules cartilagineuses, plus saillantes même que le corps des vertèbres encore creusé en gouttière du côté de la gaîne du cartilage avec lequel elles

n'ont pas plus de continuité de texture que l'os vertébral lui-même. Ces globes se sont donc formés hors du cartilage rachidien ; ils ressemblent d'abord à des vésicules interposées entre les portions ossifiées, et ce n'est qu'après la métamorphose, qu'ils s'ossifient eux-mêmes pour se réunir, comme on sait, chez l'adulte, par une de leurs faces, au corps de certaines vertèbres, tandis que l'autre face sert à une articulation mobile par frottement. Une semblable articulation s'établit entre la première vertèbre et l'occipital, lorsque les condyles de celui-ci s'ossifient. Jusque-là il y avait union intime ; dans la première et la seconde période même, le cartilage rachidien était tout-à-fait continu au cranio-vertébral ; ce n'est que dans la troisième, qu'une ligne opaque, ou du moins paraissant telle à la réfraction, s'établit entre eux.

De tout ce que nous venons de dire, il résulte que l'ossification du corps des vertèbres, comme celle de plusieurs os du crâne, s'opère non dans l'épaisseur, mais à la surface du cartilage qui composait le rachis du tétard à la seconde période; que, chez la grenouille, l'os entoure même tout-à-fait ce cartilage. Quant à la masse latérale, j'ai lieu de croire que les matériaux osseux enveloppent aussi une branche, un processus cartilagineux ; en effet, je trouve leurs apophyses exactement tubuleuses et vides dans les vertèbres desséchées d'un très jeune sujet du *B. fuscus*.

Je n'ai guère parlé jusqu'ici que des changemens de la portion véritablement vertébrale du cartilage rachidien ; il va être question de la portion caudale en même temps que de la formation de la dixième pièce de la colonne vertébrale de l'adulte. Je n'ai rien spécifié pour la neuvième, ou sacrum, qui ne diffère d'abord en rien des autres vertèbres, et dont seulement les apophyses transverses s'élar-

gissent pendant la quatrième période, de façon à présenter déjà, dans la cinquième, l'apparence qu'on leur connaît chez l'adulte.

§ X.

De la dixième pièce du rachis, ou Coccyx, et de son développement.

Dans la seconde et la troisième période, le cartilage rachidien fournit de sa partie supérieure, outre les masses latérales des neuf vertèbres dont il a été question plus haut, deux paires de lames simples (la première pourtant avec une apophyse transverse chez plusieurs espèces autres que le *B. fuscus* dont nous parlons ici), qui, peu à peu ossifiées, se rejoignent au-dessus de la portion de moelle épinière déjà fort rétrécie qui leur correspond. En même temps se forment, probablement par le même mécanisme que pour les autres vertèbres, deux corps osseux sans doute bientôt soudés avec les lames; en effet cette soudure a déjà lieu dès le commencement de la quatrième période; mais les deux vertèbres coccygiennes sont encore séparées transversalement par une ligne cartilagineuse au niveau du petit trou de conjugaison qui subsiste jusque chez l'adulte pour la plupart des Batraciens anoures, et les lames sont encore à distance l'une de l'autre sur la ligne médiane.

Le coccyx est donc originairement composé de deux vertèbres qui ne se soudent que dans la cinquième période (1), mais leur union n'a pas lieu seulement par une soudure telle que celle qui, chez le pipa, réunit le sacrum, ou neuvième vertèbre, au coccyx et l'atlas à la seconde vertèbre. Un septième élément se joint ici aux six (deux corps et quatre lames) dont nous venons de parler, pour former

(1) Donc il faut compter en réalité onze vertèbres au rachis des anoures.

un coccyx complet. Cette septième pièce est une longue épine cylindroïde, d'abord cartilagineuse, qui, dès le commencement de la troisième période, s'établit vers la face inférieure du cartilage rachidien et en dedans de sa gaîne membraneuse ; à mesure que ce cartilage diminue de consistance l'épine en prend davantage, elle est déjà en partie osseuse au commencement de la quatrième période, et se prolonge bien au-delà des deux vertèbres coccygiennes au niveau desquelles elle a commencé à se former. Durant la quatrième période, l'épine se rapproche de plus en plus du corps de ces vertèbres ; elle y touche au commencement de la cinquième, durant laquelle elle achève de s'y souder (1). Par l'effet de cette soudure et de celle non moins complète des lames de la dernière vertèbre entre elles et avec le corps, le canal vertébral se trouve fermé tout-à-fait en arrière, vers la réunion du quart antérieur avec les trois quarts postérieurs de l'os qu'on nomme coccyx chez l'adulte. Il ne faut pas confondre avec le vrai canal vertébral, le canal médullaire dont est percé le centre de cet os à l'instar de celui des os longs avec lesquels il a beaucoup de ressemblance. On pourrait croire que c'est cette occlusion du canal vertébral qui étrangle la moelle épinière et détermine ainsi la mortification de la queue; mais cette occlusion n'est complète qu'après la disparition totale de ce membre, et l'on sait qu'il n'y a point, dans ce phénomène, une véritable mortification, mais un ramollissement, une flétrissure, une résorption graduelle comme dans les cartilages des mâchoires et des branchies. Le cartilage rachidien lui-même s'est ramolli

(1) Dans la grenouille verte, l'épine est emboîtée à moitié par la concavité du corps des vertèbres coccygiennes, qui ne forme jamais un anneau complet comme celui des autres.

et résorbé dans toute sa longueur; et, long-temps avant que l'occlusion du canal fût imminente (seconde et troisième période), la moelle épinière était assez brusquement atténuée au-delà des vertèbres ou de leurs rudimens. C'est par degrés que cet amincissement devient plus brusque, et la disparate plus grande entre la partie recouverte des lames vertébrales et celle que loge, d'un bout à l'autre, un simple sillon de la face supérieure du cartilage caudal; sans doute cette portion se détruit comme le reste de la queue, comme les branchies et les mâchoires; non en vertu d'une cause mécanique *sensible,* mais d'après les lois inconnues de l'organogénésie. Ce qui le prouve enfin d'une manière péremptoire c'est que la destruction de la moelle s'opère, par portions, d'arrière en avant, comme celle de la queue. Il ne faudrait par prétendre, d'après cela, qu'il ne se passe ici qu'un simple raccourcissement; qu'il n'y ait, par exemple, autre chose qu'une réduction du cartilage caudal à la forme de coccyx, ainsi que le donne à entendre Meckel; car la portion cylindrique de ce coccyx est formée long-temps avant la disparition du cartilage caudal; cette portion se solidifie à mesure qu'il se ramollit, et flotte, pour ainsi dire, dans la gaîne encore entière de la tige primitive du rachis. Quant à la crête qui surmonte, chez les grenouilles, le coccyx de l'adulte, elle paraît due en partie à une expansion de l'épine cylindrique, en partie au prolongement des lames vertébrales serrées l'une contre l'autre et à peine soudées, ou du moins assez facilement séparables par un effort; une substance osso-cartilagineuse semble même quelquefois interposée entre elles.

Nous avons facilement trouvé l'analogue de six des pièces primordiales du coccyx; la septième (l'épine cylindroïde) n'est pas aussi facile à déterminer; on ne peut cependant y voir que l'analogue des os en V, et dès lors le

caractère de *coccyx* est assuré à l'os qui fait dans l'adulte la dixième pièce du rachis ; cet os est donc une véritable queue, pour ainsi dire, intérieure; et même, chez le tétard, la portion cylindrique faisait réellement partie de la queue et se trouvait *derrière l'origine des membres postérieurs;* l'allongement du bassin, son redressement, dont nous parlerons plus bas, ont rendu intérieure cette queue qui, dans l'adulte, loin de faire saillie au-delà de l'anus, se termine au contraire un peu plus en avant que lui.

§ XI.

Du Membre antérieur et du Sternum.

L'ordre suivi dans la disposition du titre de ce paragraphe est celui du développement considéré relativement à ses époques ; la formation du sternum peut en effet être considérée comme le complément de l'épaule qui le précède de beaucoup, comme elle a été précédée elle-même par les autres parties du membre antérieur. C'est dans la seconde période, et lorsque le tétard, bien arrondi, a acquis à peu près le volume d'un gros pois pour la rainette et la grenouille, celui d'une olive pour le sonneur brun, qu'on aperçoit, dans l'angle formé par la rencontre de l'appareil branchial et des muscles rachidiens, les premiers rudimens du membre antérieur. La dissection est indispensable pour les mettre à découvert ; car ils sont enfermés dans le sac branchial, recouverts par conséquent de son enveloppe muqueuse et musculaire, et en outre de la peau. Ces premiers rudimens consistent en un petit corps blanchâtre, arrondi ou ovale, suspendu par ses vaisseaux et nerfs et par quelques fibres musculaires, au sac branchial et aux apophyses transverses des vertèbres ou aux muscles qu'elles supportent. Peu à peu ce bourgeon s'al-

longe et s'élargit en s'aplatissant ; bientôt il paraît crénelé et surmonté d'un pédicule épais, recourbé. Quand le têtard, parvenu clairement à la troisième période, a acquis la moitié environ du plus grand volume qu'il doit avoir par la suite, il devient évident que les crénelures de la palette sont le commencement de quatre doigts courts et gros dont le troisième est le plus saillant, et que des sillons ne séparent encore que d'une manière imparfaite. Le pédicule recourbé paraît formé d'un avant-bras petit proportionnellement à la main, et d'un bras plus court encore : quant à l'épaule, elle consiste dans un élargissement fort mince de la base du pédicule; élargissement qui embrasse, en forme de croissant, le bord postérieur de l'appareil branchial. Deux muscles supérieurs, dont l'un va à la tête et l'autre aux vertèbres, forment ou soutiennent l'angle supérieur de ce croissant, qui contient aussi sans doute les rudimens cartilagineux de l'épaule ; un troisième faisceau musculaire prolonge l'angle inférieur; il s'attache sur le diaphragme qui sépare de l'abdomen la cavité branchiale, et se dirige vers le péricarde. Ces faisceaux, peu distincts d'abord, le deviennent plus nettement à mesure que le membre s'allonge, que les doigts se séparent, que les cartilages prennent de la consistance, aussi bien que les muscles des membres supérieurs, qui paraissent long-temps comme nus et sans enveloppe dermoïde (1) : celle-ci se montre vers la fin de la troisième période. Alors les doigts du côté droit touchent ceux du gauche, ils

(1) Chez les crapauds, le têtard a la peau doublée d'un épais pigment coloré en noir; aussi voit-on le membre antérieur légèrement pointillé de cette couleur, même avant la formation des doigts, ce qui y indique la présence d'une peau encore imparfaite. A une époque moins avancée, le bourgeon est tout-à-fait blanc ; les membres postérieurs, au contraire, sont colorés en noir dès leur première apparition.

s'entre-croisent même un peu sur la ligne médiane, et l'avant-bras longe le bord postérieur des branchies, mais il en est séparé par l'épaule et le bras qu'il côtoie ; le membre antérieur est en effet ployé de façon que le coude est relevé en haut. Alors aussi, on distingue aisément toutes les pièces osseuses des doigts, du métacarpe, du carpe, de l'avant-bras, du bras et de l'épaule.

Les deux os ou cartilages de l'avant-bras sont cylindriques, collés l'un contre l'autre, mais si bien distincts qu'on les sépare sans peine dans toute leur longueur par la pression entre deux verres ou par un léger effort avec la pointe d'une épingle : démonstration complète de la duplicité élémentaire de l'os antibrachial des Batraciens anoures.

A l'épaule, on distingue la coracoïde et la clavicule, longues et étroites, ainsi que l'omoplate qui est aussi fort étroite et dont les deux pièces sont déjà distinctes par une différence brusque dans leur épaisseur et dans leur consistance.

Déjà l'extrémité interne des clavicules d'un côté touche celles du côté opposé, mais elles ne s'unissent intimement ou ne se croisent au-dessous du cœur que dans la quatrième période. On peut bien voir, dans la troisième, que, chez les grenouilles comme chez les crapauds, etc., l'espace qui sépare le corps de la clavicule et celui de la coracoïde, alors assez éloignées même à leurs extrémités, est fermé en dedans ; qu'il constitue un trou complet, aussi bien que chez l'adulte, et que la portion médiane osséo-cartilagineuse, qui est impaire chez l'adulte, est bien double dans le jeune âge, qu'elle appartient bien à l'épaule et non au sternum, dont il n'existe rien encore, qu'elle est en un mot, comme nous l'avons dit, un prolongement de la clavicule.

C'est dans la quatrième période, que les membres dont nous parlons sortent de la cavité branchiale ; le gauche

paraît souvent le premier, et quelquefois il disparaît après s'être montré, parce que c'est de son côté que se trouve l'ouverture naturelle des branchies ; il faut une rupture pour l'issue de celui du côté droit. Muscles et os, tout prend, dans cette période, une consistance et une forme plus analogue à celle de l'adulte. Les cartilages considérés à l'état frais ne paraissent, en raison de leur transparence, offrir que de petites viroles osseuses au milieu de l'humérus et de l'avant-bras (1) ; mais si on les fait sécher, on les voit blanchir et prendre partout au dehors, excepté à leurs extrémités articulaires, la consistance osseuse : de sorte que l'ossification paraît dès lors aussi complète que chez l'adulte même : circonstance bien remarquable et toute particulière à nos reptiles. Toutefois, si l'on fend ces os, on voit qu'il n'y a d'osseux qu'une croûte superficielle excepté à l'endroit qui, dans la transparence du cartilage, paraît être seul véritablement osseux d'abord. Là, l'os est assez épais, et sa cavité contient une moelle rougeâtre ; partout ailleurs le cartilage occupe le centre du cylindre, mais il serait difficile de dire si c'est le périoste qui s'est ossifié autour de lui, ou sa couche superficielle qui a pris la consistance osseuse ; cette dernière opinion me paraît la plus probable, quoique peu en harmonie avec ce que nous voyons dans les mammifères. Le canal médullaire est d'abord double dans l'avant-bras et même plus promptement prolongé dans le cubitus que dans le radius et de même qu'à la jambe, il l'est plus dans le péroné que dans le tibia. Déjà, pourtant la soudure des deux os est parfaite au milieu ; elle paraît coincider avec la formation de la moelle et se propager du centre

(1) Déjà, à la fin de la troisième période, on trouve un nuage au centre de ces os, indice d'ossification prochaine.

aux extrémités ; car dans la cinquième période encore, on peut séparer aisément, vers leurs extrémités inférieures, les deux os de l'avant-bras. Pour les os de l'épaule, l'acromial se forme sur la clavicule vers la fin de cette quatrième période ; le coracoïdien s'ossifie plutôt encore aussi bien que la première pièce du scapulum.

Ce n'est guère que dans la cinquième période, ou à son approche, qu'on aperçoit nettement les rudimens du sternum, tant de sa partie antérieure, pour les espèces qui la possèdent, que de la partie postérieure. Cette circonstance, bien positive et indubitable, pourrait être, avec les autres détails que nous venons de donner, apportée à l'appui de la théorie de M. Serres pour l'organogénie : certes les parties éloignées du centre se sont formées avant celles qui en sont les plus voisines, qui l'occupent même chez l'adulte ; mais cela ne serait pas vrai pour les doigts ; cela ne serait pas vrai pour le cartilage céphalo-rachidien, etc., etc. Prenons le vrai où il se trouve, et ne généralisons pas d'une manière exclusive quand des observations péremptoires prouvent, avec une égale force, en faveur de plus d'une théorie.

C'est seulement dans la sixième période de la vie des Batraciens anoures, que s'achève l'ossification des os courts (carpe) et celle des épiphyses articulaires des os longs (1). Le corps ou diaphyse de ceux-ci s'épaissit de plus en plus aux dépens du cartilage intérieur qui, lui-même, disparaît pour faire place au canal médullaire ; ce canal devient même simple à la longue, dans la partie moyenne de l'avant-bras

(1) La formation du canal médullaire n'est complète qu'après la première année : pendant les premiers mois de la cinquième période, il y a encore, vers chaque extrémité du fémur, par exemple, plusieurs lignes de l'os sans canal médullaire, on n'y trouve que la croûte osseuse extérieure et le cartilage central.

et de la jambe, comme dans le canon des ruminans. Quant aux épiphyses, elles présentent ceci de particulier qu'elles emboîtent, comme une croûte en forme de calotte ou de pomme de canne, les extrémités des diaphyses jusqu'à une hauteur assez grande. Cette croûte devient fort mince par la dessiccation parce que ces épiphyses ne sont guère que demi osseuses, même dans l'âge le plus avancé. Ce que nous avons dit dans ce paragraphe rendra aisément raison de la différence qu'on observe entre ces épiphyses et celles du coccyx, des iliums : celles-ci restent complètement cartilagineuses jusqu'à ce qu'elles disparaissent entièrement si l'animal devient très vieux, et elles sont intérieures plutôt qu'extérieures à la diaphyse. C'est qu'elles ne sont pas de vraies épiphyses, mais les restes du cartilage primitif ossifié de dehors en dedans, et de la base à l'extrémité de l'os. C'est aussi de la même façon que s'ossifient, ainsi que je l'ai dit ailleurs, les masses latérales des vertèbres.

§ XII.

Du Membre postérieur et du Bassin.

Comme l'antérieur, le membre dont il s'agit ici montre, avant tout autre, sa portion élargie et terminale, le pied; mais les doigts, bien plus longs que ceux de la main chez l'adulte, ne se font voir également ici que consécutivement au reste du pied. Le développement de ce membre marchant d'ailleurs par les mêmes phases, subissant ses changemens aux mêmes époques que l'antérieur, et passant par les mêmes degrés de solidification, nous nous dispenserons des détails minutieux que contient le paragraphe précédent; nous n'insisterons que sur les choses notables. Il ne faut pas, en effet, s'en laisser imposer par l'apparence et croire que le membre postérieur soit plus

précoce que l'antérieur, parce que celui-là est à découvert et que celui-ci est caché. Le dernier même précède de quelque chose pour ses perfectionnemens, et j'ai vu, en particulier dans la rainette, la main déjà pourvue de doigts séparés et terminés en disque, tandis que le pied n'offrait encore que des crénelures et des sillons. C'est dans un enfoncement de la peau derrière l'abdomen, derrière et au-dessus du cylindre anal, sous la masse musculaire de la queue, qu'on trouve les premiers rudimens du membre abdominal. Il ne consiste d'abord qu'en une petite palette ovale, concave d'un côté, convexe de l'autre et suspendue à la peau ou aux organes voisins par quelques filamens, mais faisant déjà libre saillie au dehors et baignée par l'eau dans laquelle vit l'animal (1). Ce bourgeon s'élargit, montre des crénelures en nombre égal aux doigts futurs, et un pédicule épais et coudé le surmonte bientôt; bientôt aussi on reconnaît parfaitement le pied, la jambe et la cuisse; et le moignon de celle-ci paraît évidemment soutenu par trois ordres de faisceaux, outre la peau qui le revêt, et qui, bien que très fine, se continue exactement avec celle du ventre : de ces trois faisceaux, l'un interne est vasculaire et nerveux, un autre antérieur est le muscle droit de l'abdomen; le troisième oblique, mais presque vertical en avant et en haut, est aussi musculaire et en partie confondu avec les faisceaux de la base et de la queue, c'est le muscle post-iléo-fémoral; mais il y a là aussi, d'assez bonne heure sans doute, les rudimens de l'ilium.

Toutefois je n'ai bien vu cet os encore cartilagineux

(1) Bien que caché aux yeux de l'observateur, le membre thoracique n'en est pas moins aussi baigné par ce liquide, puisqu'il est libre dans la cavité des branchies.

qu'au milieu de la troisième période, c'est-à-dire, quand toutes les autres parties du membre, y compris les doigts, ont déjà une forme bien comparable à celle de l'adulte : alors seulement la base de l'ilium touche celle du côté opposé, et l'on trouve déjà derrière cette base et de chaque côté un cartilage ischio-pubien qui se sépare aisément de l'iliaque. Jusqu'à cette époque les deux cuisses, quoique fort rapprochées à leur origine, ne se touchaient pas encore au-dessous du rectum, au-dessus duquel elle avait pris d'abord racine ; c'est le muscle droit qui les ramène ainsi en bas peu à peu, comme le pectoral ramène en dedans les épaules ; l'ilium au temps dont nous parlons présente la forme et l'élargissement de la base, qu'on lui connaît chez l'adulte, mais il est fort petit, fort court, sans courbure, et dirigé non pas horizontalement, mais presque verticalement, ou du moins dans un exact parallélisme avec les faisceaux musculaires inférieurs de la base de la queue.

Dans la quatrième période, on le trouve déjà uni par des ligamens à l'apophyse transverse de la neuvième vertèbre ou sacrum, mais encore fort oblique; ce n'est que dans la cinquième qu'il devient tout-à-fait parallèle au coccyx. Quand à ce qui est de son ossification, elle est de deux sortes comme celle des os longs, 1° superficielle et générale, 2° intérieure et médullaire : c'est d'arrière en avant que ses progrès se manifestent. L'ischion ne paraît se solidifier que de cette dernière façon vers la cinquième période.

Je n'ajouterai à tout ceci qu'un mot pour la jambe, c'est que le tibia et le péroné, quoique accolés, dans la troisième période, sont aussi distincts que le cubitus et le radius, et qu'ils se soudent de la même manière.

§ XIII.

Conclusion.

Deux ordres de phénomènes ont dû nous occuper presque simultanément dans les paragraphes qui composent ce chapitre; formation et développement d'une part, atrophie et destruction d'autre part.

Nous avons vu, sous le premier rapport, un cartilage, continu dans presque toute sa longueur, servir de charpente à la tête et d'axe au reste du corps; plus tard une scission s'établit dans ce cartilage entre la portion céphalique et la rachidienne; la première s'élargit, s'aplatit en relevant par degrés son extrémité antérieure, et alors des plaques osseuses la revêtent de toutes parts, la compriment, l'amincissent en certains endroits, tandis qu'en quelques autres elle se solidifie et devient elle-même osseuse. La mâchoire inférieure nous a offert les mêmes particularités. La portion rachidienne pousse des éminences, puis sert aussi de soutient à des points, des croûtes osseuses qui finissent par l'envahir de tous côtés, l'étouffer, pour ainsi dire, et en prendre la place. Nous avons vu se montrer et croître les membres, leurs cartilages se solidifier presque tout d'un coup à la surface, par degrés plus lents dans leur centre; en sorte que, même pour les os longs, nous avons retrouvé cette tendance à l'ossification de la plus extrême superficie des cartilages primitifs, qui paraît être propre aux Batraciens anoures, ou qui, du moins, n'a pas lieu chez les mammifères ni les oiseaux, mais qu'on peut soupçonner chez certains poissons osseux.

Si des parties d'abord continues se sont séparées, pour ainsi dire sous nos yeux, d'autres d'abord séparées, se sont

réunies au contraire, et se sont même confondues ensemble, telles les diverses pièces de l'hyoïde et de la mâchoire inférieure. D'autres ont seulement changé de forme et de dimensions ou de position, telle la portion tympanique du cartilage cranio-facial ; mais d'autres aussi ont totalement disparu par ramollissement, atrophie, résorption, comme à la mâchoire supérieure, aux branchies, à la queue, sous le rachis.

D'où il faut conclure, 1° que les changemens qui s'observent entre le tétard et l'animal parfait ne sont pas de simples épanouissemens ou des réductions de parties identiques chez l'un et chez l'autre, mais qu'il y a évidemment destruction de quelques-unes, formation de toutes pièces de beaucoup d'autres; 2° que toutefois un certain nombre de ces changemens ne consiste aussi que dans des conditions nouvelles, de forme, de position et d'usage. En un mot ces métamorphoses nous prouvent la réalité et la coexistence de deux modes qui ont eu et ont encore leurs partisans exclusifs, comme si l'une était incompatible avec l'autre, l'*évolution* et l'*épigénèse*.

CHAPITRE IV.

DES MUSCLES A L'ÉTAT ADULTE.

§ I^er^.

Généralités. — Poches sous-cutanées.

Les muscles de nos Batraciens ne diffèrent guère de ceux des vertébrés que par une rougeur moindre (si l'on excepte les crapauds), et une plus grande ténuité dans la trame celluleuse qui réunit les fibrilles et les faisceaux entre eux. Les aponévroses sont aussi fort minces, sou-

vent presque invisibles, lorsqu'elles sont appliquées sur d'autres muscles; les tendons sont rares, et le plus souvent la fibre musculaire semble fixée immédiatement sur le périoste; mais là où ces cordons existent, ils ne diffèrent point de ceux des autres vertébrés. Une particularité dès long-temps remarquée c'est l'isolement réciproque des muscles et de la peau, dû à l'absence du pannicule graisseux dont on trouve à peine quelques paquets autour du cou chez les sujets à grand embonpoint. Les différences énormes de volume qu'on observe entre les sujets bien nourris et les maigres, sont dues à l'augmentation ou à la diminution des muscles mêmes, dont les dimensions varient sous ce rapport de un à trois et peut-être davantage.

Il n'est pas vrai pourtant de dire que ces animaux soient libres dans leur peau comme dans une bourse, et que celle-ci n'ait d'adhérence avec son contenu qu'au pourtour des ouvertures extérieures. Le vide ou l'intervalle situé entre la peau et les muscles, ou plutôt leurs minces et transparentes aponévroses d'enveloppe, est au contraire divisé en poches nombreuses par des cloisons membraneuses très minces (Méry, *Collect. acad., part. franç.*, T. I, p. 114), et, en outre, dans certains endroits, au dos, par exemple, des filamens vasculaires et nerveux passent abondamment de l'une des surfaces à l'autre.

Les poches dont il vient d'être question contiennent souvent une humeur aqueuse fort abondante, et l'on peut, à plus juste titre que pour la vessie urinaire (1), malgré l'autorité de Townson, les regarder comme les réservoirs

(1) Quoiqu'en dise Townson, et d'autres après lui, la vessie peut très aisément recevoir l'urine sécrétée par les reins, soit que l'extrémité des urétères s'applique immédiatement à son orifice et y dépose directement le produit de la sécrétion, soit que, comme cela paraît être vrai chez les lé-

de l'humidité pompée par la peau, et destinée à prévenir la dessiccation de celle-ci quand l'animal est dans un lieu sec. Cette circonstance, non moins que leur constante et régulière disposition, leur donne une importance réelle, et mérite que nous en présentions ici au moins l'énumération et le nom, renvoyant pour des notions plus complètes aux figures (fig. 40, 41) sur lesquelles nous en avons tracé la délimitation.

Il y en a vingt-deux en tout; quatre impaires, savoir; la dorso-cranienne (1), la sous-maxillaire (2), la thoracique (3), l'abdomino-sus-palmaire (4); et neuf paires, savoir: la latérale (5), l'iliaque (6), la brachiale (7), la fémorale (8), la sus-fémorale (9), l'interfémorale (10), la jambière (11), la sus-plantaire (12), la plantaire (13).

C'est la grenouille verte ou commune qui nous a servi ici de type, comme elle nous en servira pour la myologie qui va suivre. Nous y exposerons seulement, en temps et lieux, les plus notables différences que présentent les autres Batraciens anoures. Nous pouvons dire ici, d'une manière générale, que ces différences seront surtout fournies par le genre *bufo;* la rainette, les sonneurs et accoucheurs se rapprochent davantage des grenouilles, mais quelquefois ils offrent des particularités de structure intermédiaires à celles des deux genres extrêmes.

Nous n'entrerons pas dans les détails d'une myologie complète, à moins qu'il ne s'offre quelque remarque qui se lie à notre objet principal, la *métamorphose;* le nombre considérable des muscles, qui sont surtout singulière-

---

zards, l'urine déposée continuellement dans le cloaque, y laisse la majeure partie de ses principes salins, et que la portion la plus pure et la plus limpide entre seule dans le vrai réservoir urinaire, situé au-dessous du rectum.

ment multipliés pour les mouvemens des doigts (1) motive suffisamment, sans doute, un laconisme auquel nos figures (fig. 42—48) suppléeront en grande partie.

§ II.

Muscles moteurs des Narines.

1. *Intermaxillaire;* rapproche les apophyses montantes des intermaxillaires, déprime leur partie horizontale, et ouvre la narine.

2. *Sus-maxillo-pré-nasal;* ouvre la narine. Chez le crapaud commun et le *B. fuscus*, il est confondu avec le précédent, dont les fibres croisées passent au-devant de l'apophyse montante de l'os intermaxillaire.

3. *Sus-maxillo-post-nasal;* ouvre la narine en tirant le bord postérieur.

4. *Sous-mentonnier,* transverse (Cuvier); rapproche les bords inférieurs des deux os dentaires, relève leur extrémité interne et par suite les os intermaxillaires; ferme ainsi les narines. Il est sous-cutané chez le crapaud, etc.

§ III.

Muscles moteurs des Paupières (2) *et de l'OEil.*

5. *Orbito-palpébral antérieur;* confondu en partie avec le choanoïde, élève la paupière inférieure avec le suivant.

---

(1) J'en compte seize, en tout ou en partie destinés aux cinq pièces du quatrième doigt du pied, y compris son métatarsien, qui jouit d'une grande mobilité.

(2) La supérieure, adhérente au globe, le suit dans ses mouvemens; l'inférieure seule a des mouvemens propres; toutefois son abaissement paraît entièrement dû à l'élasticité de son bord libre, qui, tendu sur la convexité du globe, durant l'élévation, glisse au-dessous quand les muscles

6. *Orbito-palpébral postérieur;* adhérent aussi au choanoïde ; mieux séparé chez le crapaud.

7. *Pré-sus-orbito-oculaire,* ou oblique supérieur ; rotateur de la cornée transparente.

8. *Post-orbito-sus-oculaire;* ou droit supérieur, élévateur de la cornée.

9. *Fronto-ptérygoïdien ;* élévateur membraniforme du globe de l'œil et de la paupière supérieure (1); analogue du voile du palais pour quelques anatomistes.

10. *Orbito-post-oculaire* ou choanoïde; environnant le nerf optique ; rétracteur ou abaisseur de l'œil.

11. *Pré-sous-orbito-oculaire,* ou oblique inférieur; rotateur de la cornée.

12. *Post-orbito-sous-oculaire,* ou droit inférieur; abaisseur de la cornée.

13. *Post-orbito-in-oculaire,* ou droit interne; dirige la cornée en avant.

14. *Post-orbito-ex-oculaire,* ou droit externe ; dirige la cornée en arrière.

§ IV.

Moteurs de l'Hyoïde.

15. *Sous-maxillaire,* ou sous-guttural ; mylo-hyoïdien (Townson, Cuvier, etc.); soulève l'hyoïde, le sternum et le plancher du gosier. Chez la rainette, ce muscle est sé-

---

cessent d'agir. Peut-être quelques fibres charnues verticales achèvent-elles cet abaissement : j'ai cru les voir chez le crapaud calamite. J'ajoute, en passant, que la portion transparente de cette paupière est bien réellement la clignotante ; son angle antérieur s'enfonce sous la paupière supérieure.

(1) Dans les crapauds, le muscle ne cache point, du côté du palais, la glande lacrymale, qui est grosse, jaunâtre, arrondie; il la cache dans la grenouille.

paré du suivant par un sac auquel il sert d'enveloppe, et qui communique avec la bouche par deux fentes situées sur les côtés de la langue. Ce sac est surtout considérable chez le mâle. Chez les crapauds, le muscle sous-maxillaire est divisé en deux portions, dont l'antérieure seule s'attache au cadre de la mâchoire inférieure, la postérieure aux cartilages styloïde et tympanique.

16. *Génio-hyoïdien;* tire l'hyoïde en avant. En arrière et en avant il est divisé en deux faisceaux, mais non sur la même ligne. Cette division est plus marquée chez le crapaud commun.

17. *Sterno* ou *xipho-hyoïdien*, tire l'hyoïde en arrière; se continue en dehors par une intersection aponévrotique avec le pubio-thoracique ou droit de l'abdomen; cette portion nous l'avons nommée ailleurs *muscle pubio-hyoïdien* (*Mém. sur la dégl. des Reptiles*).

18. *Interscapulo-hyoïdien*, ou *omo-hyoïdien;* tire l'hyoïde en arrière et de côté.

19. *Rupéo-cérato-hyoïdien;* analogue du stylo-hyoïdien et du stylo-glosse; relève l'hyoïde et le tire en arrière et de côté : chez le crapaud, il s'épanouit en partie dans le pharynx. On lui trouve aussi, de plus qu'à la grenouille, un transverso-pharyngien analogue du stylo-pharyngien des mammifères.

20, 21, 22. Trois *masto-hyoïdiens*, stylo-hyoïdiens de Townson, Cuvier et autres; élévateurs de l'hyoïde. Il n'y en a que deux chez le crapaud commun; analogues de la portion postérieure du digastrique des mammifères.

§ V.

Moteurs de la Langue.

23. *Génio-glosse;* tire la langue en avant, et la fait sortir de la bouche.

24. *Hyo-glosse;* tire la langue en arrière, la renverse, et la fait rentrer dans la bouche.

§ VI.

Moteurs du Larynx.

25. *Hyo-pré-glottique;* rétracteur et constricteur. Je ne l'ai pas vu chez le crapaud.

26. *Hyo-ex-glottique;* dilatateur.

27. *Hyo-post-glottique;* protracteur, constricteur.

§ VII.

Moteur de l'Anus.

28. *Sphincter;* constricteur; il est surtout considérable chez le crapaud; attaché par une languette charnue sous le bassin jusque vers les pubis. Cette languette est aponévrotique chez la grenouille; chez elle aussi ce cloaque est simplement entouré de fibres circulaires qui contiennent en haut le sphincter. Chez le crapaud cette couche, plus épaisse, tient d'une part au coccyx, de l'autre à la symphyse des ischions; c'est un véritable *ischio-coccygien.*

§ VIII.

Moteurs de la Mâchoire inférieure.

29. *Zygomato-maxillaire,* ou masseter; élévateur de la

mâchoire. Dans les crapauds, le faisceau interne de ce muscle naît du zygoma inférieur, c'est-à-dire, de l'osselet malléal.

30. *Sus-rupéo-temporo-coronoïdien;* temporal ou crotaphite. Élévateur.

31. *Pré-rupéo-ptérygo-maxillaire*, ou ptérygoïdien interne ; élévateur.

32. *Sus-occipito-dorso-angulaire;* abaisseur de la mâchoire.

Chez le crapaud, ce muscle n'a point cette large aponévrose qui, chez la grenouille, recouvre une partie du crâne et du dos (enlevée dans la figure); il s'attache principalement à l'occipital et au mastoïdien. On le donne généralement comme analogue du digastrique.

§ IX.

Moteurs de la Tête et du Rachis.

33—40. Masse des muscles *sur-spinaux*, divisible en huit faisceaux principaux : 1° *vertébro-sus-occipital;* 2° *transverso-spinaux*, au nombre de quatre; 3° *transverso-coccygien;* 4° *sacro-coccygien;* 5° *iléo-coccygien.* Les sept premiers constituent le lombo-costal, et le dernier l'ischio-coccygien de Cuvier. Ils représentent le sacro-lombaire, le long dorsal, le transversaire épineux, le complexus, le splénius de l'homme. — Extenseurs.

41, 42. *Ex-occipito-transversaire;* presque unique chez la grenouille; bien séparé chez le crapaud en deux portions, dont l'inférieure est le petit droit antérieur, la supérieure l'oblique supérieur de Cuvier; incline la tête.

43 — 50. *Intertransversaires;* au nombre de sept; courbent latéralement le rachis. Chez le crapaud, il y

a, encore, outre les apophyses transverses de la troisième et de la quatrième vertèbre, un autre muscle oblique; vestige d'intercostal.

51. *Transverso-iliaque*, ou carré des lombes; infléchit latéralement l'épine du dos comme les précédens.

§ X.

Moteurs de l'Abdomen.

52. *Pubio-thoracique*, droit de l'abomen; fléchit le tronc, resserre le ventre et la poitrine.

53. *Abdomino-guttural;* expansion du précédent; tend la peau du gosier; peaussier.

54. *Dorso-sous-abdominal*, oblique externe; resserre le ventre.

55. *Iléo-transverso-sous-sternal*, oblique interne; prolongé jusque derrière le cœur, en forme de *diaphragme;* constricteur du ventre, et, en cette qualité, expirateur, expulseur des matières fécales, de l'urine et des œufs.

56. *Pubio-dorso-cutané;* tenseur de la peau du dos; peaussier.

57. *Coccy-dorso-cutanés;* mêmes usages. Attachés tous deux au bourrelet latéral du dos; ils manquent aux crapauds ou existent à peine; peaussiers.

XI.

Moteurs de l'Épaule.

58. *Sus-occipito-adscapulaire;* élévateur et protracteur de l'épaule; extenseur de la tête; analogue de l'angulaire, selon Cuvier; partie antérieure du trapèze, selon Meckel et nous. Chez le crapaud il est doublé d'un faisceau plus profondément situé; rhomboïde de Meckel.

59. *Lombo-adscapulaire ;* élévateur, rétracteur de l'épaule ; rhomboïde de Cuvier ; partie postérieure du trapèze, selon nous.

Dans le crapaud, la portion qui naît des apophyses épineuses est tout-à-fait séparée de celle qui s'attache à l'apophyse transverse de la quatrième vertèbre.

60. *Sous-occipito-adscapulaire ;* protracteur et adducteur de l'épaule ; abaisseur de la tête ; analogue d'une partie du grand dentelé, selon Cuvier : c'est pour nous l'angulaire.

61. *Transverso-adscapulaire ;* rétracteur de l'épaule ; portion du grand dentelé (Cuvier), double chez le crapaud.

62. *Xipho-adscapulaire ;* abaisseur, rétracteur de l'épaule ; autre portion du grand dentelé ; fort large chez le crapaud.

63. *Transverso-interscapulaire ;* mêmes usages et même analogie que n° 61.

64. *Interscapulaire ;* ploie et affermit l'épaule, portion du sous-scapulaire.

65. *Scapulo-mastoïdien ;* incline la tête et tire l'épaule en dedans et en haut ; sterno-mastoïdien (Cuvier). Dans le crapaud un autre muscle, parti de la tête un peu en dedans de celui-ci, va plus profondément encore vers la face interne de l'épaule.

§ XII.

Moteurs du Bras.

66. *Lombo-huméral ;* adducteur, élévateur, grand dorsal ; très étroit chez le crapaud.

67. *Adscapulo-huméral ;* élévateur, représentant du

sous-épineux et du grand rond; composé de deux faisceaux chez le crapaud.

68. *Pré-sterno-scapulo-huméral;* abaisseur et adducteur; deltoïde et sur-épineux réunis.

69. *Abdomino-huméral;* abaisseur et adducteur; portion costale du grand pectoral (Meckel).

70. *Clavi-huméral;* abaisseur; portion claviculaire du grand pectoral.

71. *Sterno-huméral;* abaisseur, adducteur; portion sternale du grand pectoral. Chez le crapaud, entre celui-ci et le précédent, se trouve un faisceau attaché à l'os coracoïdien; courte portion du biceps.

72. *Sous-scapulo-huméral;* adducteur; sous-scapulaire (Meckel).

73. *Coraco-huméral;* adducteur. Outre ces muscles, je trouve chez le crapaud un faisceau xipho-huméral distinct du sterno-huméral sous lequel il est caché (petit pectoral), et un très petit scapulo-post-huméral, véritable analogue du petit rond (Klœtske).

§ XIII.

Moteurs de l'Avant-Bras.

74. *Pré-sterno-clavi-radial;* fléchisseur; donné pour l'analogue du biceps.

75. *Scapulo-bi-huméro-olécranien;* triceps, extenseur.

76. *Premier ex-huméro-radial;* fléchisseur; long supinateur.

77. *Deuxième ex-huméro-radial;* fléchisseur; second radial externe.

78. *Épicondylo-sus-radial;* élévateur, rotateur; court supinateur.

79. *Epitrochlo-sous-radial;* abaisseur, rotateur; rond pronateur.

80. *Épicondylo-cubital;* extenseur, rotateur, anconé.

81. *Épitrochlo-cubital;* extenseur; second anconé, selon Meckel.

§ XIV.

Moteurs du Carpe.

82. *Sus-huméro-carpien;* extenseur, incline aussi la main du côté du digitule; premier radial externe.

83. *Sous-huméro-carpien;* incline la main du côté du pouce; radial antérieur.

84. *Épitrochlo-carpien;* mêmes fonctions; cubital antérieur.

85. *Épicondylo-sous-carpien;* fléchisseur, incline la main du côté digitulien; cubital postérieur.

86. *Cubito-sous-carpien;* fléchisseur, incline un peu la main du côté pollicien; analogue du carré pronateur.

§ XV.

Moteurs du Métacarpe.

87. *Cubito-métacarpien;* déducteur du second doigt; analogue du long abducteur du pouce, dont les fonctions sont ici remplies par l'index.

88. *Sus-luno-métacarpien de l'index;* déducteur et extenseur; analogue de l'adducteur du pouce.

89. *Métacarpo-métacarpien de l'index;* adducteur; analogue de l'adducteur du pouce.

90. *Sous-carpo-métacarpien de l'index;* adducteur, court fléchisseur; analogue de l'opposant du pouce.

91. *Premier sous-carpo-métacarpien du digitule;* adducteur; analogue du troisième interosseux palmaire.

92. *Deuxième sous-carpo-métacarpien du digitule;* adducteur; analogue de l'opposant.

93. *Sous-pyro-pré-métacarpien du digitule;* déducteur, fléchisseur; premier analogue de l'adducteur.

94. *Sous-pyro-post-métacarpien du digitule;* déducteur; second analogue de l'adducteur.

§ XVI.

Moteurs des Phalanges.

95. *Huméro-sus-digital;* extenseur des trois derniers doigts; des phalanges, et même des phalangettes, par les languettes qu'il fixe sur les tendons des courts extenseurs; analogue de l'extenseur comme des doigts.

96. *Cubito-radio-sus-phalangien de l'index;* extenseur; analogue des extenseurs de l'index et du pouce.

97. *Sus-pyro-phalangien du médius;* extenseur; analogue des extenseurs propres.

98. *Sus-pyro-phalangien de l'annulaire;* même fonction, même analogie.

99. *Sus-pyro-phalangien du digitule;* même fonction, même analogie.

100. *Cubito-pollicien;* déducteur du pouce.

101. *Sous-carpo-pollicien;* adducteur; muscles rudimentaires comme ce doigt qu'ils ne peuvent guère mouvoir que conjointement avec le second métacarpien, puisqu'il est caché sous la même enveloppe cutanée.

102. *Tendini-phalangien de l'index;* fléchisseur.

103. *Sous-carpo-phalangien de l'index;* fléchisseur, analogue du court fléchisseur du pouce.

104 et 105. *Tendini-phalangiens du médius;* fléchisseurs et inclinateurs; lombricaux.

106 et 107. *Sous-carpo-phalangiens du médius;* fléchisseurs et inclinateurs; interosseux palmaires.

108 et 109. *Tendini-phalangiens de l'annulaire;* fléchisseurs et inclinateurs; lombricaux.

110 et 111. *Sous-carpo-phalangiens de l'annulaire;* fléchisseurs, inclinateurs; interosseux palmaires.

112. *Tendini-phalangien du digitule;* fléchisseur, inclinateur; lombrical.

113. *Sous-carpo-métacarpo-phalangien du digitule;* fléchisseur; analogue du court fléchisseur.

§ XVII.

Moteurs des Phalangines.

114. *Tendini-phalanginien de l'annulaire;* fléchisseur, lombrical.

115. *Phalango-phalanginien de l'annulaire;* fléchisseur; représentant une partie du fléchisseur profond.

116. *Tendini-phalanginien du digitule;* fléchisseur; lombrical.

117. *Phalango-phalanginien du digitule;* fléchisseur. *Voy.* n° 115.

§ XVIII.

Moteurs des Phalangettes.

118. *Épitrochlo-sous-phalangettien;* fléchisseur commun, analogue du fléchisseur superficiel; porte un os sésamoïde à l'origine de son tendon, c'est-à-dire au milieu de la paume de la main.

119. *Cubito-palmaire;* attaché au tendon du précédent

dont il aide l'action et corrige l'obliquité; analogue du palmaire cutané.

120. *Sus-luno-phalangettien de l'index;* extenseur; extenseur propre de l'indicateur.

121. *Sus-métacarpo-phalango-phalangettien de l'index;* extenseur; interosseux dorsal.

122. *Sus-luno-phalangettien du médius;* extenseur, inclinateur; analogue des extenseurs propres.

123. *Sus-métacarpo-phalangettien du médius;* accessoire au précédent; interosseux dorsal.

124. *Sus-pyro-phalangettien du médius;* extenseur, inclinateur; analogue des extenseurs propres.

125. *Sus-métacarpo-phalango-phalangettien du médius;* accessoire au précédent; interosseux dorsal.

126. *Sus-carpo-phalangettien de l'annulaire;* extenseur, inclinateur; interosseux dorsal.

127. *Sus-métacarpo-phalangettien de l'annulaire;* accessoire au précédent; interosseux dorsal.

128. *Sus-pyro-phalangettien de l'annulaire;* extenseur, inclinateur; analogue des extenseurs propres.

129. *Sus-métacarpo-phalango-phalangettien de l'annulaire;* accessoire au précédent; interosseux dorsal.

130. *Sus-métacarpo-phalangettien du digitule;* extenseur, inclinateur; interosseux dorsal.

131. *Sus-pyro-phalangettien du digitule;* extenseur, inclinateur; extenseur propre.

132. *Sus-métacarpo-phalango-phalangettien du digitule;* accessoire au précédent; interosseux dorsal. On remarquera que presque tous ces interosseux sont doubles, de même que les extenseurs propres sont très multipliés. De plus, les interosseux dorsaux ont, pour la plupart, leur tendon prolongé jusqu'à la phalangette.

133. *Sous-carpo-phalangettien de l'index;* fléchisseur

lombrical, ou analogue du long fléchisseur propre du pouce.

134. *Sous-carpo-phalangettien du médius;* même fonction, même analogie.

§ XIX.

Moteurs du Fémur.

135. *Ex-ilio-trochantérien;* rotateur, élévateur; attaché à un tubercule propre et distinct de l'épiphyse coxale ou tête du fémur; de même chez le crapaud; analogue du petit et du moyen fessier, ou du moyen seulement (Cuvier).

136. *Coccy-fémoral;* extenseur, élévateur, rotateur; analogue du pyramidal (Cuvier).

137. *Post-ilio-fémoral;* extenseur; analogue du grand fessier.

138. *Ischio-fémoral;* extenseur; analogue de l'obturateur interne.

139. *Ischio-pubi-fémoral;* environne et fortifie l'articulation coxo-fémorale; rotateur; analogue des carré, jumeaux et obturateur externe; obturateur externe de Cuvier.

140. *Intra-ilio-fémoral;* fléchisseur, rotateur; représentant de l'iliaque et des psoas; iliaque de Cuvier.

141. *Sous-ilio-fémoral;* fléchisseur; analogue du fascialata.

142--143. *Sous-ischio-pubi-fémoral;* rotateur, abaisseur; analogue des deux premiers adducteurs; ses deux faisceaux, entre lesquels passe une portion du demi-tendineux sont tout-à-fait séparés chez le crapaud.

144. *Sous-pubio-fémoral;* rotateur, abaisseur; analogue du pectiné, et peut-être du petit adducteur; pectiné de Cuvier.

§ XX.

Moteurs de la Jambe.

145, 146, 147. *Pelvi-fémoro-rotulien;* extenseur, analogue du triceps (Cuvier); composé de trois portions : une *sous-ilio-rotulienne*, analogue du droit antérieur; une *fémoro-rotulienne*, analogue du vaste interne et du crural; une *sus-ilio-rotulienne*, analogue du vaste externe; mieux et plus long-temps séparés chez le crapaud.

148. *Sus-ischio-poplité;* un peu fléchisseur de la jambe et même du tarse (1); extenseur de la cuisse; affermit l'articulation du genou; analogue du demi-aponévrotique (Cuvier).

149. *Ilio-péronien;* fléchisseur, analogue du biceps (Cuvier).

150. *Sous-ilio-tibial;* fléchisseur; analogue du couturier (Cuvier).

151. *Post-ischio-tibial superficiel;* fléchisseur. Chez le crapaud, il remonte en éventail jusque sous la peau du ventre, et a ses faisceaux croisés par d'autres, qu'on peut nommer *sous-ischio-abdominaux*; analogue du droit interne.

152. *Post-ischio-tibial profond;* mêmes fonctions; analogue du troisième, ou grand adducteur.

153. *Bis-ischio-tibial;* fléchisseur; analogue du demi-tendineux (Cuvier).

154. *Pré-fémoro-tibial;* extenseur; partie supérieure du

---

(1) En effet, il s'insère entre les deux condyles de l'os de la jambe, en pénétrant dans l'articulation par son côté interne, comme le n° 158 y pénètre par son côté externe. Leurs tendons sont unis l'un à l'autre autant qu'aux os; mais leur mobilité n'est pas grande.

jambier antérieur; descend jusque près de la malléole, chez le crapaud.

§ XXI.

Moteurs du Tarse.

155. *Ex-tibio-astragalien;* fléchisseur; partie inférieure du jambier antérieur; accessoire du jambier antérieur selon Cuvier; seul jambier antérieur, selon Meckel.

156. *Pré-fémoro-astragalien;* fléchisseur; partie externe seulement du jambier antérieur ici subdivisé en trois: c'est, avec le suivant, le jambier antérieur de Cuvier.

157. *Pré-fémoro-calcanien;* fléchisseur; né du même tendon que le précédent, avec lequel il est confondu vers le genou; premier péronier latéral; plus isolé dans le crapaud.

158. *Génio-péronéo-calcanien;* fléchisseur; deuxième péronier latéral; seul péronier, selon Cuvier et Meckel.

159. *Bi-fémoro-plantaire;* contient un sésamoïde dans son tendon avant son élargissement en aponévrose plantaire; extenseur; représentant les jumeaux.

160. *Cruro-astragalien;* extenseur; soléaire, jambier postérieur, selon Cuvier et Meckel.

161. *Péronéo-sus-astragalien;* fléchisseur, rotateur; analogue du péronier antérieur descendu au pied.

162. *Tibio-sous-astragalien;* extenseur; représentant du jambier postérieur, descendu au pied.

163. *Tibio-sous-tarsien;* extenseur du tarse et fléchisseur de l'ergot; analogue du long extenseur du pouce, descendu aussi.

164. *Calcanéo-scaphoïdien;* fléchisseur et adducteur de l'ergot; analogue de l'adducteur du pouce.

§ XXII.

Moteurs du Métatarse.

165. *Calcanéo-sus-métatarsien du digitule;* extenseur; portion du pédieux.

166. *Calcanéo-sus-métatarsien du pouce;* extenseur; portion du pédieux.

167. *Astragalo-ex-métatarsien du pouce;* déducteur; analogue d'une portion de l'adducteur.

168. *Ex-tarso-métatarsien du pouce;* adducteur de l'ergot ou déducteur du premier métatarsien; analogue du court fléchisseur.

169. *Calcanéo-ex-métatarsien du digitule;* abducteur.

170. *Premier intermétatarsien;* adducteur; analogue du transverse du métatarse.

171. *Deuxième intermétatarsien;* idem, idem.

172. *Troisième intermétatarsien;* idem, idem.

173. *Sous-tarso-métatarsien du deuxième doigt;* déducteur; répétition de l'abducteur oblique du pouce.

174. *Sous-calcanéo-métatarsien du médius;* mêmes usages, même détermination.

175, 176, 177. *Trois métatarso-métatarsiens* dont on ne voit qu'un seul dans nos figures; déducteurs; muscles propres aux Batraciens anoures.

§ XXIII.

Moteurs des Phalanges.

178. *Péronéo-sus-phalangien du quatrième doigt;* extenseur; rudiment du long extenseur commun.

179. *Calcanéo-sus-phalangien du quatrième doigt;* extenseur; pédieux.

180. *Calcanéo-sus-phalangien du digitule;* extenseur; portion du pédieux.

181. *Astragalo-sus-phalangien du médius;* extenseur; pédieux.

182. *Calcanéo-sus-phalangien du deuxième doigt;* idem, idem.

183. *Astragalo-sus-phalangien du deuxième doigt;* idem, idem.

184. *Métatarso-sus-phalangien du deuxième doigt;* extenseur, adducteur, interosseux.

185. *Tendini-sous-phalangien du pouce;* fléchisseur, lombrical.

186, 187. *Tendini-sous-phalangiens du deuxième doigt;* fléchisseurs, lombricaux.

188. *Tendini-phalangien du médius;* fléchisseur, lombrical.

189. *Tendini-phalangien du quatrième doigt;* idem, idem.

190. *Sous-tarso-ex-phalangien du digitule;* court fléchisseur.

191. *Sous-tarso-in-phalangien du digitule;* adducteur.

192. *Sous-tarso-métatarso-phalangien du pouce;* fléchisseur; adducteur, analogue de l'abducteur oblique chez l'homme.

193. *Sous-métatarso-phalangien du pouce;* fléchisseur interosseux plantaire.

194. Idem *du second doigt.* 195. Idem *du médius.* 196. Idem *du quatrième doigt.* 197. Idem *du digitule;* interosseux plantaire.

§ XXIV.

Moteurs des Phalangines.

198. *Sus-calcanéo-phalanginien du quatrième doigt;* extenseur; portion du pédieux.

199. *Sus-astragalo-phalanginien du médius;* idem.

200. *Tendini-sous-phalanginien du médius;* fléchisseur, lombrical.

201, 202. *Deux tendini-sous-phalanginiens du quatrième doigt;* fléchisseurs, lombricaux.

203. *Tendini-sous-phalanginiens du digitule;* idem, idem.

204, 205, 206. *Trois phalango-phalanginiens des trois derniers doigts;* fléchisseurs, muscles propres aux Batraciens anoures.

§ XXV.

Moteurs de la Phalangine du quatrième doigt.

207. *Premier tendini-sous-phalanginettien;* fléchisseur, lombrical.

208. *Deuxième tendini-sous-phalanginettien;* idem, idem.

209. *Phalangino-phalanginettien;* muscle propre aux Batraciens anoures.

§ XXVI.

Moteurs des Phalangettes.

210, 211. *Deux métatarso-sus-phalangettiens du digitule;* extenseurs; interosseux dorsaux.

212, 213. *Deux métatarso-sus-phalangettiens du quatrième doigt;* idem, idem.

214, 215. *Deux métatarso-sus-phalangettiens du médius;* idem, idem.

216. *Métatarso-sus-phalangettien du second doigt;* idem, idem.

217. *Astragalo-sus-phalangettien du second doigt;* extenseur; portion du pédieux.

218, 219. *Deux métatarso-sus-phalangettiens du pouce;* interosseux dorsaux.

220. *Péronéo-sous-phalangettien des trois derniers doigts;* fléchisseur; analogue du long fléchisseur commun descendu au pied.

221. *Tarso-sous-phalangettien des trois premiers doigts;* court fléchisseur commun.

CHAPITRE V.

DES MUSCLES DU TÉTARD.

§ Ier.

Généralités.

Il serait ici superflu et fastidieux de préciser, pour chaque période de la vie du tétard, les changemens du système musculaire qui se lient si intimement à ceux du squelette sur lequel nous nous sommes plus spécialement étendu. Encore moins passerons-nous en revue, et un à un, tous les muscles que nous venons de reconnaître à l'adulte pour remonter à leur origine, à moins que celle-ci ne présente quelque chose de remarquable; que les usages, la position, la forme, etc., ne soient bien différens chez le tétard et chez l'adulte : c'est ce qui a lieu

surtout pour les moteurs des lèvres, des mâchoires, de l'hyoïde, du rachis. Nous nous arrêterons, en temps opportun, sur ces diverses modifications, dont nous donnerons ici une idée générale en les rangeant sous trois chefs principaux, formation, atrophie, transmutation.

1° La formation, considérée relativement à son mode, nous entraînerait loin de notre sujet. L'état pulpeux des moignons qui annoncent les membres ne permet point d'y distinguer les muscles même des cartilages; et dire comment cette pulpe acquiert l'aspect fibreux et fasciculé qu'on trouve déjà autour des cartilages bien distincts quand les doigts ne sont encore que des festons arrondis de l'extrémité du membre, ce serait nous perdre en conjectures sans fondemens. Relativement à l'époque, ce que nous pouvons dire ici de général, c'est que les muscles rachidiens sont les premiers actifs formés. Avant l'éclosion et plusieurs jours après, le têtard reste long-temps dans une immobilité qu'interrompent seulement des mouvemens latéraux du tronc et de la queue, mouvemens vifs, mais d'abord peu fréquens, bientôt arrêtés après un déplacement, une natation de courte durée. La bouche, les branchies se meuvent dès la fin de la première période, et sans doute alors seulement se forment leurs muscles comme aussi le reste de leur appareil. Pour ceux des membres, nous venons de faire entendre qu'ils se forment dans le cours de la troisième.

2° L'atrophie qui frappe certains muscles, ceux de la queue en particulier, se confond avec l'atrophie générale de la région à laquelle ils appartiennent; ils résistent plus long-temps toutefois que les expansions cutanées, et, bien que ramollis, fanés comme tout le reste, ils gardent encore leur apparence plus long-temps que les cartilages temporaires qui leur servaient de support.

3° Un semblable ramollissement m'a paru accompagner

les transformations qu'éprouvent d'autres muscles qui, existant également chez le tétard et l'adulte, diffèrent en dimensions, en relations chez l'un et chez l'autre. Je ne veux point parler ici de ceux qui, grandissant peu à peu, n'acquièrent de véritables fonctions que dans la dernière période de l'état de larve, et qui, par conséquent, prennent une consistance, une force graduellement croissantes, ceux des membres par exemple; mais seulement de ceux qui sont déjà vigoureux et actifs chez le tétard, qui même le sont plus proportionnellement qu'ils ne le seront par la suite. Cette remarque est importante pour la théorie des métamorphoses dont nous avons déjà parlé ailleurs; elle prouve qu'il ne faut point attribuer les changemens du squelette, tels que le raccourcissement de la tête, le reculement des mâchoires et de l'hyoïde, le raccourcissement de la queue, à l'action musculaire combinée au ramollissement des cartilages, puisque les muscles sont alors eux-mêmes affaiblis.

Nous ne chercherons pas davantage dans l'action des muscles peu à peu formés, la progression que suivent certaines portions des membres à mesure que leur accroissement s'opère; car la même cause qui fait naître le muscle dans une direction et dans une situation propres à tirer de de son côté l'os auquel il s'attache (exemple, l'épaule) peut bien aussi faire croître l'os dans la direction qui lui est propre. Cette cause désignée souvent sous le nom insignifiant de force formatrice, nous n'avions point à rechercher sa nature, nous nous sommes borné à en constater les effets.

§ II.

Moteurs des Lèvres.

Les lèvres festonnées et denticulées du têtard jouissent d'une mobilité notable et même d'une certaine force. La ténuité de leurs muscles les rend assez difficilement perceptibles ; cependant, en les comprimant entre deux lames de verre, sur des sujets conservés dans l'alcool, on peut observer les faisceaux les plus ténus, et il en est qui peuvent être reconnus par une dissection ordinaire.

Les premiers ou *rostro-labiaux* (fig. 81 ; *o*) sont des faisceaux minces et nombreux qui, nés de la surface des cartilages rostraux tout autour et tout près de leur enveloppe cornée, se rendent, dans une direction parallèle à l'axe du corps, et quelquefois obliquement, aux rangées de denticules que nous avons décrites ailleurs. Situés ainsi au pourtour de la bouche, ces petits muscles doivent attirer les lèvres vers ce centre, relever l'inférieure, abaisser la supérieure.

Les seconds, antagonistes de ceux-ci, constituent deux faisceaux assez gros attachés, chacun de son côté, à la partie la plus avancée du cartilage adrostral inférieur, et épanouis en éventail dans la commissure des lèvres, un peu dans la supérieure, et bien plus dans l'inférieure dont ils gagnent jusqu'à la partie moyenne. Ces muscles *adrostro-labiaux,* bien plus éloignés du centre que les précédens, tirent en arrière les lèvres et les écartent l'une de l'autre. Je n'ai point vu de fibres transversales dans l'épaisseur de ces organes.

Les transformations ultérieures se réduisent, pour les rostro-labiaux, à une atrophie concomitante de celle des lèvres ; mais les adrostro-labiaux ne m'ont point paru

être dans le même cas. Il m'a semblé qu'ils s'inclinaient de plus en plus vers la ligne médiane et en-dessous jusqu'à croiser leurs fibres ; je pense donc qu'ils survivent aux organes qu'ils étaient d'abord destinés à mouvoir et que par leur fusion, ils constituent, dans la quatrième période, le muscle *sous-mentonnier* (fig. 83, *p.* 4), muscle d'abord comme bilobé par un raphé évident, mais qui s'efface dès la cinquième période. Les attaches fixes de ce muscle chez l'adulte sont les mêmes que celles des deux adrostro-labiaux chez le tétard ; leurs fonctions sont un peu différentes, comme aussi leurs dispositions et les besoins de l'animal, dont la respiration surtout a changé si notablement. Aussi, les autres muscles destinés, comme le sous-mentonnier, à la respiration de l'adulte ne se forment-ils que dans la cinquième période, c'est-à-dire en même temps que les os intermaxillaires. Je n'en parlerai pas ici davantage à cause de leur nullité chez le tétard et du peu de changemens (en volume seulement) qu'ils éprouvent depuis leur origine première jusqu'à leur perfectionnement. J'en dirai autant des muscles de l'œil qui, caché sous une peau transparente, reste presque immobile jusqu'à la quatrième période. Ses muscles d'abord filiformes (troisième période) prennent peu à peu la consistance et la disposition de l'état adulte sans autre modification notable.

§ III.

Moteurs des Mâchoires.

Quoique les deux mâchoires soient mobiles, nous ne trouverons pas ici un plus grand nombre de muscles que chez l'adulte, parce que, comme nous l'avons déjà dit, l'une ne peut guère se mouvoir sans l'autre, l'inférieure

surtout ne peut s'abaisser sans élever la supérieure, qui est tout-à-fait dépourvue d'élévateurs propres.

Les muscles dont nous nous occupons ici sont au nombre de onze ; sept élévateurs et quatre abaisseurs.

A. Des premiers un seul est impair, c'est le *sous maxillaire* (fig. 80, 81 ; *q*), muscle en forme de croissant attaché aux cartilages adrostraux de la mâchoire inférieure par ses deux extrémités rétrécies ; élargi au milieu, convexe en arrière, concave en avant : lorsqu'il se contracte, il doit pousser dans ce dernier sens et relever le cartilage rostral et la lèvre inférieure. Peu à peu il semble s'amincir et s'élargir en même temps, et s'étendre jusque sous l'hyoïde à mesure que la mâchoire se porte en arrière ; et c'est ainsi que, dans la quatrième période (fig. 83, *q* ; 15), il constitue la portion antérieure du muscle sous-maxillaire ; cette portion distincte alors chez tous les Batraciens anoures, et qui reste même telle chez le crapaud et quelques autres

B. Les élévateurs pairs, au nombre de trois de chaque côté, sont évidemment les mêmes que chez l'adulte, mais différemment dirigés : ils sont ici sur une ligne presque horizontale, et ne prennent que dans la quatrième période cette direction verticale qu'ils garderont toujours. Leur longueur est aussi bien plus grande chez le tétard, puisque de la paroi postérieure de l'orbite ils s'étendent, logés dans la concavité de la lame ptérygo-tympanique, jusqu'aux angles de la bouche. Le plus élevé et le plus externe s'attache par un court tendon au cartilage adrostral inférieur tout près de son extrémité la plus avancée et en-dessus ; c'est le *masseter* futur (fig. 82 ; *r*). Celui qu'on découvre en enlevant celui-ci a aussi un tendon court, mais bifurqué ; la partie la plus épaisse s'attache à l'angle libre du cartilage rostral supérieur, l'autre plus mince s'attache près du précédent à l'adrostral inférieur ; il abaisse

donc le premier et élève en même temps le deuxième (*s*), c'est le *crotaphite* qui, par la suite, perdra son tendon supérieur, quand le cartilage auquel il s'attache commencera à se flétrir. Enfin le plus interne et le plus profondément situé, le *ptérygoïdien* (*t*), est pourvu d'un long tendon attaché à l'adrostral inférieur tout près de la facette articulaire qui l'unit au tympanique.

C. Parmi les abaisseurs doivent se compter le génio-hyoïdien dont nous parlerons plus loin (fig. 80, 81, 82; *u*), et l'analogue du *digastrique* ou *tympano-angulaire*. Celui-ci, quoique rudimentaire, si on le compare à ce qu'il est dans l'adulte, est cependant composé de plusieurs faisceaux qui, nés de l'apophyse orbitaire du cartilage cranio-facial et un peu de la branche styloïdienne, vont s'implanter sur le crochet de l'adrostral qui dépasse en arrière sa facette articulaire. A mesure que l'appareil maxillaire recule (quatrième période), ce muscle, d'abord très oblique, se redresse, s'élargit et prend enfin la position, la forme et les rapports que nous lui avons assignés.

§ IV.

Moteurs de l'Hyoïde, des Branchies, de la Langue et du Larynx.

A. Le premier qu'on aperçoit par la dissection ou même à travers la peau, sous forme d'une bandelette transversale (fig. 80, 81; *v*), est le *sous-hyoïdien* attaché à l'extrémité externe des deux branches styloïdiennes. Il soulève l'hyoïde, diminue la cavité de la bouche et sert ainsi à la déglutition de l'eau et des alimens. Dans la quatrième période, il s'élargit à son milieu; ses extrémités remontent avec la branche hyoïdienne jusque vers le rocher. Ce muscle constitue alors la deuxième portion du *sous-maxillaire* (fig. 83; *v*, 15), du moins chez les espèces où cette

seconde portion est distincte de l'antérieure, qu'elle touche sur la ligne médiane dès la fin de la quatrième période.

B. Le muscle *sous-branchial* (fig. 80, 81; x) est un assemblage très mince de fibres charnues, transverses mais courbes, nées de la région mastoïdienne du crâne, et doublant la peau qui forme le sac branchial. Leur ténuité les rend assez difficiles à bien observer. Le péricarde reste en partie libre entre les deux courbes que forme de chaque côté le bord libre de ce muscle : ses usages ne sont pas équivoques; chasser l'eau renfermée dans le sac branchial pour en faciliter le renouvellement et comprimer les branchies pour y activer la circulation. Aussi est-il presque continuellement en activité lorsque l'animal est tranquille. Chez l'adulte, il est moindre en surface, mais plus épais; il se confond avec le *sous-maxillaire* (fig. 83; x, 15) dont il représente la partie la plus reculée et adhérente au pli jugulaire de la peau. A la fin de la quatrième période on distingue très bien les trois portions dont nous avons successivement parlé (1) et la dernière offre encore les traces du trou branchial du côté gauche.

C. L'*orbito-hyoïdien* (fig. 80, 81; y), né de l'apophyse orbitaire du cartilage cranio-facial, se porte derrière l'extrémité des branches styloïdiennes; il doit les faire basculer en bas et en arrière, augmenter la concavité du plancher de la bouche et en agrandir la cavité. Ce muscle existe encore au commencement de la quatrième période, mais réduit dans la même proportion que l'apophyse à laquelle il s'attache. A la fin de cette période il disparaît en s'amincissant et laisse à nu le digastrique, qu'il avait jusque là en partie recouvert.

D. Le *génio-hyoïdien* (fig. 81, 84; z) ne diffère pas

(1) Nous les verrons distinctes, même chez l'adulte, pour les salamandres.

sensiblement de celui de l'adulte. Il est seulement plus mince et plus étroit même proportionnellement.

E. Le *cérato-branchial* (fig. 84), qui représente sans doute le *cérato-hyoïdien* de l'adulte, est ici un muscle étroit, mais assez fort, fixé d'une part au milieu de la branche styloïdienne, et d'autre part à l'arc branchial interne près de son origine. Il doit serrer les branchies l'une contre l'autre.

F. Le *sterno-hyoïdien* (fig. 84) produit l'effet opposé; car il adhère à peu près au même point du même arc, et là se trouve une intersection aponévrotique; les deux portions antérieure et postérieure réunies là à angle obtus doivent tirer l'arc au dedans. Comme chez l'adulte, ce muscle se continue en arrière avec le droit de l'abdomen, dont la bifurcation interne, au lieu de s'attacher au sternum qui manque, se fixe sur le péricarde.

G. En dehors du sterno-hyoïdien, sur la partie inférieure du diaphragme, prend naissance un muscle étranger à l'adulte, et qui, sans doute, s'atrophie avec les branchies. C'est le *précordio-branchial* (*w*) : allongé et triangulaire, il marche obliquement en haut et en dehors pour s'attacher vers la partie postérieure et supérieure de l'arc branchial interne. Il est abaisseur de l'appareil branchial, aussi bien que le sterno-hyoïdien.

H. *Masto-branchial* (*a*); né de la région mastoïdienne du crâne, ce muscle mince, large et membraneux, s'épanouit en descendant sur tout le côté externe postérieur de l'appareil branchial; une partie même est destinée au pharynx (1): antagoniste des précédens, il soulève cet appareil. C'est probablement lui qui forme par la suite les *masto-*

(1) Je trouve, pour le *B. fuscus*, un transverso-pharyngien dans la troisième période, comme chez l'adulte.

hyoïdiens, et une partie du *rupéo-stylo-hyoïdien*. Ceux-ci existent déjà au milieu de la quatrième période, c'est-à-dire quand les branchies sont fanées, mais pas encore détruites.

I. Quant à la langue, ce n'est dans la troisième période, qu'un petit pli transversal au bord antérieur de l'hyoïde. Là viennent se rendre les *génio-glosses* : l'*hyo-glosse* forme d'abord une petite tache blanche sous le basi-hyal ; cette masse se bifurque ensuite et se prolonge en arrière. Au milieu de la quatrième période il n'est encore arrivé qu'à la base des cornes thyroïdiennes ; la langue est pourtant déjà bien saillante ; ce qui indique assez que ce muscle s'allonge au moins aussi vite en avant. Au commencement de la cinquième période, déjà l'hyo-glosse occupe toute la longueur des cornes thyroïdiennes.

J. Le larynx, placé assez loin en arrière de l'hyoïde entre les deux appareils branchiaux, offre une sorte de sphincter qui représente les *hyo-pré* et *post-glottiques*. Quant aux *hyo-ex-glottiques*, ils sont bien distincts et plus longs que chez l'adulte ; mais c'est du milieu de l'arc branchial interne qu'ils prennent naissance.

§ V.

Moteurs de la Tête, du Rachis et de l'Abdomen.

Nulle partie du système musculaire ne semblerait, au premier abord, devoir éprouver de plus grands changemens que celle-ci, quand on considère isolément, et surtout sans avoir les objets sous les yeux, la disposition propre à l'animal parfait et celle du tétard. Rien cependant de plus simple que cette transformation.

On peut distinguer, de chaque côté, deux masses de muscles spinaux chez le tétard, séparées par les apophyses transverses des vertèbres au tronc, par un sillon à la

queue. L'une et l'autre sont comprimées et accolées à leur congénère; mais cet aplatissement est bien plus grand à la queue qu'au tronc, surtout à mesure qu'on porte ses observations plus en arrière. La masse supérieure est à la queue un peu moins étendue en hauteur que l'inférieure; au tronc c'est l'inférieure qui lui cède. Celle-ci même s'amincit rapidement sous les vertèbres proprement dites pour se terminer à la première en donnant à peine quelques faisceaux entre l'atlas et l'occipital. Ces masses sont composées de fibres presque longitudinales, ou parallèles à l'axe du corps, un peu inclinées ou obliques pourtant et fort courtes, parce qu'elles sont interrompues par de nombreuses intersections aponévrotiques. Ces intersections, toutes parallèles dans chaque masse, mais obliques dans deux sens opposés pour la supérieure et pour l'inférieure, tracent autant d'angles saillans en avant sur toute la longueur du tronc et de la queue. Au tronc, chaque intersection répond à une vertèbre réelle (fig. 80; *s*), à la queue, à des vertèbres fictives. Les masses musculaires dont nous parlons sont ainsi partagées en quarante-cinq chevrons à peu près, dont les plus antérieurs sont fort ouverts, les postérieurs de plus en plus inclinés jusqu'à ce que enfin les plus extrêmes soient fermés et leurs branches parallèles. Leur épaisseur, leur largeur suivent la même dégradation. Leur usage est évident, c'est d'exécuter tous les mouvemens de la natation par les inflexions variées, mais surtout latérales de la grande rame que constitue la queue. Ce sont, sans équivoque et sans incertitude, de vrais *muscles de poisson,* et ne fût-ce que pour compléter l'analogie même de ceux-ci avec les vertébrés supérieurs, il est assez intéressant de voir comment ces masses se réduisent à l'état déjà décrit chez l'adulte.

Dans chaque chevron nous trouvons une multitude de

faisceaux parallèles et courts; arrêtés en quelques points (partie profonde) par les apophyses transverses; ce sont des *intertransversaires* tout faits, auxquels il faut joindre l'*ex-occipito-transversaire;* unis seulement à ceux qui les précèdent ou les suivent, par des intersections (qui deviennent ensuite plus étroites, plus serrées, moins régulières et moins complètes, effacées même presque partout chez les grenouilles, encore au nombre de six bien distinctes chez les crapauds), ils forment des faisceaux plus longs (partie superficielle) et mieux séparés latéralement; de là viennent les huit muscles *sur-spinaux* de l'adulte. Enfin, la masse inférieure, bientôt coupée par l'ilium, qui se forme entre ses faisceaux, se réduit un peu et constitue le carré des lombes ou *transverso-iliaque*. Quant à ce qui reste au-delà de l'ilium pour cette masse inférieure, au-delà du coccyx pour la supérieure, il se fait, comme dans le cartilage qui lui servait de tige, une atrophie et une résorption complète. Quelques faisceaux seulement constituent, chez le crapaud, le muscle ischio-coccygien et la languette inférieure du sphincter de l'anus.

J'ajouterai ici un mot seulement pour les muscles abdominaux (β). Le droit antérieur, dont il a déjà été question au paragraphe précédent, se montre, avec ses intersections au nombre de sept, y compris celle qui le réunit au sterno-hyoïdien, dès le commencement de la troisième période; pendant long-temps lui seul semble soutenir les parois du vaste abdomen des têtards; les obliques paraissent alors représentés par une toile cellulo-aponévrotique doublée par un péritoine de couleur noire; mais, avec beaucoup d'attention, on découvre, même dès lors, un plan excessivement mince de fibres obliques (γ), et en le déchirant avec la pointe d'une épingle, on en voit un autre oblique en sens opposé, le tout comme chez l'adulte; comme chez lui

aussi, ces plans se continuent avec le diaphragme qui sépare la cavité branchiale et le péricarde de l'abdomen.

§ VI.

Moteurs des Membres.

C'est ici surtout que de longs détails deviendraient fastidieux et sans intérêt. Dès le commencement de la troisième période (doigts représentés seulement par de petits tubercules), je vois déjà le muscle *scapulo-mastoïdien* (n° 65) bien développé : peut-être est-ce le premier apparent ; je vois aussi trois pectoraux appliqués sur le diaphragme avec les rudimens cartilagineux des clavicules. A la même époque, l'ilium est déjà fixé par des portions de la masse rachidienne qui lui tiennent lieu d'*ischio-coccygien* et d'*ilio-coccygien;* ce sont là, avec le droit antérieur de l'abdomen, ses premiers suspenseurs. Il est pourvu d'un *sous-ilio-fémoral* ou fessier, et la cuisse montre évidemment un *triceps* déjà gros, subdivisé même, et plusieurs autres masses musculaires dont les séparations sont peu distinctes. A la jambe, on voit bien nettement le *bi-fémoro-plantaire*.

Que ces muscles et tous les autres doivent leur origine à autant de faisceaux isolés, ou que des masses de fibres se partagent plus tard en paquets distincts pour les former, c'est ce qu'il est difficile de dire d'une manière générale. Le premier mode de formation est évident pour plusieurs de ceux que nous venons de nommer, le second est positif pour ceux du rachis, et l'application sans doute en pourrait être faite à bien d'autres. On peut du moins affirmer que tous les muscles ne se forment pas simultanément, mais apparaissent d'une manière successive et en rapport avec leur importance. Dès la fin de la troisième période, nous

avons reconnu, dans les membres, presque tous les muscles d'un certain volume que nous avions trouvés chez l'adulte, même les petits phalango-phalanginiens des troisième et quatrième doigts du pied.

Ainsi donc, en résumé, nous voyons que, pour ce qui concerne les muscles, non moins que pour ce qui est du squelette, l'état fétal ou de larve, quelque différent qu'il soit de l'état parfait, s'y rattache pourtant sans difficultés et par une série de transformations beaucoup moins extraordinaires qu'on n'aurait pu l'imaginer de prime abord.

DEUXIÈME PARTIE.

SALAMANDRES.

CHAPITRE PREMIER.

INTRODUCTION.

Parmi les Batraciens urodèles on ne trouve plus des transformations aussi étonnantes que chez les anoures; à peine, en passant de l'état de larve à l'état adulte, l'animal perd-il quelques appendices sans changer de forme et presque de structure : plusieurs même n'éprouvent aucune métamorphose et passent toute leur vie avec la disposition congénitale de leurs organes. Cette partie ne peut donc offrir autant d'intérêt, ni nécessiter autant de détails que la première; aussi sera-t-elle bien plus resserrée, et elle le sera même d'autant plus que bien des discussions d'anatomie philosophique qui pourraient s'appliquer aux urodèles deviendraient ici inutiles, ayant été déjà débattues pour les Batraciens anoures. J'ai d'ailleurs examiné un moins grand nombre d'espèces de Salamandres que d'anoures : une seule même, la Salamandre marbrée, en raison de sa grande taille et de la facilité que j'ai eue de me la procurer à ses divers âges, a fait presque tous les frais de ce travail. J'ai vérifié seulement et comparé les détails douteux, ou qui pouvaient offrir quelque différence sur la Salamandre palmipède, très commune presque partout, et sur la Salamandre terrestre, dont je dois plusieurs échantillons, tant d'adultes que de tétards, à l'obligeance de M. Gachet, secrétaire de la Société Linnéenne de Bordeaux.

Cette espèce, en effet, ne se trouve point dans nos environs, et je crois que dans tout le midi de la France, elle ne se rencontre qu'à des hauteurs qui compensent ce que la latitude produit d'élévation dans la température. C'est ainsi qu'elle habite les Pyrénées, les Cévennes, etc. La Salamandre crêtée, qui paraît être ailleurs la plus commune, est ici fort rare, et les autres espèces adoptées par certains naturalistes, rejetées par plusieurs, nous manquent tout-à-fait.

N'ayant presque rien à ajouter à ce que l'on sait sur les Batraciens urodèles dont j'ai pu disposer, je n'en ferai point ici, comme pour les anoures, un examen comparatif. J'insisterai seulement sur la confusion que pourrait jeter dans leur histoire naturelle une observation imparfaite de M. Latreille. Ce savant zoologiste a trouvé la *S. exigua* de Laurenti dans un lieu où abondait la *S. marmorata*, et il a conclu de cette circonstance que ces deux espèces étaient identiques et ne différaient que par l'âge. Nous avons eu des Salamandres marbrées de tous les âges, et leurs couleurs, si caractéristiques, se montrent, avec toute leur vivacité, dès la métamorphose, et même se font apercevoir un peu avant; jamais elles ne ressemblent à la *S. exigua* : celle-ci, au contraire, ressemble beaucoup à la Salamandre palmipède femelle, et en conservant, même des mâles, hors le temps des amours, on voit, lorsqu'ils ont perdu leurs crêtes et leurs membranes digitales, lorsqu'un long séjour à terre a bruni leurs couleurs, qu'elles sont absolument les mêmes que celles de l'*exigua*, comme la forme (queue étroite, etc.) est aussi pareille. C'est donc avec quelque raison que Rusconi a figuré la Salamandre palmipède sous le nom de *petite Salamandre*.

CHAPITRE II.

DU SQUELETTE CHEZ L'ADULTE.

§ Ier.

De la Tête.

A. Dans son ensemble, la tête des Salamandres (fig. 85—88), de la Salamandre marbrée, par exemple, offre moins d'aplatissement et d'élargissement que celle des Batraciens anoures. Le cadre des orbites n'est complet qu'à l'état frais, et seulement à l'aide de ligamens et de cartilages fort minces. Le zygoma inférieur n'est pas autre chose qu'un ligament; le supérieur n'est pas plus complet que chez les crapauds. La fosse zygomatique est à découvert; la temporale constitue presque la moitié postérieure de l'aile orbitaire; la sus-occipitale est aussi fort grande; la tympanique, ou sous-mastoïdienne, est plus séparée des organes de l'audition que dans les Batraciens anoures. Les narines antérieures sont plus avancées et entourées d'os immobiles; les postérieures s'ouvrent à la paroi antérieure de l'orbite; et un petit canal lacrymal se voit au-dessus de chacune d'elles.

Le nombre des os qui entrent dans la composition de la tête, y compris les portions cartilagineuses qui les représentent, est de trente-quatre; seize pairs et deux impairs, en y comprenant les pièces destinées à la mâchoire inférieure. En voici la liste : 1° pariétaux, 2° frontaux, 3° frontaux-lacrymaux, 4° nasaux, 5° intermaxillaire, 6° maxillo-jugaux, 7° voméro-palatins, 8° ethmoïdes, 9° sphénoïde, 10° ingrassiaux ou ailes orbitaires, 11° ptérygoïdiens, 12° adgustaux ou ptérygoïdiens externes, 13° temporo-mastoïdiens, 14° tympaniques, 15° occipito-rupéaux, 16° étriers, 17° articulaires, 18° dentaires.

Les *pariétaux* (n° 1) couvrent, comme de coutume, une grande partie du crâne et de la fosse temporale; les *frontaux* (n° 2) offrent une épine qui représente nettement l'apophyse orbitaire externe, et indique ici la fusion du frontal principal et du frontal postérieur; les *fronto-lacrymaux* (n° 3), qui, chez la Salamandre terrestre, parviennent, entre le maxillaire et le nasal, jusqu'au bord de la narine, et justifient le nom que nous leur donnons, par les analogies que nous offrent les serpens dans leur os réputé tantôt frontal antérieur et tantôt lacrymal, par leur situation et par le canal lacrymal dont ils sont percés. Il ne peut s'élever aucun doute relativement aux *nasaux* (n° 4), ni à l'*intermaxillaire* (n° 5), simple chez les Salamandres aquatiques ou tritons, double chez la Salamandre terrestre; enfin ce que nous avons dit des *maxillo-jugaux* (n° 6) des Batraciens anoures est applicable à ceux des Batraciens urodèles.

Quant aux *vomero-palatins* (n^{os} 7, 7'), ces os armés de dents crochues, émaillées, complètes en un mot, et rangées sur une ligne légèrement courbe, ce n'est pas seulement leur situation, mais encore leur composition primordiale qui justifiera leur dénomination; la position respective des vomers et des palatins chez les Batraciens anoures, chez les serpens, les lézards mêmes, mais surtout chez la cécilie où les dents de l'un et de l'autre (fig. 93) sont en série continue, l'autorise aussi fortement.

L'*ethmoïde* (n° 8) est ici double, non pas membraneux comme le dit Cuvier, mais cartilagineux, et, à la vérité, fort mince. Il est formé d'une lame bien distincte de la membrane pituitaire qui la double partout; cette lame revêt exactement la paroi de la fosse nasale sans y former de repli notable.

Le corps du *sphénoïde* (n° 9) est large et plat; ses *ailes*

orbitaires (n° 10) forment un os distinct, qui remplace la portion cartilagineuse qui, chez les Batraciens anoures, s'étend comme ici du rupéo-ptéréal à l'ethmoïde. Cette aile, en effet, arrive jusqu'à la narine postérieure et touche là le cartilage ethmoïdal. Chez les Batraciens anoures, la rencontre se fait plus en arrière, et il en est de même chez la cécilie, qui possède à la fois l'ethmoïde osseux des Batraciens anoures et l'aile osseuse des Batraciens urodèles, mais en partie cartilagineuse et en plus grande partie soudée au corps du sphénoïde.

L'os *ptérygoïdien interne* ou ptérygoïdien vrai (n° 11) présente ici cette particularité, qu'il est fort éloigné du palatin. Cette circonstance s'expliquera en raison des changemens qu'apporte la métamorphose dans quelques os de la mâchoire supérieure. Il est aussi à remarquer qu'il ne touche point le corps du sphénoïde, bien qu'il ne soit pas mobile comme chez les serpens hétérodermes et les poissons. Du reste il a avec les os temporaux les mêmes rapports que chez les Batraciens anoures; de même que chez eux aussi, il loge, dans une gouttière de sa face interne, un cartilage fixé sur l'extrémité des os occipito-rupéaux. Ce cartilage, qui me paraît représenter l'*adgustal* (n° 12), c'est-à-dire l'os transverse ou *ptérygoïdien externe,* dépasse bientôt la pointe du ptérygoïdien proprement dit et s'avance jusqu'à l'extrémité postérieure du maxillo-jugal, dont la face interne le loge aussi comme chez les Batraciens anoures. Chez ces reptiles, nous avons supposé que la portion cartilagineuse qui fait suite à celle-ci, et qui la rattache à l'ethmoïde, était un lacrymal rudimentaire; ici nous voyons ce cartilage en connexion et même assez adhérent à l'os que nous avons nommé fronto-lacrymal, un peu aussi au voméro-palatin; bien plus nettement encore nous le trouvons continu à l'ethmoïde que nous venons de décrire. On voit par-là que

nos déterminations se donnent un mutuel appui. Le cartilage dont nous parlons n'a été aperçu qu'entre les deux sommets du ptérygoïdien et du maxillo-jugal; on l'a pris pour un ligament.

Il n'est pas difficile de reconnaître, même à la forme, mais surtout à la situation et aux connexions, le *temporo-mastoïdien* des Salamandres (n° 15), qu'on a qualifié tantôt de vrai tympanique (Cuvier), tantôt de portion supérieure de l'os carré (Meckel). Comme chez les Batraciens anoures il recouvre le vrai tympanique, mais il le couvre bien moins, et sous ce rapport il ressemble davantage au temporal du caméléon. Le pipa offre, à ce qu'il paraît, la même disposition. La portion mastoïdienne de cet os est plus considérable ici que chez la plupart des Batraciens anoures : sa portion zygomatique est tout-à-fait rudimentaire.

Le *tympanique* véritable (n° 14), qui n'a embarrassé Cuvier (*Oss. foss.*, T. V; 2e part., p. 417), que parce que le précédent avait été mal déterminé, est ici bien plus osseux que chez la plupart des Batraciens anoures, même le sonneur brun; il est pourtant toujours cartilagineux aussi à son insertion au rocher, insertion qui lui est commune avec le cartilage adgustal. Si ce que nous avons dit de cet os, dans notre première partie, avait laissé quelques doutes, ce qui existe chez les Salamandres doit les lever tous : l'identité est évidente, et ici l'on n'est même plus embarrassé par la présence trompeuse de l'osselet malléal; rien par conséquent ne motive plus le nom de *jugal* que Cuvier ne lui donne que par une analogie qu'il nous a été facile d'infirmer. L'osselet malléal est ici représenté, comme chez les serpens, par un ligament sous-zygomatique.

La soudure tardive des *occipitaux* et des *rupéaux* (n° 15) chez les anoures pouvait nous conduire à leur soudure hâtive chez les urodèles; et la réduction, l'état cartilagi-

neux des pièces sus et sous-occipitales, chez les premiers, nous préparaient, pour ainsi dire, à leur absence ou du moins à leur extrême réduction chez les seconds; de même la disparition de plusieurs osselets de l'ouïe chez les sonneurs nous a fourni déjà le modèle de ce qui existe chez les Salamandres; seulement la plaque cartilagineuse qui représente l'*étrier* (n° 16), ou une portion seulement de cet osselet, attachée aussi à des faisceaux charnus et robustes, est ici plus plate et plus mince.

Il ne nous reste plus qu'à dire un mot des deux os (fig. 87, 88, 94, 95) composant ici chaque branche de la mâchoire inférieure, comme chez la cécilie. Moins nombreuses chez l'adulte que celle des Batraciens anoures, elles représentent cependant les mêmes pièces; l'une confond ensemble l'*articulaire*, l'*angulaire*, l'*operculaire* et le *complémentaire* (n° 17 et *m*); le filet cartilagineux qui en part s'enfonce dans l'épaisseur de l'autre, qui correspond au *dentaire* et au *sur-angulaire* (n° 18 et *n*). Remarquons qu'ici il y a des dents (1) à la mâchoire inférieure, que le dentaire est considérable et qu'il est immobile aussi bien que l'intermaxillaire. Aussi n'a-t-il pas ici les mêmes usages que chez les Batraciens anoures. Les narines ne sont pas fermées par lui. Sans doute les côtes, quoique rudimentaires, aident assez à la respiration pour suppléer à l'absence de l'appareil valvulaire des Batraciens sans queue.

§ II.

De l'Hyoïde.

Bien différent de celui des Batraciens anoures (fig. 98,

(1) Ces dents sont toutes logées dans un sillon ou gouttière commune, de même que chez les lézards, et non chacune dans leur alvéole, comme le dit Rusconi, *Am. des Salam.*, p. 55.

99, 100, 113), l'appareil hyoïdien des Batraciens urodèles adultes représente, dans son ensemble, deux arcades concentriques entre elles et avec la mâchoire inférieure, plus une petite colonne médiane qui semble destinée à les réunir. Le nombre des pièces qui composent cet appareil varie selon les espèces ; il est de dix chez la Salamandre marbrée, de onze chez la palmipède, de douze chez la terrestre.

La première et la dernière manquent d'un *glosso-hyal* (*a*), ou pièce médiane et antérieure distincte; cette pièce est osseuse, et mobile sur la suivante, chez la palmipède (fig. 100). La pièce médiane principale ou *basi-hyal* (*b*), commune à toutes trois est osseuse et prismatique dans la majeure partie de son étendue, mais une portion amincie, qui en constitue l'extrémité postérieure (*b'*), reste toujours cartilagineuse et pourrait passer pour une pièce à part, si, chez la larve et dans le jeune âge, la continuité n'était pas évidente. Une troisième pièce médiane, séparée, éloignée même en arrière de celle dont il vient d'être parlé ne se retrouve que dans la Salamandre terrestre ; elle n'est soutenue que par les muscles sterno-hyoïdiens, entre lesquels elle est intercalée; c'est l'osselet thyroïdien de Sieboldt ; la larve nous apprendra que c'est vraiment une pièce hyoïdienne, et que nous pouvons la nommer *uro-hyal* (fig. 113 ; *c*).

Chez la Salamandre terrestre (*ibid.; d*) nous trouvons la partie antérieure du basi-hyal supportant, à droite et à gauche, deux paires de pièces cartilagineuses, raides, mais mobiles, et que personne ne paraît avoir découvertes jusqu'ici ; nous n'y pouvons voir autre chose que la pièce ou les pièces les plus internes du système hyo-styloïdien, c'est-à-dire les représentans de la *corne styloïdienne*, (apo-hyal et cérato-hyal de M Geoffroy). Chez les Salamandres aquatiques (fig. 98, 99, 100; *d*), il n'y a plus que deux de

ces pièces cartilagineuses, et elles sont réunies par une barre transversale faisant arcade au-dessus du basi-hyal, et constituant ainsi en réalité une pièce impaire, mais provenant d'élémens doubles, comme nous le verrons chez la larve.

Aux petites pièces cartilagineuses que nous venons de décrire font suite, sans leur adhérer, deux branches courbes ordinairement nommées cornes styloïdiennes, mais qui nous paraissent être évidemment des os *styloïdiens* (*e*) (stylo-hyal) pareils à ceux des mammifères. Peut-être leur portion antérieure, cartilagineuse chez les S. aquatiques, est-elle le représentant de la seconde pièce de la corne styloïdienne, dont une seulement fait partie de la barre impaire et transversale susdite. Au reste ces déterminations, à part la dernière, sont parfaitement en rapport avec ce que nous avons trouvé chez les Batraciens anoures et notamment dans l'hyoïde du sonneur brun à l'état adulte.

En arrière, le basi-hyal supporte deux paires de tiges recourbées en sens inverse, bien isolées, formées chacune d'une seule pièce chez la Salamandre terrestre adulte et réunies par leur bout sur une pièce osseuse commune qui en prolonge la longueur, chez les espèces aquatiques. Voilà l'analogue des *cornes postérieures* ou *thyroïdiennes* (*f*, *g*, *h*).

§ III.

Des Vertèbres et des Côtes.

On connaît assez la double apophyse transverse, la crête épineuse, le condyle antérieur de la plupart des vertèbres des Salamandres (fig. 101, 102); je ferai seulement remarquer que la grande différence signalée entre les Batraciens anoures et les Batraciens urodèles dont il s'agit ici, relativement à la position du condyle, a bien moins d'impor-

tance qu'on ne lui en a accordée, puisque nous avons vu que le sonneur pluvial ressemblait sous ce rapport aux Salamandres, et que toute la différence, quand il y en avait, ne consistait que dans le point d'adhésion d'un globule intervertébral. On voit effectivement fort bien, dans la Salamandre marbrée, que le condyle n'est qu'un globule soudé; un sillon profond semble, dans l'adulte même, l'isoler du corps de quelques vertèbres.

Si l'on veut dénommer, comparativement aux mammifères, les vertèbres des Salamandres, on ne pourra s'étayer que sur leur connexion avec les côtes, le bassin, ou sur la présence des apophyses épineuses inférieures. Voici ce qu'on observe chez la Salamandre marbrée. L'atlas est à proprement parler la seule vertèbre cervicale ou sans côte, puis viennent douze vertèbres dorsales ou portant des côtes (*a*), une lombaire, (*b*) le plus souvent sans côtes (une fois je l'en ai trouvée garnie), deux sacrées, dont la première (*c*) (quinzième à partir du crâne) porte une paire d'appendices costiformes auxquels est suspendu le bassin, et enfin trente-sept caudales ou coccygiennes (*d*) pourvues d'une lame épineuse inférieure. La première seule offre, au lieu de lame, une sorte de cornet, dont la concavité n'est représentée sur les autres que par un canal étroit. En somme, on compte cinquante-trois vertèbres à cette Salamandre. La palmipède n'en a que quarante-deux ; le bassin est suspendu à la quatorzième.

§ IV.

Du Sternum, de l'Épaule et du Membre antérieur.

Chez la plupart de nos Batraciens urodèles on ne trouve du sternum (fig. 103) que ce qu'en conservent les crapauds, c'est-à-dire un *xiphoïdien ;* encore est-il ici toujours car-

tilagineux, médiocre, irrégulier et de forme à peu près rhomboïdale. Pour la Salamandre terrestre seulement on trouve, dans l'intersection du muscle sterno-hyoïdien, c'est-à-dire immédiatement au-devant des épaules, un osselet ou cartilage en chevrons, très ouvert et transverse, que Meckel rapporte au sternum. Sieboldt, qui l'a décrit et figuré avec exactitude, lui donne le nom d'*osselet thyroïde* et nous l'avons déjà déterminé comme uro-hyal.

L'épaule proprement dite (fig. 104) ne se compose guère, du moins chez les Salamandres aquatiques ou tritons, que de trois pièces; l'une, intermédiaire aux deux autres, est osseuse et représente le *scapulum*, l'os *coracoïdien* et une partie de la *clavicule* ou *fourchette*, soudés ensemble. La majeure partie de cette dernière constitue la pièce cartilagineuse inférieure, et l'on y reconnaît aisément la clavicule de la plupart des Batraciens anoures; comme chez eux, celle d'un côté croise l'autre. Le cartilage supérieur n'est autre que *l'ad-scapulum*. Chez la Salamandre terrestre, l'ossification, en général plus tardive, est toujours bien moins complète que chez les aquatiques; à la seconde ou troisième année de la vie la clavicule et la coracoïde ne forment encore qu'un cartilage unique, large, membraniforme et à peine condensé au-dessous de la cavité glénoïde; l'omoplate est au contraire ossifiée de très bonne heure.

L'humérus (fig. 106; *a*) ressemble plus encore que chez les Batraciens anoures, à un fémur. Garni de ses épiphyses cartilagineuses, on lui voit une tête, un col, deux trochanters et deux condyles, dont l'un est, à la vérité, plus petit que l'autre.

Les deux os (*b*, *c*) de l'avant-bras ne se soudent point ici comme chez les Batraciens anoures. Les os du carpe sont au nombre de sept, disposés sur deux ou trois rangées, ou bien six autour d'un central, selon la manière dont on veut les

envisager. De quelque manière qu'on le fasse, celui du milieu au moins a perdu les connexions ordinaires, si l'on ne veut y voir le *pisiforme* (*d*); alors à son côté pollicien on trouverait un *scaphoïde* (*e*) touchant au radius; et un *trapèze* (*f*) sans pouce, intercalé entre celui-ci et le *trapézoïde* (*g*) portant les deux premiers doigts. Le troisième doigt serait supporté par l'analogue du *grand os* (*h*), le quatrième par celui de l'*unciforme* (*i*). Resterait un os volumineux articulé avec le radius et le cubitus à la fois; il représenterait le *semilunaire* et le *pyramidal* réunis (*j*). Il n'y a que quatre os métacarpiens et quatre doigts dont les deux premiers (index et médius) et le dernier (digitule) ont chacun deux phalanges; le troisième (annulaire) en a trois.

§ V.

Du Bassin et du Membre postérieur.

Suspendu à l'appendice costiforme de la première vertèbre sacrée, l'*ilium* (fig. 108; *a*) est dirigé en bas et supporte une plaque osseuse qui appartient à l'*ischion* et au *pubis* (*b*); un petit trou vers la partie antérieure et une portion cartilagineuse vers l'angle antérieur et externe de cette plaque (*c*), sont des vestiges de la duplicité de ses élémens. De plus, un cartilage en Y (*d*) attribué, bien peu rationnellement, ce nous semble, au sternum, par Meckel, constitue un vrai *marsupial* presque double. Ce bassin a quelque analogie avec celui du caméléon, suspendu de même au rachis et pourvu de deux cartilages marsupiaux. On peut aussi fort bien le comparer à celui des Batraciens anoures, en supposant leur ilium moins long et dirigé verticalement et leurs plaques ischio-pubiennes dédoublées; mais une analogie remarquable, en ce qu'elle confirme ce que nous avons dit au sujet de l'épaule des anoures; c'est

celle qu'offre, avec l'épaule du caméléon (fig. 110), le bassin des Salamandres. Sa longue omoplate est plus allongée encore que leur ilium ; elle rappellerait celui des grenouilles ; les deux clavicules furculaire et coracoïdienne sont soudées comme ici l'ischion et le pubis ; et un trou, une bordure cartilagineuse sont les seules traces de séparation entre les pièces primitives.

Je n'ai rien de particulier à dire du *fémur* (fig. 107 ; *a*), du *tibia* (*b*) avec sa rotule soudée en forme de crochet, du *péroné* (*c*) plat, large et courbe ; j'arrive au tarse, qui présente ceci de remarquable qu'il est composé de huit os ; c'est un de plus que chez les mammifères ; il semble que l'*astragale* (*dd'*) soit partagé en deux osselets, dont l'un (pollicien) est articulé avec le tibia et le premier cunéiforme, l'autre digitulien, avec le péroné, le *calcanéum* et le *scaphoïde* (*e,f*) ; celui-ci occupe le milieu du tarse et touche presque tous les autres. Le *cuboïde* (*g*) soutient les deux derniers doigts et une partie du médius ; les trois *cunéiformes* (*h, i, j*) supportent les autres. Il y a cinq métatarsiens et cinq doigts (1), dont trois (pouce, index et digitule) ont deux phalanges seulement ; il y en a trois aux deux autres.

CHAPITRE III.

DU SQUELETTE CHEZ LA LARVE.

§ Ier.

Généralités.

Il s'en faut de beaucoup que le tétard des Salamandres diffère autant de l'adulte que celui des Batraciens anoures,

(1) Par erreur du graveur, on n'en a représenté que quatre dans les figures de Cuvier (*Oss. foss.*).

si du moins on l'examine quelque temps après l'éclosion. L'appareil mandibulaire et l'hyoïdien nous offriront seuls quelques considérations intéressantes; mais pour les autres os de la tête, pour les vertèbres et les os des membres, donner un détail circonstancié de leur développement, de leur perfectionnement, ce serait, ou bien répéter en partie ce qui a été dit déjà, ou bien insister sur des minuties sans intérêt. Plusieurs observateurs, au nombre desquels je citerai surtout Rusconi (*Amours des Salamandres*), Funk (*Salam. terrestris, Hist. nat.*) Sieboldt (*De Salam. et tritonibus*), ont donné des notions curieuses sur l'évolution du fétus dans l'œuf et hors de l'œuf, soit chez les Salamandres aquatiques (Rusconi), soit chez les terrestres (Funk et Sieboldt). Ces derniers ont résolu bien positivement le problème de la reproduction chez la Salamandre terrestre; ils ont constaté qu'elle est bien vivipare, comme le faisaient présumer les remarques déjà publiées par Lacépède, et que ses têtards, pourvus de branchies comme ceux des tritons ou Salamandres aquatiques, vivaient ainsi d'abord dans l'oviduc maternel, puis dans l'eau où ils étaient déposés. M. Gachet a répété ces mêmes observations avec des détails plus étendus encore (*Mém. de la Soc. Linn. de Bordeaux*). J'ai voulu d'abord suivre, de cette manière, le développement de la Salamandre marbrée : j'ai recueilli, en grand nombre, les œufs déposés par les femelles dans un pli qu'elles font avec leurs pieds postérieurs aux feuilles des plantes submergées, comme l'a si bien vu Rusconi; mais ces œufs sont restés inféconds, et j'ai été réduit à examiner les larves de cette espèce ou de la palmipède, pêchées dans quelques mares ou ruisseaux abondans en plantes aquatiques. J'ai pu voir ainsi le petit animal pourvu seulement de deux membres antérieurs imparfaits et portant à

la tête deux appendices mobiles (crochets de Rusconi), (fig. 123), assez longs et qui disparaissent dès le deuxième ou le troisième jour. J'ai vu les doigts se développer après le bras et l'avant-bras, et du pouce au digitule; le membre postérieur apparaître sous la forme d'un moignon (fig. 124), lorsque la main était déjà complètement formée; puis un coude annoncer l'existence de la jambe et de la cuisse; puis enfin des crénelures montrer les premiers rudimens des doigts, qui s'allongeaient aussi par degrés du pouce vers le digitule.

J'ai remarqué que les membres, une fois bien formés, étaient fort longs et fort grêles pour la larve de la Salamandre marbrée (fig. 119); les doigts surtout s'étendent comme autant de fils déliés. Plus tard, quand approche l'époque de la métamorphose, ils prennent plus d'épaisseur et se raccourcissent proportionnellement. Cette métamorphose n'est marquée que 1° par une coloration analogue à celle de l'adulte, qui prend, sur toute la peau, la place de cette demi-transparence blanchâtre, verdâtre et pointillée de gris chez la Salamandre palmipède; de noir, et un peu tachetée de cette couleur sur la queue dans la Salamandre marbrée; 2° par la disparition des branchies, dont nous parlerons plus loin; 3° par le rétrécissement de la tête et l'agrandissement proportionnel de l'ouverture de la bouche; 4° par la diminution des membranes qui rendent la queue si large et si mince.

Jusque-là, à part les quatre membres, les larves de Salamandres (fig. 120, 121, 122) offraient avec les poissons plus de ressemblance que les têtards des Batraciens anoures; 1° leur tête aplatie, élargie, renfermant les arcs branchiaux; leur opercule membraneux, il est vrai, mais ouvert au dehors par une large fente et s'appuyant sur des épaules très avancées, formant même un angle aigu en

avant, une pointe continue aux pièces médianes de l'hyoïde et dans laquelle est renfermé le cœur ; 2° leur corps allongé, comprimé, musculeux, garni de larges membranes ou nageoires verticales comme celles du dos, de l'anus et de la queue des poissons ; 3° enfin deux poumons étroits, mais assez grands pour devenir analogues à la vessie natatoire ; voilà, avec des grands yeux à iris doré, avec cette teinte nacrée et resplendissante des aponévroses abdominales qui se montre à travers la peau, des ressemblances qui n'échappent même pas aux yeux des personnes étrangères à la science.

§ II.

Des Os de la Tête.

A. La cavité du crâne est déjà environnée d'une boîte osseuse mince et élastique chez des larves encore privées des membres postérieurs (fig. 89). Les *frontaux*, les *pariétaux*, les *ingrassiaux*, ou ailes orbitaires, et le *sphénoïde*, se forment en effet de très bonne heure, non sur un cartilage comme dans les Batraciens anoures, mais sur la dure-mère même. Le cartilage qui constitue d'abord les *occipito-rupéaux*, est creux, mince et de consistance cornée. J'ai pu séparer en deux chacun de ces derniers os dans les larves très jeunes ; mais je ne suis pas certain que ce soit sans rupture. Une ligne transverse, qu'on voit dans la transparence du sphénoïde, surtout chez le tétard de la Salamandre terrestre, m'avait fait croire d'abord à la séparation du sphénoïde antérieur et du postérieur ; mais je n'ai pu les séparer sans fracture, à quelque âge que je les aie examinés ; cette ligne n'est qu'un relief qui circonscrit la portion postérieure où se logent les occipito-rupéaux.

Une autre saillie longitudinale répond au petit espace que ces os laissent entre eux au-dessous du crâne.

Le *temporal* (n° 13) est aussi un des os les plus prompts à se pénétrer de phosphate de chaux ; le *tympanique* (n° 14), au contraire, reste long-temps cartilagineux. Ce dernier est plus incliné en avant que chez l'adulte, de sorte que la mâchoire inférieure est aussi proportionnellement plus courte, et que l'appareil branchial trouve plus d'espace sous le crâne.

B. L'*appareil mandibulaire supérieur* se compose d'os et de cartilages, savoir : l'intermaxillaire, le vomer, le palatin et le cartilage ptérygoïdien.

L'*intermaxillaire* (n° 5) est encore un des premiers os solidifiés ; il est ici fort grand et forme seul tout le bord antérieur du museau. Je ne l'ai jamais trouvé double chez la Salamandre marbrée et la Salamandre palmipède; mais peut-être n'ai-je pas assez insisté sur la recherche dans les très jeunes larves. Ce genre d'étude est, au reste, fort difficile et fort incertain dans ses résultats, tant à cause de la petite taille des animaux, que de la mollesse ou de la fragilité des organes en question.

Cet intermaxillaire déjà denté, est soutenu par un *ethmoïde* (n° 8) cartilagineux et mince; il est aussi appuyé sur les osselets suivans.

Le *vomer* (n° 7) est une lame horizontale de forme triangulaire, allongée, mousse en avant, courbée en dedans, osseuse, et couverte de petite dents ; un bord transversal l'unit au *palatin* (n° 7′) (1).

(1) C'est à tort que Rusconi, dont les observations et les figures sont d'ailleurs assez exactes, n'a cru voir là qu'un sillon sans mobilité. Peut-être la soudure avait-elle déjà en lieu chez les individus qu'il a disséqués. C'est à tort aussi qu'il dit les narines postérieures situées hors de la bouche ;

Celui-ci, également osseux et denticulé, plus petit et aussi triangulaire, est moins distinct chez les têtards de la Salamandre terrestre que chez nos deux espèces aquatiques; son bord externe et postérieur est continu au *cartilage ptérygoïdien* (n° 11) comme chez les poissons osseux, bien plus certainement que chez les reptiles sauriens ou ophidiens.

Ce cartilage, en effet, est peut-être moins un représentant du ptérygoïdien externe ou adgustal que du cartilage intermédiaire aux deux ptérygoïdiens; il paraît manquer chez la sirène qui n'a que des plaques vomériennes et palatines isolées. Il existe chez le protée et l'axolott. Quoiqu'il en soit, il vient du cartilage tympanique, alors fort adhérent lui-même, sinon continu aux os occipito-rupéaux; il est plat et assez large. Conjointement avec le palatin et le vomer il forme, en envisageant les deux côtés à la fois, une grande arcade allongée dont le vide est presque totalement rempli par le sphénoïde. Il reste pourtant, de chaque côté, un petit intervalle; l'œil est soutenu par cet appareil, et l'on ne peut y méconnaître l'analogue de la lame ptérygo-tympanique des Batraciens anoures ou mieux de la partie interne seulement, puisque, ici, le tympanique en est de prime abord séparé, et retenu en arrière.

C. Cet appareil, et notamment la lame ptérygo-vomérienne, subit aux approches et durant la métamorphose, les changemens suivans: 1° un *sus-maxillaire* d'abord petit et triangulaire, comme celui de la sirène, s'allongeant par degrés en arrière, s'applique sur le côté externe du cartilage ptérygoïdien et de l'ethmoïde. Dans le même temps,

---

elles s'ouvrent entre l'intermaxillaire et le vomer, en dedans même de l'extrémité externe du premier, beaucoup plus en avant par conséquent, et tout aussi en dedans que chez l'adulte.

sur ce dernier, se montrent aussi le *nasal* et le *lacrymal;* 2° un os *ptérygoïdien interne* ou vrai, de forme triangulaire se développe au côté interne et inférieur du cartilage du même nom; 3° ce qui reste de ce cartilage entre le ptérygoïdien et le sus-maxillaire se rétrécit de plus en plus en se détachant par degrés, et d'arrière en avant, de l'os palatin auquel il était continu d'abord (1); 4° ce palatin se porte en dedans, se rapproche de son congénère, s'applique sur le sphénoïde et commence à pousser en arrière cette longue queue qu'on lui connaît chez l'adulte; auparavant il s'est complètement soudé au vomer. Le voméro-palatin des très jeunes Salamandres à l'état parfait est en effet encore un peu écarté de celui du côté opposé; il est triangulaire, large, et son appendice postérieur n'est encore représenté que par un angle pointu. C'est aussi après la métamorphose que les dents, auparavant disséminées sur toute la surface de cet os complexe, se réduisent en une seule rangée.

D. La mâchoire inférieure devient très promptement osseuse. Elle est munie de dents dès les premiers temps qui suivent l'éclosion, et cette circonstance, jointe à sa consistance, à sa grandeur et à l'étendue proportionnelle de l'intermaxillaire, qui fait à lui seul la mâchoire supérieure proprement dite, concourt à faire de ces larves des animaux carnivores. Aussi se nourrissent-elles de daphnies et autres petits entomostracés, et de naïades qu'elles guettent et saisissent dans la vase; c'est pour cette raison qu'elles n'ont point cette énorme ventre et ces longs intestins nécessaires aux Batraciens anoures pour digérer les ali-

(1) Ici seulement les choses commencent à se passer autrement que chez les Batraciens anoures, puisque chez eux le cartilage reste en rapport avec le palatin, même chez l'adulte.

mens végétaux qu'ils coupent ou raclent avec leur bec corné et leurs mâchoires cartilagineuses.

Qu'il y ait un moment où la mâchoire inférieure des larves d'urodèles soit uniquement de cette consistance, c'est ce que l'analogie permet d'assurer; mais c'est durant le séjour que l'animal fait dans son œuf. Après l'éclosion on trouve, à chaque branche de l'appareil mandibulaire, quatre pièces, une cartilagineuse et trois osseuses.

La première (fig. 90, 91; *a*) la plus longue de toutes, fournit la facette articulaire et marche entre les autres pièces jusqu'à la symphyse, c'est clairement l'*articulaire* avec la tige cartilagineuse dont nous avons parlé avec plus d'étendue encore dans le précédent chapitre et dans la première partie de ce travail. La plus grande des trois autres est clairement le *dentaire* (*b*); celle qui vient ensuite pour les dimensions c'est l'*operculo-angulaire* (*c*) qui plus tard doit se souder à l'articulaire. Enfin la quatrième est un petit os armé de dents, placé en dedans et en-dessus, et qui ne peut correspondre qu'au *sur-angulaire* (*d*). Vers l'époque de la disparition des branchies il se soude au dentaire. C'est ainsi que ces quatre pièces se réduisent à deux dans l'adulte.

§ III.

De l'Hyoïde et des Branchies.

L'état de choses qui constitue la première période de la vie des têtards des Batraciens anoures est permanent chez ceux qui nous occupent ici (fig. 117, 119, 122); ces languettes rameuses, qui faisaient saillie sur les côtés du cou, qui se fanent bientôt pour faire place à des branchies en forme de houppe, appendues le long des arcs branchiaux et cachées sous la peau, ces languettes extérieures, dis-je, pourvues d'une double rangée de filamens, constituent le principal organe

respiratoire des larves des Salamandres. Aux arcs branchiaux sont simplement attachés des ailerons membraneux et très vasculeux, fort minces, fort étendus en surface et cachés par l'opercule musculo-cutané, dont il a été déjà question plus haut.

Les languettes penniformes au nombre de trois de chaque côté, ne contiennent que des vaisseaux revêtus d'une expansion fibro-cartilagineuse et cutanée; elles se continuent d'une part avec la peau de l'opercule; d'autre part elles semblent aussi adhérer, par leur base, à l'extrémité postérieure des trois arcs branchiaux les plus externes; c'est là le seul rapport qu'elles aient avec le squelette hyoïdien, qui doit ici particulièrement nous arrêter.

Ce squelette est encore plus complexe que celui de l'adulte, puisqu'il comprend un ensemble de dix-huit à dix-neuf pièces cartilagineuses, savoir : huit paires et deux ou trois impaires.

Cet appareil est exactement disposé de même chez les larves les plus jeunes et chez celles dont la métamorphose approche; la transparence de leurs parties permet de s'en assurer, sans dissection, chez des sujets à peine sortis de l'œuf.

A. J'ai parlé de deux ou trois pièces médianes, il en est une, en effet (*glosso-hyal*) (fig. 114; *a*), dont la consistance est si faible, qu'on peut révoquer en doute son existence comme cartilage; c'est la plus antérieure. Une saillie demi circulaire située au-devant des cornes styloïdiennes représente la langue à cet âge, et j'ai bien cru y voir une plaque mince, mais cartilagineuse, chez la larve de la Salamandre palmipède. Je n'y ai trouvé en réalité que du tissu cellulaire, et glanduleux chez celle de la Salamandre marbrée et de la Salamandre terrestre. La seconde pièce (*basi-hyal*) (*b*) est assez large mais épaisse; de forme

pentagonale, brusquement amincie vers son extrémité postérieure; c'est aux dépens de sa face inférieure qu'elle s'amincit, et le ressaut qui en résulte sert à l'articulation de la troisième pièce. Celle-ci (*uro-hyal*) (*c*) a été vue chez les Salamandres aquatiques, par Rusconi, lors de ses derniers travaux ; c'est un stylet allongé et pointu qu'environnent de toute part les fibres les plus internes des muscles sterno-hyoïdiens. Cette pièce disparaît totalement lors de la métamorphose. Il n'en est pas ainsi chez la Salamandre terrestre. Sieboldt n'a point reconnu, chez elle, cet uro-hyal, ou du moins il n'en a connu que l'extrémité la plus éloignée du basi-hyal : nous l'avons trouvé aussi long que chez les Salamandres aquatiques, mais bifurqué à son extrémité postérieure, et cette bifurcation, qu'a seule vue Sieboldt, est effectivement le rudiment futur de son osselet thyroïdien. Vers la métamorphose, la tige se détruit comme chez les espèces précédentes, mais la bifurcation persiste et s'étale ; de là le nom d'*uro-hyal* que nous lui avons donné chez l'adulte, nom tout-à-fait en rapport avec sa disposition et ses connexions primordiales. Cet osselet, qui ressemble fort bien à l'uro-hyal des poissons, existe aussi en permanence chez la sirène, et son extrémité est non-seulement bifurquée, mais étoilée (Cuvier, *Oss. foss.*, T. V, 2ᵉ p., pl. XXVII, fig. 7); il existe aussi chez l'axolott, où, d'après le même auteur, il est bifide.

B. Quant aux pièces latérales de l'appareil hyoïdien, elles sont, chez la larve, parfaitement semblables dans leur nombre, leur forme, leur position, chez les trois espèces qui nous occupent, bien que chez l'adulte la différence soit assez grande; particularité assez notable en ce qu'elle prouve tout-à-fait contre le système exclusif de l'évolution et en faveur de l'épigénèse, puisque, sur les

mêmes fondations, chaque animal se bâtit un édifice différent.

Les *branches antérieures*, ou plutôt les demi-arcades qu'on a improprement désignées sous le nom de *cornes*, sont ici composées chacune de deux pièces ; l'une, postérieure ou externe (*e*), grande, terminée en pointe et fixée par un ligament au rocher, derrière le tympanique, est la seule qu'on ait généralement connue. La seconde (*d*), omise dans la description et la figure de Rusconi, de Sieboldt, etc., est petite, large en dehors pour s'articuler avec la précédente, retrécie en dedans et attachée avec celle du côté opposé par un ligament transversal qui passe par-dessus le glosso-hyal ou l'extrémité antérieure du basi-hyal. Cette pièce interne est clairement, avec le ligament qui l'unit à sa congénère, le principe du cartilage transverse des Salamandres marbrée et palmipède, et des quatre rayons de la Salamandre terrestre. C'est donc aussi là véritablement la *corne styloïdienne*, et la grande pièce n'est plus que le stylo-hyal. Je n'ai pas bien suivi cette transformation ; mais mon opinion se fixe, 1° sur l'analogie des connexions de la corne susdite chez l'adulte et la larve ; 2° sur l'absence du cartilage transverse chez la larve, et de la pièce ci-dessus décrite chez l'adulte : car on ne peut prendre pour telle la portion cartilagineuse du stylo-hyal, toujours bien plus grande que la vraie corne styloïdienne de la larve, et qui est d'autant plus grande que l'animal est plus jeune (ce devrait être le contraire dans la supposition opposée) parce que l'ossification du stylo-hyal marche d'arrière en avant ; 3° enfin sur l'attache des muscles qui vient encore à l'appui de ma détermination ; car ceux qui, chez l'adulte, s'insèrent à l'extrémité antérieure du stylo-hyal, sont, chez la larve, fixés au bout de la pièce postérieure ou externe, et non de l'antérieure ou interne (*voyez* ci-après).

C. L'appareil branchial proprement dit comprend seulement six pièces de chaque côté ; car il n'existe rien de pareil aux osselets intercalaires figurés par Rusconi, et qui n'ont pu être que le résultat de quelque fracture.

De ces six pièces, les deux antérieures (*f*, *g*) se font aisément reconnaître pour celles qui composent, chez l'adulte, la *base* ou le *premier article de la corne thyroïdienne;* mais à leur extrémité postérieure se trouvent annexés quatre arceaux (*h*, *i*, *j*, *k*) armés de dents d'un côté seulement pour les deux extrêmes, des deux côtés pour les intermédiaires. Ces dents, comme l'observe Sieboldt, n'y adhèrent qu'à l'aide de la membrane qui les recouvre ; elles doivent donc aisément se détacher du cartilage lors de la métamorphose. A cette époque l'arc externe, le plus grand, celui qui seul est en connexion avec les deux pièces antérieures, subsiste et s'ossifie à partir de sa partie moyenne, en constituant l'*article postérieur de la corne thyroïdienne;* les autres se ramollissent, s'atrophient et disparaissent. Chez la Salamandre terrestre même, l'arceau externe se soude bientôt avec la pièce qui le porte, tandis que la pièce voisine reste écartée de toutes deux (fig. 113). C'est quand les branchies se fanent, quand l'opercule se ferme, que l'on voit les cartilages de la larve prendre la figure de ceux de l'adulte ; après ce changement de forme, l'ossification commence ; elle marche avec lenteur chez les Salamandres marbrée et terrestre ; et durant la première année, on reconnaît encore bien des traces de l'état fétal. L'ossification est au contraire bientôt complète chez la Salamandre palmipède, espèce bien plus petite.

Les changemens dont il vient d'être question, nous prouvent bien l'analogie des arcs branchiaux et des cornes thyroïdiennes. Ceux-là ne semblent pouvoir être considérés que comme une répétition de celles-ci, puisqu'un d'entre

eux reste tel, et que les autres se détruisent. Mais il est à remarquer que cette répétition se prononce davantage en arrière qu'en avant : l'article postérieur de cette corne se répète trois fois, l'antérieur une seule, et cette circonstance nous rappelle que le protée, du reste fort ressemblant à nos larves, n'a même qu'une pièce rudimentaire, une sorte d'appendice en place de la *columelle* de nos larves, appendice lié aux arcs branchiaux et non au basi-hyal, comme pour témoigner qu'il a plus d'affinité avec ces pièces, ailleurs provisoires et de répétition, qu'avec les pièces permanentes et fondamentales. D'après cela on peut, avec M. Duméril, appliquer la même détermination aux arcs branchiaux des poissons, soit qu'on veuille prendre le plus antérieur ou externe des arcs branchiaux pour la véritable corne, comme chez les larves des Salamandres, soit qu'on donne, pour cette identité, la préférence aux pharyngiens inférieurs (Cuvier) c'est-à-dire aux arcs les plus internes, comme cela a lieu, à peu de chose près, dans les larves de Batraciens anoures.

§ IV.

Des Vertèbres et des Membres.

Je réunis ici des sujets assez divers, mais sur lesquels j'ai trop peu de chose à dire pour les séparer en autant de paragraphes.

A. Les *vertèbres*, d'abord toutes cartilagineuses, m'ont paru, au contraire de ce qui a lieu chez les têtards d'anoures, être séparées ou *segmentées* au moins par des traces d'articulations futures, même dans la partie la plus mince de la queue, à toutes les époques ultérieures à celle de l'éclosion. Du reste leurs apophyses se développent et s'ossifient de même que chez les Batraciens anoures, et assez rapide-

ment ; de même aussi leurs condyles sont, durant la vie de larve, et peut-être pendant quelque temps après la métamorphose, des globules séparables, d'abord cartilagineux, puis ossifiés isolément, et qui ne se soudent que par extension de solidification, au corps de la vertèbre qui les suit.

B. Le *sternum*, ou mieux le xiphoïde, peut être à peine soupçonné, tant il est mince et membraniforme dans la larve ; il m'a paru plus symétrique que chez l'adulte.

C. L'épaule (fig. 105) offre à peu près la même forme que chez l'adulte ; toutefois le *scapulum*, qui s'ossifie le premier et vers l'approche de la métamorphose, est fort étroit ; l'*ad-scapulum* et le cartilage *claviculo-coracoïdien* fort larges. Ce dernier croise d'abord très peu celui du côté opposé ; il offre une *acromion* fort allongé ; deux groupes de granules osseux paraissent d'abord sur les bords antérieur et inférieur de la cavité glénoïde : c'est le seul moment où l'on puisse dire que les os de l'épaule sont distincts les uns des autres ; car à peine ont-ils pris un peu d'extension, qu'ils se confondent ensemble. Dans la Salamandre terrestre, l'ossification dépasse peu les limites de ce que vient de nous offrir la larve des espèces aquatiques.

D. Le bassin (fig. 111) est proportionnellement d'autant plus petit que l'animal est plus jeune : il offre d'abord beaucoup d'analogie avec l'épaule ; de même, en effet, une portion étroite et longue s'ossifie d'abord (assez long-temps avant la métamorphose) ; elle représente assez bien le scapulum, l'*ilium ;* derrière lui est une longue portion cartilagineuse qui rappelle l'ad-scapulum et s'attache à une côte comme chez l'adulte ; enfin une plaque, toute cartilagineuse d'abord, est analogue à celle que je nommais tout à l'heure *claviculo-coracoïdienne*. Cette plaque commence à s'ossifier en arrière, c'est-à-dire par l'*ischion ;* quand les

branchies tombent, il y en a déjà moitié de solidifiées (1) (fig. 112) : c'est d'arrière en avant que l'ossification continue, de sorte que le *pubis* n'a pas de point d'origine qui lui soit propre. Toutefois un petit trou sous-pubien se forme, chez l'adulte, quand l'ossification a envahi presque tout le cartilage. Le cartilage marsupial ne diffère de celui de l'adulte que par des branches un peu plus courtes et moins écartées.

E. Quant aux *os longs*, on peut distinguer leur forme assez semblable à celle de l'adulte, tout cartilagineux qu'ils sont, à travers la peau transparente des jeunes larves, dont les membres ont à peine acquis tout leur premier développement. Déjà à la chute des branchies, leur corps est ossifié. Le fémur, par exemple, n'offre plus alors de cartilagineux que son épiphyse tibiale ou ses condyles d'une part, sa tête et son col de l'autre.

CHAPITRE IV.

DES MUSCLES CHEZ L'ADULTE.

§ Ier.

Généralités.

Les muscles des Salamandres, ou pour parler avec plus de précision, de la Salamandre marbrée, que nous avons plus soigneusement disséquée, ces muscles, dis-je, sont bien moins nombreux que ceux des Batraciens anoures. Nous ne donnerons pas ici des descriptions plus détaillées

(1) C'est alors surtout qu'en appliquant l'une sur l'autre les deux plaques, on représente bien le bassin des Batraciens anoures dont le pubis reste longtemps cartilagineux.

que dans la première partie ; mais nous comparerons, autant que faire se pourra, à ceux de cette famille de Batraciens, les muscles de nos Salamandres.

Ici nous n'aurons pas même à indiquer les muscles des narines, et le sous-mentonnier, qui n'existent point. Ceux de l'œil sont (à part le choanoïde, qui manque, ou est à peine perceptible) exactement semblables à ceux des Batraciens anoures ; c'est-à-dire qu'il y a quatre muscles droits, deux obliques, un élévateur membraniforme et deux élévateurs de la paupière inférieure. Plusieurs de ces muscles, l'élévateur, par exemple, et l'oblique inférieur, sont assez difficiles à préparer, vu leur ténuité, et je les avais même d'abord méconnus ; j'ai rectifié plus tard cette erreur. Passons à des muscles (fig. 125, 126, 127) plus différenciés et plus en rapport avec notre objet principal, celui des changemens amenés par l'âge chez nos Batraciens urodèles.

§ II.

Moteurs de l'Hyoïde et de la Langue.

On en trouve ici moins qu'aux Batraciens anoures, et de moins robustes, pour ce qui concerne la langue presque immobile ; mais il n'en est pas ainsi des moteurs du gosier proprement dit : c'est par eux, comme plus superficiels d'ailleurs, que nous commencerons.

1. *Sous-maxillaire ;* analogue du mylo-hyoïdien (Sieboldt, etc.) (*Anoures,* n° 15) : élévateur.

2. *Temporo-guttural* (*An.*, portion du précédent) ; élévateur. *Constrictor pharyngis externus* (Sieboldt).

3. *Stylo-sous-hyoïdien* (*An.*, n° 19) ; analogue du stylo-hyoïdien ; élévateur ; *constrictor pharyngis internus* (Sieb.).

4. *Génio-sous-hyoïdien* (*An.*, n° 16), attaché à une

aponévrose post-hyoïdienne ou thoracique; protracteur de l'hyoïde ou plutôt abaisseur de la mâchoire. Génio-thyroïdien (Sieb.).

5. *Scapulo-post-hyoïdien* (*An.*, n° 18); attaché à l'aponévrose ou intersection commune post-hyoïdienne; rétracteur.

6. *Sterno-hyoïdien* (*An.*, n° 17); composé de deux portions bien distinctes; l'une, interne, vient du xiphoïde et s'attache à l'angle rentrant formé par la corne thyroïdienne et le basi-hyal; l'autre, externe, se continue par une intersection avec le muscle droit antérieur de l'abdomen, passe dans la fenêtre de la corne thyroïdienne, et va s'attacher au cartilage lingual que nous avons dit représenter la corne styloïdienne: il remplit ainsi la fonction ordinaire de l'hyoglosse. La première portion, selon Sieboldt, appartient au scapulo-hyoïdien; la seconde est pour lui un muscle particulier qu'il nomme *hebosteo-glossus* en y comprenant la portion abdominale à laquelle elle fait suite. Chacune de ces deux portions est divisée en travers, au niveau des muscles précédens, par une petite intersection aponévrotique; rétracteurs.

7. *Génio-glosse* (*An.*, n° 23), attaché en petite partie dans la langue, fixé en plus grande partie sur l'os styloïdien (*vulgò* corne antérieure). Sieboldt en fait trois muscles, un génio-glosse, un génio-hyoïdien postérieur et un antérieur. Peut-être en est-il ainsi chez la Salamandre terrestre; on peut croire aussi que le scalpel a été pour quelque chose dans cette division. Je n'ai rien vu de semblable sur le sujet, à la vérité fort jeune, que j'ai disséqué.

8. *Hyo-pré-styloïdien;* véritable analogue de l'hyo-glosse (*An.*, n° 24); fixé ici à l'extrémité antérieure du grand stylo-hyal, vu l'état rudimentaire de la langue; protracteur de l'hyoïde? *Cérato-glossus* (Sieboldt).

§ III.

Moteurs de la Mâchoire inférieure.

Je mentionnerai d'abord ici son abaisseur, le génio-sous-hyoïdien décrit plus haut (n° 4).

9. *Post-orbito-coronoïdien* (*An.*, n° 31); analogue du ptérygoïdien interne, muscle frontal de Funk; élévateur.

10. *Atloïdo-coronoïdien* (*An.*, n° 30); analogue du crotaphite (Funk, Sieboldt); élévateur.

11. *Pré-temporo-maxillaire* (*An.*, n° 29); masseter (Funk); élévateur.

12. *Temporo-angulaire* (*An.*, n° 32); digastrique; abaisseur.

§ IV.

Moteurs de la Tête et du Rachis.

13, 17. Masse des muscles *sus-vertébraux* (*An.*, n° 33, 40); composée de faisceaux obliques en nombre égal aux vertèbres et coupés par des intersections transversales en pareil nombre. Un gros paquet, né des fosses occipitales se rend obliquement aux apophyses épineuses des cinq ou six premières vertèbres; on peut l'appeler *sus-occipito-spinal* (13); c'est le trachélo-mastoïdien de Funk; les faisceaux suivans partent des apophyses transverses des vertèbres et un peu des côtes, pour aller à l'apophyse épineuse de vertèbres situées à pareille distance (5 ou 6); ce sont des *transversaires épineux* (14); un d'entre eux est l'*ilio-sus-caudal* (15) (15 *bis*, ilio-sous-caudal). Quelques faisceaux méritent le nom d'*interépineux* (16) et d'*intertransversaires* (17). A la queue leur obliquité se confond

presque avec celle des faces latérales de cette partie, en raison de la diminution graduelle de son épaisseur. De là leur apparence presque longitudinale.

18. Sous le muscle sous-occipito-spinal est caché un petit oblique de la tête ou *ex-occipito-atloïdien;* extenseur. C'est le muscle occipital de Funk.

19. La masse *sous-caudale* se compose aussi de faisceaux obliques qui, des apophyses transverses, marchent vers les os en V. Une ligne latérale, peu apparente au premier abord, sépare la masse sus-caudale de la sous-caudale.

20. Un muscle *ischio-coccygien* borde, de chaque côté, l'ouverture du cloaque (*An.*, n° 28).

21. Il y a un vrai droit antérieur de la tête ou *sous-occipital-vertébral;* fléchisseur.

22. Enfin un fléchisseur latéral, analogue du scalène, est un large *costo-ex-occipital.*

§ V.

Moteurs des Côtes et de l'Abdomen.

23. De l'extrémité libre de presque toutes les côtes part un faisceau épanoui en éventail, et qui, par sa réunion aux autres, forme le muscle oblique externe ou *costo-abdominal* (*An.*, n° 54).

24. Sous lui se trouve une longue bande longitudinale; c'est le muscle droit ou *pubio-sous-sternal* (*An.*, n° 52). Il se continue en avant, d'une part avec le grand pectoral, et de l'autre avec le sterno-hyoïdien : cette dernière portion est l'hébosteo-glossus de Sieboldt; la première naît en partie du cartilage marsupial. Chez la Salamandre palmipède elle ne se confond point avec le grand pectoral et se fixe au xiphoïde.

25. Un *pubio-marsupial* remplace ici peut-être le py-

ramidal de l'homme (Meckel); il est bien distinct du précédent.

26. L'oblique interne, ou *vertébro-abdominal* (*An.*, n° 55), est le plus profond de tous. Ses fibres sont, comme de coutume, dirigées en sens inverse de celles de l'oblique externe; en arrière elles sont transversales, ce qui ne suffit pas pour faire admettre ici, avec Funk, un muscle transverse, puisque lui-même convient qu'il n'y a que deux couches de fibres aux parois abdominales.

27. Entre les côtes se trouvent de véritables *intercostaux* (*An.*, n^{os} 43—50), faisant suite aux intertransversaires.

§ VI.

Moteurs de l'Épaule.

28. *Spini-sus-scapulaire;* élévateur; portion du trapèze (*An.*, n° 59).

29. *Costo-sous-scapulaire,* ou grand dentelé; adducteur, rétracteur (*An.*, n° 61, 62, 63).

30. *Masto-sus-acromial* ou sterno-mastoïdien, protracteur (*An.*, n° 65).

31. *Ex-occipito-sus-scapulaire;* portion du trapèze; protracteur (*An.*, n° 58).

32. *Sous-occipito-adscapulaire;* angulaire; protracteur, abaisseur (*An.*, n° 60).

§ VII.

Moteurs du Bras.

33. *Vertébro-costo-huméral;* grand dorsal; élévateur, adducteur (*An.*, n° 66).

34. *Abdomino-coraco-huméral;* portion du grand pectoral; confondu avec le droit de l'abdomen; adducteur, abaisseur (*An.*, n° 69).

35. *Clavi-huméral;* portion du grand pectoral; mêmes fonctions (*An.*, n^os^ 70, 71).

36. *Acromio-huméral;* deltoïde; abducteur (*An.*, n° 68).

37. *Adscapulo-huméral;* sous-épineux; élévateur, abducteur (*An.*, n° 67).

38. *Sous-scapulo-huméral;* sous-scapulaire; abducteur (*An.*, n° 72).

39. *Coraco-huméral;* adducteur, abaisseur (*An.*, n° 73.)

§ VIII.

Moteurs de l'Avant-Bras.

40. *Scapulo-huméro-olécranien;* triceps; extenseur (*An.*, n° 75).

41. *Huméro-radial;* biceps; fléchisseur (*An.*, n° 74).

42. *Sus-épitrochlo-radial;* rond pronateur (*An.*, n° 79).

43. *Épitrochlo-cubital;* cubital antérieur; supinateur (*An.*, n° 84.)

44. *Sus-épicondylo-radial;* long supinateur (*An.*, n° 76).

45. *Épicondylo-cubital;* cubital postérieur; extenseur, pronateur (*An.*, n^os^ 80, 81, 85).

§ IX.

Moteurs de la Main et des Doigts.

46. *Épicondylo-carpien;* analogue des radiaux externes (*An.*, n° 77; 82); portion du suivant; extenseur; adducteur du carpe.

47. *Épicondylo-digital;* ou extenseur commun des trois derniers doigts (*An.*, n° 95); ses faisceaux charnus se

continuent avec des courts fléchisseurs ou *interosseux-dorsaux*, en nombre égal à celui des trois derniers doigts.

48. *Cubito-sus-pollicien*, ou extenseur propre du pouce.

49. *Épitrochlo-digital*, ou fléchisseur commun de la main et des doigts (*An.*, n° 118); il se termine par une aponévrose adhérente aux tendons du suivant.

50. *Cubito-digital*, ou fléchisseur profond, confondu avec les lombricaux et interosseux palmaires, peu distincts, doubles pour chaque doigt. Il y a un court adducteur spécial du premier doigt. Le quatrième doigt a aussi un abducteur très court, né du carpe et terminé vers sa première phalange ou à son métacarpien.

§ X.

Moteurs du Fémur.

51. *Coccy-sous-fémoral;* se perd dans une intersection du droit interne; adducteur.

52. *Intra-pelvi-fémoral;* iliaque (*An.*, n° 140); abducteur.

53. *Ex-pelvi-fémoral;* élévateur, représentant les fessiers et les muscles rotateurs de la cuisse (*An.*, n° 139, etc.).

54. *Coccy-sus-fémoral;* adducteur; pyramidal (*An.*, n° 136).

§ XI.

Moteurs de la Jambe.

55. *Sous-ischio-tibial;* droit interne; fléchisseur (*An.*, n° 151).

56. *Pubio-sous-tibial;* couturier; fléchisseur (*An.*, n° 150).

57. *Ilio-rotulien;* droit antérieur; extenseur (*An.*, n^os 145, 146, 147).

58. *Ilio-péronien;* longue portion du biceps (*An.*, n° 149); fléchisseur.

59. *Fémoro-péronien;* poplité, ou courte portion du biceps; fléchisseur, pronateur.

§ XII.

Moteurs du Pied et des Doigts.

60. *Ischio-plantaire;* seul représentant du soléaire et des gastrocnémiens (*An.*, n^os 159, 160); faisceau détaché du n° 55; fléchisseur.

61. *Tibio-sus-tarsien;* jambier antérieur; extenseur, supinateur (*An.*, n^os 154, 155, 156).

62. *Péronéo-sus-tarsien;* péronier antérieur; extenseur, pronateur (*An.*, n° 161).

63. *Long péronéo-sous-tarsien;* péronier latéral; supinateur, fléchisseur (*An.*, n^es 157, 158).

64. *Court péronéo-sous-tarsien;* jambier postérieur; fléchisseur, pronateur (*An.*, n° 162).

65. *Péronéo-sus-digital,* ou extenseur commun; confondu, comme à la main, avec divers extenseurs latéraux (*An.*, n° 178).

66. Il en est de même du fléchisseur commun ou *péronéo-sous-digital* (*An.*, n° 220).

CHAPITRE V.

DES MUSCLES CHEZ LA LARVE.

§ Ier.

Généralités.

Si nous avons cru pouvoir nous dispenser, pour les têtards des Batraciens anoures, d'une myologie complète, à plus forte raison serait-elle ici superflue. La larve des urodèles diffère si peu de l'animal parfait, qu'il faudrait répéter pour elle tout ce que nous venons d'exposer dans le chapitre précédent. Une fois les membres développés, leurs muscles sont ceux de l'adulte; et quant à ceux du tronc, la seule remarque qu'ils m'aient donné lieu de faire, c'est que leur aspect icthyologique, leur disposition en chevrons tout pareils pour la forme et la structure, à ceux que nous avons décrits pour les Batraciens qui nous ont occupés d'abord, sont bien plus décidés, plus réguliers qu'après la métamorphose; à la queue surtout les masses supérieures sont bien distinctes des inférieures; elles forment autant de chevrons qu'il y a de vertèbres, et ces vertèbres sont en nombre égal à celles de l'adulte. Toutefois les derniers articles du rachis sont tellement ténus, que leurs muscles (les cinq et six derniers chevrons) sont admis par nous plutôt sur la probabilité de leur existence que sur une observation claire et nette. Au-devant du membre inférieur, il n'existe plus que les masses supérieures, divisées en demi-chevrons; une couche épaisse, composée principalement par l'oblique externe et les intercostaux (dont le dernier tient lieu ici du carré des lombes), forme les branches inférieures des chevrons, comme chez les poissons à cavité abdominale un peu prolongée en arrière.

Du reste, c'est presque exclusivement à l'appareil hyoïdien (fig. 115, 118) que se trouvent quelques spécialités de myologie comme d'ostéologie, et nous nous y arrêterons d'autant plus volontiers que l'Académie paraît avoir eu surtout en vue cet appareil dans la question qu'elle a mise, à diverses reprises, au concours.

§ II.

Des Muscles de l'Appareil hyo-branchial.

1. *Sous-maxillaire,* ou mylo-hyoïdien ; mince, et à fibres obliques comme chez l'adulte; nulle différence notable ; élévateur.

2 et 3. Le *temporo-guttural* et le *stylo-sous-hyoïdien* de l'adulte sont, chez la larve de la Salamandre marbrée, réunis en un seul plan musculaire fort large, et qui occupe, avec le précédent, l'épaisseur de l'opercule. Il est donc séparé de l'hyoïde et de ses muscles par un intervalle communiquant librement avec l'eau extérieure, en un mot il constitue, comme chez les Batraciens anoures, le sac branchial. Lors de la métamorphose, sa portion postérieure se colle sous le thorax et se sépare graduellement de l'antérieure ; les fibres de la première se dirigent davantage en arrière, celles de la dernière en avant. Jusque là elles n'étaient distinctes que par leurs attaches profondes pour l'antérieure, superficielles pour la postérieure, qui semble greffée sur d'autres muscles dont il sera question plus loin.

Chez la larve de la Salamandre palmipède, je trouve le stylo-sous-hyoïdien et le tympano-guttural très bien séparés; mais il est à remarquer que, chez l'adulte de cette espèce, ces muscles sont bien mieux isolés que chez la Salamandre marbrée. Ils sont élévateurs, adducteurs et constricteurs des pièces branchiales.

4. Le *génio-sous-hyoïdien*, le *scapulo-post-hyoïdien* (5), tout mince qu'il est, et le *sterno-hyoïdien* (6), sont tout semblables à ceux de l'adulte; et avec de l'attention j'ai aussi découvert le *génio-glosse* (7), dans la larve de la Salamandre terrestre. Je ne l'avais pas vu dans celle des autres, peut-être faute de recherches suffisantes. Au reste il est alors étroit et presque réduit à la portion interne ou linguale; l'externe ou styloïdienne est rudimentaire. Enfin nous trouverons plus loin l'analogue du muscle *hyo-pré-styloïdien* ou hyo-glosse (8); mais, à ces muscles communs à l'état parfait et à l'état de larve, il faut en ajouter quelques autres tout-à-fait propres à celle-ci. Nous les désignerons par des lettres pour éviter toute confusion.

α. Cervico-branchial, branchio-mastoïdien de Sieboldt; muscle en éventail, à plusieurs faisceaux fixés ensemble à la naissance des aigrettes plumeuses ou branchifères; le premier de ces faisceaux est attaché à l'os temporo-mastoïdien, les autres derrière, sur les muscles du cou; élévateur, déducteur des aigrettes.

β. Masto-branchial; faisceau simple, assez fort, attaché à l'arc branchial externe et à l'os mastoïdien; élévateur, adducteur de l'appareil branchial.

γ. Angulo-branchial; muscle long, étroit; déducteur des appareils branchiaux. Il est parallèle et presque confondu avec un autre déducteur déjà mentionné, l'*hyo-pré-styloïdien* (8), qu'on pourrait nommer ici *pré-stylo-post-branchial, abductor arcuum branchialinus longus* (Sieboldt); de l'extrémité antérieure de la branche styloïdienne il va au bout du dernier arc branchial. Il ne change point de connexion dans l'adulte, mais il est alors recouvert par le *temporo-guttural*, qui, dans la larve, semble se fixer sur lui en en laissant une partie à découvert.

δ. Pré-stylo-pré-branchial; muscle piriforme et

tendineux; déducteur et protracteur des appareils branchiaux; c'est à l'origine de l'arc interne qu'il s'attache d'une part et à celle de la branche styloïdienne d'autre part. Sieboldt le fait naître du basi-hyal; c'est son *abductor arcuum branchialium brevis*.

ε. *Inter-branchial;* muscle à trois faisceaux qui, nés de l'arc le plus interne, se portent aux trois autres; c'est l'*abductor arcuum branchialium, sive musculus trifidus* de Sieboldt.

§ III.

Conclusions générales.

Nous venons de voir quelques muscles particuliers à la larve, et qui doivent s'atrophier, disparaître même totalement chez l'adulte ($\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$); nous en avons signalé d'autres qui prennent au contraire, chez l'adulte, un développement, ou même une existence propre et isolée qu'ils n'avaient pas chez la larve (2 et 3) nous avons dit que d'autres n'éprouvaient que quelques modifications dans leurs dimensions ou dans leur forme, et ce sont les mêmes modes de permutation que déjà nous avions reconnus pour le squelette. En effet, dans ces trois modes à la fois, *destruction, formation, modification,* et non dans un seul, consiste tout le mécanisme de la métamorphose. Il y a à la fois *épigénèse* et *évolution;* il y a simultanément formation *concentrique* et *excentrique;* il y a tantôt *unité primitive* ou fusion primordiale d'os qui en représentent plusieurs, tantôt *fusion secondaire* ou *soudure,* par les progrès de l'accroissement, de pièces originairement séparées, mais destinées à former plus tard un tout unique.

Ce n'est pas le désir de concilier des systèmes en apparence opposés qui nous a conduit à ces résultats; ce sont

les faits eux-mêmes qui ont prononcé, c'est l'observation qui a dicté nos assertions.

A ces conclusions directement applicables à la question proposée, nous en joindrons quelques autres relativement à la *théorie des analogues*, comme l'appelle M. Geoffroy Saint-Hilaire.

Nous avons pu ramener à des déterminations comparatives à peu près certaines la presque totalité des pièces osseuses et musculaires des Batraciens dont nous nous sommes occupé. Les connexions, les usages nous ont surtout servi pour ces déterminations : non que ces deux principes soient sans exception, mais parce que les exceptions sont rares pour ce qui les concerne, et, qu'au défaut de l'un, l'autre suffit d'ordinaire. Je dis au défaut de l'un, car le principe des connexions même n'est pas aussi exclusif qu'on l'a dit ; nous en avons la preuve, 1° dans le déplacement des pièces du sternum par les épaules réunies, de celles du tarse, par le rapprochement de deux de ses os allongés en quelque sorte aux dépens des autres, et du métatarse ; 2° dans l'attache de divers muscles (biceps, interosseux dorsaux, etc.), tous exemples pris des Batraciens anoures.

Pour ce qui est de la forme, de la grandeur, on sait qu'il ne faut y attacher presque aucune valeur en fait d'analogies ; le nombre lui-même varie singulièrement, et presque toujours les différences qu'il amène entre organes identiques peuvent être démasquées, expliquées en les assignant à l'un des cinq modes suivans : 1° dédoublement d'un organe ordinairement simple (astragale des Salamandres, divers faisceaux du pédieux) ; 2° répétition plus ou moins multiple d'un organe (cornes thyroïdiennes, phalanges, vertèbres, muscles courts fléchisseurs et extenseurs des doigts) ; 3° renforcement d'une portion d'organe dont le reste a dis-

paru (peaussier); 4° fusion d'organes ordinairement séparés (os fronto-pariétaux, pyro-lunaire, muscle deltoïde et sus-épineux); 5° avortement complet de quelque autre (pouce des Salamandres, etc.). La théorie des analogues ne reçoit aucune atteinte de toute différence de nombre qui tient à l'un de ces cinq modes; mais il faut bien avouer que quelquefois il y a formation d'organes surnuméraires et sans analogue valable ailleurs, tels, le muscle élévateur de l'œil, le sous-mentonnier, les intermétatarsiens, etc.: tant il est vrai qu'il y a peu de règles sans exception et que le meilleur moyen d'éviter l'erreur, c'est d'éviter la prévention et les idées systématiques poussées à l'extrême : *Medio tutissimus ibis.*

LISTES COMPARATIVES

DES PIÈCES OSSEUSES COMPOSANT LA TÊTE DES PRINCIPAUX TYPES D'ANIMAUX VERTÉBRÉS;

POUR SERVIR A L'INTELLIGENCE DU TEXTE.

1° *Liste générale de ces Pièces.*

1. Sus-occipital.
2. Basilaire.
3. Ex-occipital.
4. Interpariétal et vormiens-occipitaux.
5. Temporal.
6. Mastoïdien.
7. Rocher.
8. Tympanique.
9. Marteau ou malléal.
10. Enclume ou incéal.
11. Lenticulaire.
12. Étrier ou stapéal.
13. Adstapéal.
14. Crotaphal ou vormien sus-temporal.
15. Pariétal.
16. Frontal principal ou médian.
17. Frontal postérieur ou externe.
18. Frontal antérieur ou interne.
19. Sphénoïde antérieur.
20. Aile orbitaire.
21. Sphénoïde postérieur.
22. Aile temporale.
23. Ptérygoïdien.
24. Ethmoïde central, ou cribleux.
25. Ethmoïde latéral ou planum.
26. Lacrymal.
27. Palpébral.
28. Vomer.
29. Cornet.
30. Nasal.
31. Intermaxillaire.
32. Sus-maxillaire.
33. Adgustal, ou ptérygoïdien externe.
34. Jugal.
35. Palatin.
36. Dentaire.
37. Articulaire.
38. Angulaire.
39. Operculaire.
40. Sur-angulaire.
41. Complémentaire.

2° *Mammifères.*

1, 2, 3, 4. Occipital; pièces distinctes à l'état fétal; quelques-unes même, parfois, à l'état adulte.

5. Temporal, quelquefois soudé aux suivans.

6, 7. Rocher, mastoïdien; distincts à l'état fétal.

8. Tympanique, de plusieurs pièces à l'état fétal; souvent soudé aux précédens.

9. Marteau.

10. Enclume.

11. Lenticulaire, souvent soudé au précédent.

12. Étrier.

13. Adstapéal, représenté par le

cartilage de la trompe d'Eustache.
14. Crotaphal ; assez fréquent chez l'homme (Béclard).
15. Pariétal.
16, 17, 18. Frontal primordialement unique (Béclard) ; à pièces distinctes à l'état fétal (Serres).
19. Sphénoïde antérieur ; fétal, bientôt soudé au suivant.
20. Aile orbitaire, quelquefois soudée aussi au suivant ou à l'ethmoïde.
21. Sphénoïde postérieur, toujours distinct à l'état fétal.
22. Aile temporale, *idem ;* mais soudée bientôt au précédent.
23. Ptérygoïdien ; aile interne ; souvent distinct, même à l'état adulte.
24, 25. Ethmoïde ; pièces distinctes à l'état fétal.
26. Lacrymal.
27. Palpébral ; cartilage tarse.
28. Vomer.
29. Cornet.
30. Nasal.
31. Intermaxillaire, quelquefois soudé au suivant.
32. Sus-maxillaire.
33. Adgustal ; bientôt soudé au sus-maxillaire ; distinct seulement à l'état fétal.
34. Jugal.
35. Palatin.
36, 37, 38, 39, 40, 41. Primordialement confondus en un seul os sous-maxillaire.

3° *Oiseaux.*

1, 2, 3, 4. Occipital ; pièces distinctes seulement dans le très jeune âge, comme la plupart des suivantes, qui se soudent presque toutes ensemble dans l'âge adulte.
5, 6. Temporo-mastoïdien (*nobis*), temporal des auteurs.
7. Rocher.
8. Tympanique ; toujours mobile ; os carré de Hérissant.
9. Malléal (*nobis*) ; faisant partie du sous-zygoma ; jugal de la plupart des zoologistes.
10. Enclume (*nobis*) ; marteau des auteurs.
11. Lenticulaire.
12. Étrier ; enclume de M. Geoffroy Saint-Hilaire.
13. Adstapéal ? Table pharyngienne de M. Geoffroy Saint-Hilaire ; soudé au sphénoïde postérieur.
15. Pariétal.
16, 17. Frontal médio-postérieur.
18, 30. Fronto-nasal (*nobis*) ; frontal antérieur (Cuvier) ; nasal (Bojanus, Meckel, etc.).
19, 21. Sphénoïdes antérieur et postérieur ; distincts à l'état fétal ?
20, 22. Aile temporale réunie à l'orbitaire ; distinctes à l'état fétal (Meckel).
23. Ptérygoïdien, mobile ; os omoïde de Hérissant.
24. Ethmoïde (Bojanus, Meckel, etc.) ; sphénoïde antérieur (Cuvier).
25. Planum, cartilagineux.
26. Lacrymal.
27. Palpébral on sur-orbitaire.
28. Vomer.
29. Cornet, cartilagineux.
31. Intermaxillaire.
32, 33. Sus-maxillaire.

34. Jugal (*nobis*), fort petit; découvert par M. Geoffroy, constaté par Meckel et nous.
35. Palatin, mobile.
36, 37, 38, 39, 40, 41. Distincts à l'état fétal, soudés chez l'adulte.

4° *Crocodiles.*

1. Sus-occipital (Cuvier), rupéal ou rocher de M. Geoffroy.
2. Basilaire.
3. Ex-occipital; pluroccipital de M. Geoffroy.
5, 6. Temporo-mastoïdien (*nobis*); mastoïdien de Cuvier; temporal de M. Geoffroy.
7. Rocher (Cuvier); aile temporale de M. Geoffroy.
8. Tympanique; énostéal de M. Geoffroy.
9. Malléal (*nobis*); temporal de Cuvier, cotyléal de M. Geoffroy.
10. Enclume (*nobis*); marteau des auteurs.
11. Lenticulaire.
12. Étrier; enclume et lenticulaire de M. Geoffroy.
15. Pariétal.
16. Frontal principal.
17. Frontal postérieur (Cuvier); jugal de M. Geoffroy; portion du temporal, selon Meckel.
18. Frontal antérieur (Cuvier); planum, selon M. Geoffroy, Bojanus, Meckel, etc.
19, 21. Sphénoïde antéro-postérieur.
20, 22. Aile orbito-temporale (Cuv.); ingrassial de M. Geoffroy.
23. Ptérygoïdien.
24. Ethmoïde osseux (Cuvier).
25. Planum, cartilagineux (*idem*).
26. Lacrymal.
27. Palpébral; distinct et osseux dans une espèce seulement.
28. Vomer.
29. Cornet, cartilagineux.
30. Nasal.
31. Intermaxillaire.
32. Sus-maxillaire.
33. Adgustal (M. Geoffroy), transverse ou ptérygoïdien externe de Cuvier.
34. Jugal (Cuvier); adorbital de M. Geoffroy.
35. Palatin.
36. Dentaire.
37. Articulaire.
38. Angulaire.
39. Operculaire.
40. Sur-angulaire.
41. Complémentaire.

5° *Tortues.*

1. Sus-occipital.
2. Basilaire.
3. Ex-occipital.
5. Temporal (*nobis*); mastoïdien de Cuvier.
6. Mastoïdien (*nobis*); occipital extérieur de Cuvier.
7. Rocher.
8. Tympanique.
9. Malléal (*nobis*); temporal de Cuvier.
10. Enclume (*nobis*); marteau des auteurs.
11. Lenticulaire.

12. Étrier.
15. Pariétal.
16. Frontal principal.
17. Frontal postérieur.
18, 26, 30. Fronto-naso-lacrymal (*nobis*); frontal antérieur de Cuvier.
19, 21. Sphénoïde.
20. Aile orbitaire, cartilagineuse.
22. Aile temporale.
23. Ptérygoïdien.
24, 25. Ethmoïde, cartilagineux.
28. Vomer.
29. Cornet, cartilagineux.
31. Intermaxillaire.
32. Sus-maxillaire.
34. Jugal.
35. Palatin.
36, 37, 38, 39, 40, 41. Comme chez le crocodile, à part la fusion des deux dentaires ensemble.

6° *Lézards.*

1. Sus-occipital.
2. Basilaire.
3. Ex-occipital.
5. Temporal.
6. Mastoïdien.
7. Rocher.
8. Tympanique.
9. Malléal ligamenteux ; ligament sous-zygomatique (*nobis*) ; osseux chez l'orvet (Meckel).
10. Enclume (*nobis*); *vulgò* marteau.
11. Lenticulaire, cartilagineux (*nobis*).
12. Étrier.
14. Plaques temporales.
15. Pariétal.
16. Frontal principal.
17. Frontal postérieur.
18. Frontal antérieur.
19, 21. Sphénoïde.
20. Aile orbitaire cartilagineuse ou membraneuse.
22. Aile temporale (Meckel) ; columelle de Cuvier.
23. Ptérygoïdien.
24, 25. Ethmoïdes cartilagineux et membraneux.
26. Lacrymal.
27. Palpébral multiple.
28. Vomer.
29. Cornet, osseux.
30. Nasal.
31. Intermaxillaire.
32. Sus-maxillaire.
33. Adgustal ; transverse de Cuvier.
34. Jugal.
35. Palatin.
36, 37, 38, 39, 40, 41. Comme chez le crocodile.

7° *Serpens.*

1. Sus-occipital (*nobis*).
2. Basilaire.
3. Ex-occipital (*nobis*); occipital supérieur de Cuvier.
5, 6. Temporo-mastoïdien (*nobis*); mastoïdien de Cuvier.
7, 22. Rupéo-ptéréal (*nobis*) ; rocher de Cuvier et autres.
8. Tympanique.
9. Malléal ligamenteux ; ligament sous-zygomatique (*nobis*).
10, 11, 12. Incéo-stapéal (*nobis*) ; étrier de Cuvier.
15. Pariétal.
16, 24. Fronto-ethmoïdal (*nobis*) ; frontal principal de Cuvier.

17. Frontal postérieur (Cuvier); temporal de Meckel; jugal de Bojanus.
18, 26. Fronto-lacrymal (*nobis*); frontal antérieur de Cuvier; lacrymal des autres auteurs.
19, 21. Sphénoïde.
20. Aile orbitaire, cartilagineuse.
23. Ptérygoïdien.
27. Palpébral ou sur-orbitaire; manque à beaucoup d'espèces.
28. Vomer.
29. Cornet osseux; ethmoïde de Meckel.
30. Nasal.
31. Intermaxillaire.
32. Sus-maxillaire.
33. Adgustal ou transverse (Cuvier).
34. Jugal ligamenteux; ligament fronto-maxillaire (*nobis*).
35. Palatin.
36. Dentaire.
37. Articulaire.
38. Angulaire.
39. Operculaire.
40. Sur-angulo-complémentaire; manque à beaucoup d'espèces.

8° *Batraciens anoures.*

1, 2. Sus-occipital et basilaire cartilagineux et rudimentaires (*nobis*).
3. Ex-occipital.
5, 6. Temporo-mastoïdien (*nobis*); tympanique de Cuvier et autres.
7, 22. Ptéréo-rupéal (*nobis*); rocher de Cuvier.
8, 9. Tympano-malléal (*nobis*); en partie cartilagineux; jugal des auteurs.
10. Enclume; *vulgò* marteau.
12. Étrier.
13. Adstapéal.
15, 16, 17. Fronto-pariétal; deux pièces distinctes à l'état fétal.
18, 30. Fronto-nasal (*nobis*); frontal antérieur de Cuvier; nasal de Bojanus, Meckel, etc.
19. Sphénoïde antérieur, séparé du postérieur (Morren).
20. Aile orbitaire, cartilagineuse.
21. Sphénoïde postérieur.
23. Ptérygoïdien (Cuvier, etc.); ptérygoïdien externe de Bojanus.
24, 25. Ethmoïde osso-cartilagineux (Bojanus, Meckel); os en ceinture de Cuvier.
26. Lacrymal cartilagineux (*nobis*).
28. Vomer (Cuvier); palatin de Bojanus.
29. Cornet, osseux (*nobis*); nasal de Cuvier.
31. Intermaxillaire.
32, 34. Maxillo-jugal (*nobis*); *vulgò* sus-maxillaire.
33. Adgustal? cartilagineux (*nobis*).
35. Palatin (Cuvier); ptérygoïdien externe de Bojanus et Meckel.
36. Dentaire (*nobis*).
37. Articulaire, cartilagineux.
38, 39. Operculo-angulaire.
40. Sur-angulaire (*nobis*).

9° *Salamandres.*

3, 7, 22. Occipito-rupéo-ptéréal.
5, 6. Temporo-mastoïdien (*nobis*); tympanique de Cuvier, portion de l'os carré, selon Meckel.

8. Tympanique (*nobis*); jugal de Cuvier, autre portion de l'os carré selon Meckel.
9. Malléal ligamenteux; ligament sous-zygomatique.
13. Adstapéal (*nobis*); étrier des auteurs.
15. Pariétal.
16, 17. Frontal médio-postérieur.
18, 26. Fronto-lacrymal (*nobis*); frontal antérieur de Cuvier.
19, 21. Sphénoïde.
20. Aile orbitaire (Cuvier); aile temporale de Meckel.
23. Ptérygoïdien.
25. Ethmoïde cartilagineux et double (*nobis*).
28, 35. Voméro-palatin.
30. Nasal.
31. Intermaxillaire.
32, 34. Maxillo-jugal (*nobis*); *vulgò* sus-maxillaire.
33. Adgustal cartilagineux (*nobis*).
36, 40. Surangulo-dentaire (*nobis*); *vulgò* dentaire; pièces distinctes à l'état fétal.
37, 38, 39. Articulo-angulo-operculaire; deux pièces à l'état fétal.

10° *Cécilie.*

3, 7, 19, 21, 22. Occipito-sphéno-rupéal; triple au jeune âge, comme chez les Salamandres adultes; occipital supérieur de Cuvier.
5, 6, 23. Temporo-masto-ptérygoïdien; mastoïdien et caisse réunis de Cuvier.
8. Tympanique; rudimentaire, mais osseux; articulé avec une facette de la mâchoire en dedans de l'articulation principale (*nobis*).
12. Étrier ou adstapéal (*nobis*).
15, 16, 17. Fronto-pariétal (*nobis*); pariétal de Cuvier.
18, 26. Fronto-lacrymal (*nobis*); frontal antérieur de Cuvier.
20. Aile orbitaire, cartilagineuse (*nobis*).
24, 25. Ethmoïde osseux (*nobis*); frontal unique de Cuvier.
28. Vomer (*nobis*).
29. Cornet, osseux (*nobis*).
30, 31. Intermaxillo-nasal (Cuvier).
32, 35. Maxillo-palatin (*nobis*); maxillaire de Cuvier.
33. Adgustal (*nobis*).
34. Jugal (*nobis*); frontal postérieur douteux de Cuvier; semblable au jugal des tortues.
36, 40. Surangulo-dentaire.
37, 38, 39. Articulo-angulo-operculaire.

11° *Poissons osseux.*

1. Sus-occipital (Bojanus); interpariétal de Cuvier.
2. Basilaire.
3. Ex-occipital.
4. Osselets sur-occipitaux (Cuvier).
5. Temporal (*nobis*); mastoïdien de Cuvier et Meckel; rupéal externe de M. Geoffroy.
6. Mastoïdien (*nobis*); occipital supérieur de Cuvier et de M. Geoffroy.
7. Rocher (Meckel); aile temporale de Cuvier et de M. Geoffroy.
8. Tympanique; de plusieurs pièces comprenant le temporal, le tympanique, le symplectique et le préopercule de Cuvier.

9. Malléal (*nobis*); jugal de Cuvier, cotyléal de M. Geoffroy.
10. Incéal? interopercule de Cuvier.
11. Lenticulaire ? subopercule de Cuvier.
12. Stapéal? opercule de Cuvier.
13. Adstapéal (*nobis*); rocher de Cuvier; rupéal interne de M. Geoffroy.
14. Osselets sus-temporaux de Cuvier.
15. Pariétal.
16. Frontal principal.
17. Frontal postérieur (Cuvier); temporal de M. Geoffroy.
18. Frontal antérieur (Cuvier); lacrymal de M. Geoffroy et de Meckel.
19. 21. Sphénoïde.
20. Aile orbitaire (Meckel); souvent impaire ou nulle; sphénoïde antérieur de Cuvier et de M. Geoffroy.
22. Aile temporale (Meckel); aile orbitaire de Cuvier et de M. Geoffroy.
23. Ptérygoïdien.
24, 25. Ethmoïde.
26. Lacrymal (*nobis*); premier sous-orbitaire de Cuvier; adorbital de M. Geoffroy.
27. Palpébral ou sur-orbitaire; manque souvent.
28. Vomer.
30. Nasal; cornet de M. Geoffroy.
31. Intermaxillaire.
32. Sus-maxillaire.
33. Adgustal ou ptérygoïdien externe.
34. Jugal, multiple (M. Geoffroy); chaîne des osselets sous-orbitaires de Cuvier.
35. Palatin.
36, 37, 38, 39, 40, 41. Pièces analogues à celles du crocodile, quelquefois toutes distinctes (*esox osseus*), plus souvent soudées en trois, un articulo-sur-angulaire, un operculo-dentaire et un angulaire.

EXPLICATION DES FIGURES.

1°. *Désignations communes des Os.*

N°s

1. Fronto-pariétal.
2. Fronto-nasal.
3. Intermaxillaire.
4. Maxillo-jugal.
5. Cornet.
6. Vomer.
7. Palatin.
8. Sphénoïde.
9. Ptérygoïdien.
10. Temporo-mastoïdien.
11. Tympano-malléal.
12. Rupéo-ptéréal.
13. Osselets de l'ouïe.
14. Ex-occipitaux.
15. Ethmoïde.
16. Operculo-angulaire.
17. Sur-angulaire.
18. Dentaire.
19. Articulaire.
20. Basi-hyal.
21. Corne styloïdienne.
22. Branche styloïdienne.
23. Corne thyroïdienne.
24. Vertèbres.
25. Sacrum.
26. Coccyx.
27. Pré-sternum.

N°s

28. Post-sternum.
29. Ad-scapulum.
30. Scapulum.
31. Paraglénal.
32. Coracoïdien.
33. Acromial.
34. Clavicule ou fourchette.
35. Humérus.
36. Cubito-radius ou os antibrachial.
37. Pyramidal.
38. Lunaire.
39. Scaphoïde.
40. Crochu.
41. Capité.
42. Trapézoïde.
43. Trapèze.
44. Les cinq métacarpiens.
45. Phalanges.
46. Phalangines.
47. Phalangettes.
48. Ilium.
49. Ischion.
50. Pubis.
51. Paracotyléal.
52. Fémur.
53. Tibia-péroné, ou os crural.

Nos	Nos
54. Astragale.	60. Sésamoïde.
55. Calcanéum.	61. Les cinq métatarsiens.
56. Cuboïdo-cunéiforme.	62. Phalanges.
57. Scaphoïde.	63. Phalangines.
58. Deuxième cunéiforme.	64. Adphalangine du 4e doigt.
59. Premier cunéiforme.	65. Phalangettes.

2° *Désignations communes des Muscles.*

Elles sont distribuées par numéros en rapport avec ceux du texte, auquel nous renvoyons pour ces détails (*pages* 123 *et suivantes.*)

3° *Désignations particulières des Figures.*

Fig. 1. Tête de la grenouille verte adulte, vue en-dessus. Double grandeur, comme les sept figures de cette planche.

Fig. 2. La même, vue en-dessous.

Fig. 3. La même, vue de côté.

Fig. 4. Mâchoire inférieure, vue en dehors.

Fig. 5. La même, vue en dedans.

Fig. 6. Le cartilage cranio-facial de la même tête avec l'ethmoïde, les malléaux, les rupéo-ptéréaux, les ex-occipitaux osseux. Le tout vu en-dessus.

Fig. 7. Le même assemblage, vu en-dessous; pour ces deux dernières figures, *a* désigne la portion cartilagineuse olfactive de l'ethmoïde, *b* le lacrymal, *c* le ptérygoïdien interne, ou adgustal, *d* l'ingrassial, *e* le sus-occipital, *f* le basilaire.

Fig. 8. Le cartilage cranio-facial du merlus, avec les os suivans, qui font continuité avec lui; *a* frontal antérieur, *b* ethmoïde, *c* sphénoïde, *d* frontal postérieur, *e* temporal, *f* mastoïdien, *g* ex-occipital, *h* basilaire; grandeur naturelle.

Fig. 9. Osselets de l'ouïe de la grenouille verte, double grandeur; *a* l'enclume, vue de face, *b idem*, de profil et en connexion, *c* étrier, *d* os ou plutôt cartilage tubaire ou adstapéal; représentant celui de la trompe d'Eustache? ou bien démembrement de l'étrier.

Fig. 10. Mêmes osselets du crapaud commun; double grandeur.

Fig. 11.—14. Tête du sonneur brun, vue en-dessus, en-dessous, de côté et en arrière; grandeur naturelle.

Fig. 15. Tête du sonneur brun de première année, vue en-dessus, grandeur naturelle.

Fig. 16. Hyoïde de la grenouille verte; grandeur naturelle.

Fig. 17. *Idem* du crapaud commun.

Fig. 18. *Idem* du sonneur brun.

Fig. 19. *Idem* du sonneur igné; un peu plus grand que nature.

Fig. 20. *Idem* de l'accoucheur vulgaire; un peu plus grand que nature.

Fig. 21. *Idem* de l'accoucheur ponctué : trois à quatre fois plus grand que nature. 23 *Bis*, ses osselets surnuméraires.

Fig. 22. Sternum et épaules de la grenouille verte, vus en dessous, un côté en position, l'autre étendu à dessein; double de grandeur naturelle.

Fig. 23. Mêmes objets, vus en-dessus, l'acromial désarticulé pour laisser voir la clavicule cartilagineuse.

Fig. 24. Sternum du *B. igneus* avec l'épaule en traits ponctués; un peu plus grand que nature.

Fig. 25. Un côté d'épaule et sternum du *B. fuscus*, vus en-dessus; grandeur naturelle.

Fig. 26. Épaule du crapaud commun, vue en-dessous; grandeur naturelle.

Fig. 27. Épaule et sternum d'*anguis fragilis*, vus en-dessous et aplatis; plus grands que nature.

Fig. 28. Bassin du caméléon d'un côté seulement, vu en-dessous; double de grandeur naturelle : *a* ad-ilium, *b* marsupial.

Fig. 29. Coxal de jeune lapin; pubis et ischion déjà soudés en dehors. Le paracotyléal bien distinct entre les trois autres pièces.

Fig. 29 *bis*. Coxal de lièvre, fétus à terme, vu par la face interne; grandeur naturelle, ainsi que la figure précédente.

Fig. 30. Squelette de la grenouille verte; grandeur naturelle, vu en-dessus et dans la même attitude que les figures de myologie.

Fig. 31. Mâchoire inférieure, hyoïde, sternum et épaules, vus en-dessous dans leurs rapports normaux.

Fig. 32. Rachis du sonneur brun, vu en-dessus; grandeur naturelle.

Fig. 33. Quatre vertèbres du même; vues en-dessous; *a* atlas, *b*, *d*, les trois vertèbres suivantes, *c* globule osseux ou condyle intermédiaire détaché. Il est en place à la vertèbre *e*.

Fig. 34. Troisième vertèbre de l'accoucheur vulgaire, vue en dessous, avec ses appendices costaux *b*; double grandeur.

Fig. 35. Coccyx du même, vu en-dessous; double grandeur.

Fig. 36. Avant-bras et main du *B. fuscus*, face sus-palmaire; grandeur naturelle.

Fig. 37. Carpe du même; double grandeur.

Fig. 38. Pied du même; grandeur naturelle.

Fig. 39. Os calcanéo-astragalien de l'accoucheur ponctué.

Fig. 40. Grenouille verte, vue par le dos avec l'indication des poches sus-cutanées.

Fig. 41. La même, vue par-dessous; les numéros répondent à ceux du texte, page 122.

Fig. 42 et 42 *bis*. Muscles de la face dorsale de la grenouille verte.

Fig. 43 et 43 *bis*. Face ventrale.

Fig. 44. Région gutturale et scapulaire profonde; l'épaule gauche est en place, avec la moitié du post-sternum; la droite est en partie coupée et renversée en dehors.

Fig. 45. Région sous-orbitaire et sous-occipitale.

Fig. 46. OEil avec ses muscles, vu en-dessous et double de grandeur naturelle; un trait ponctué trace le contour de l'orbite.

Fig. 47. La glotte et les cornes thyroïdiennes de l'hyoïde avec les muscles laryngiens.

Fig. 48. Muscles de la main; couche superficielle et dorsale; figure doublée en grandeur comme les quatres suivantes.

Fig. 49. Couche profonde, face dorsale.

Fig. 50. Couche superficielle; face palmaire.

Fig. 51. Couche profonde; face palmaire.

Fig. 52. Squelette; face palmaire.

Fig. 53. Muscles du pied : couche superficielle, face dorsale; figure au double comme les trois suivantes.

Fig. 54. Couche superficielle, face plantaire; l'aponévrose enlevée.

Fig. 55. Couche profonde; face plantaire.

Fig. 56. Squelette; face plantaire.

Fig. 57. Myologie du crapaud commun, vu en-dessus.

Fig. 58. *Idem*, vu en-dessous.

Fig. 59. OEuf de grenouille de grandeur naturelle, près de l'éclosion.

Fig. 60. Le même, très grossi; le têtard, vu de côté, mais courbé.

Fig. 61. Le même, têtard éclos, étendu et vu de profil (première période).

Fig. 62. Têtard du second jour, vu de profil; branchies extérieures visibles (première période).

Fig. 63. Le même, vu en-dessous pour faire voir la bouche.

Fig. 64. Têtard, au quatrième jour, vu de profil; branchies extérieures, rameuses; éminences jugulaires presque effacées (première période).

Fig. 65. Le même, vu en-dessous, pour bien montrer la bouche et l'opercule des branchies.

Fig. 66. Grandeur naturelle du têtard de la grenouille au huitième jour (seconde période).

Fig. 67. Grandeur naturelle du têtard de la rainette à une époque à peu près pareille (deuxième période).

Fig. 68. Le même, très grossi; laissant voir, par la transparence de sa peau, ses muscles sous-hyoïdiens, ses yeux, ses branchies, son cœur et ses intestins; à son côté gauche se voit un évent infundibuliforme.

Fig. 69. Un crochet des peignes labiaux très grossi; *a* la partie libre, *bb* la partie enfoncée dans les chairs.

Fig. 70. Cartilage cranio-facial du *B. fuscus*, vu en-dessus; grandeur naturelle durant la troisième période. On y voit déjà le pariétal, les frontaux et les rochers à l'état osseux; *a* apophyse ethmoïdale, *b* lame ptérygo-tympanique, *c* apophyse orbitaire, *d* apophyse tympanique, *e* rostral supérieur.

Fig. 71. Même pièce, vue en-dessous; le bec supérieur relevé; on y découvre le sphénoïde et les ex-occipitaux osseux; les mêmes lettres indiquent les mêmes objets; plus, *f* adrostral supérieur, *g* facette articulaire pour la branche styloïdienne.

Fig. 72. Même pièce, vue de profil, avec la mâchoire inférieure et l'appareil hyo-branchial, *h* adrostral inférieur, *i* rostral, *l* basi-hyal, *m* branche styloïdienne, *n* pièce thyroïdienne.

Fig. 73. Les deux mâchoires avec leur bec corné et le ligament qui les unit, *d* grandeur plus que naturelle. (Par une erreur du graveur, ce ligament porte ici la lettre *d*, tandis que dans le texte il a été désigné par la lettre *j*. (*Voyez* p. 87).

Fig. 74. Mâchoire inférieure vers la cinquième période. L'articulaire et le dentaire soudés *i* 18 et *h* 19. L'operculo-angulaire 16 et le surangulaire 17 à peu près en position, mais à distance.

Fig. 75. La tête, vue en-dessous avec les mâchoires et l'hyoïde en place; même signification des lettres qu'aux figures précédentes.

Fig. 76. L'hyoïde, vu en-dessus à la quatrième période; un peu plus grand que nature.

Fig. 77. *Idem*, vers la fin de cette période.

Fig. 78. *Idem*, à la cinquième.

Fig. 79. *Idem*, dans le cours de la première année; grandeur naturelle.

Fig. 80. Tétard (troisième période) de *B. fuscus* de grande taille, mais de grandeur naturelle, couché sur le dos, la peau enlevée en grande partie, *q* muscles sous-maxillaires, *u* tympano-angulaire, *v* sous-hyoïdien, *x* sous-branchial, *y* orbite hyoïdien, *β* droit antérieur de l'abdomen, *γ* oblique externe, *δ* muscles caudaux.

Fig. 81. Tête du même, vue de profil; *o* muscle rostro-labial, *p* ad-rostro-labial, *z* génio-hyoïdien.

Fig. 82. Même tête sans l'hyoïde; *r* masseter, *x* crotaphite (dans le texte, ce muscle est désigné par la lettre *s*; le ptérygoïdien, qui porte dans le texte la lettre *t*, ne se voit ici qu'à peine); *u* tympano-angulaire.

Fig. 83. Tête du *B. fuscus* à la cinquième période, pour faire voir les trois portions du muscle sous-maxillaire 15 et le sous-mentonnier 4, correspondant aux quatre muscles inférieurs de la tête du tétard; à gauche est encore un vestige du trou de l'évent.

Fig. 84. Région sous-hyoïdienne; couche profonde du tétard, fig. 80; *k* cérato-branchial, droit de l'abdomen et sterno-hyoïdien; (cette lettre, indiquée dans le texte, a été omise dans la gravure); *w* précordio-branchial, *α* masto-branchial.

Fig. 85. Tête osseuse de la Salamandre marbrée, vue en-dessus, grandeur double. 1 pariétal, 2 frontal, 3 fronto-lacrymal, 4 nasal, 5 intermaxillaire; 6 maxillo-jugal, 11 ptérygoïdien, 13 temporo-mastoïdien, 14 tympanique, 15 occipito-rupéal.

Fig. 86. Même tête vue en-dessous. Mêmes significations des chiffres précédens; en outre, 7 voméro-palatin, 9 sphénoïde, 10 ingrassial.

Fig. 87. La même, de profil, avec la mâchoire inférieure, vue en dehors; mêmes chiffres et même désignation; plus, 17 articulaire ou articulo-angulaire, 18 dentaire ou surangulo-dentaire.

Fig. 88. Même pièce, à laquelle on a enlevé le temporo-mastoïdien et laissé les cartilages; au-dessous est la mâchoire inférieure vue en dedans; 12 cartilage ptérygoïdien.

Fig. 89. Tête osseuse de la larve de Salamandre marbrée, vue en-dessous, quatre fois aussi grande que nature. Mêmes chiffres, même valeur; 7, 7', 11 appareil ptérygo-vomérien.

Fig. 90. Mâchoire inférieure de jeune Salamandre marbrée, vue en dedans; grandeur triplée.

Fig. 91. La même décomposée, *a* articulaire, *b* dentaire, *d* surangulaire, *c* operculo-angulaire.

Fig. 92. Tête osseuse de la cécilie annelée, vue en-dessus; grandeur double; *a* fronto-pariétal, *b* fronto-lacrymal, *c* ethmoïde, *d* intermaxillo-nasal, *e* sus-maxillo-palatin, *f* jugal, *g* temporo-masto-ptérygoïdien, *h* étrier, *i* occipito-sphéno-rupéal.

Fig. 93. La même, vue en-dessous; *i* adgustal, *k* tympanique.

Fig. 94. La même de profil, avec la mâchoire inférieure, vue en dehors; *m* articulo-angulaire, surangulo-dentaire.

Fig. 95. La même, dont on a enlevé le maxillo-palatin, le jugal et le temporo-ptérygoïdien, pour laisser voir l'ethmoïde et la portion orbito-temporale du sphénoïde. La mâchoire inférieure, vue en dedans, est annexée à cette figure.

Fig 96. L'ethmoïde, vu en-dessus, avec les cornets O.

Fig. 97. Même pièce vue en-dessous.

Fig. 98. Hyoïde de la Salamandre marbrée : double grandeur; *b* basi-hyal, *b'* sa portion cartilagineuse, *d* sus-lingual ou corne styloïdienne, *e* stylo-hyal, *f* première pièce de la corne thyroïdienne; la répétition de cette première pièce se voit de chaque côté de la lettre *b'* à la même place que dans la figure 100, où elle est désignée par la lettre *g*; *h* deuxième pièce.

Fig. 99. Sus-lingual détaché et vu de champ.

Fig. 100 Hyoïde de Salamandre palmipède, quadruplé; *a* glosso-hyal.

Fig. 101. *a* Dernière vertèbre dorsale; *b* vertèbre lombaire; *c*,*c'* deux vertèbres sacrées, et *d* première vertèbre caudale, avec leurs côtées, vues en-dessus; doublées.

Fig. 102. Les mêmes, vues en-dessous, avec deux côtes détachées et vues de champ.

Fig. 103. Sternum ou xiphoïde; vu par sa face inférieure.

Fig. 104. Épaule droite étalée et vue en-dessous; une fois et demie aussi grande que nature.

Fig. 105. Épaule gauche, vue de même chez la Salamandre à l'époque de sa métamorphose.

Fig 106. Membre antérieur gauche vu en-dessus, grandeur double : *a* humérus, *b* radius, *c* cubitus, *d* piriforme, *f* trapèze, *g* trapézoïde, *h* capitatum, *i* unciforme, *j* pyro-lunaire.

Fig. 107. Membre postérieur du même côté; *a* fémur, *b* tibia, *c* péroné, *dd'* astragale divisé, *e* calcanéum, *f* scaphoïde, *g* cuboïde, *h* premier cunéiforme, *i* deuxième, *j* troisième.

Fig. 108. Bassin, double en grandeur, vu en-dessous; l'iléum *a* détaché et étendu latéralement, *b* ischio-pubis, *c* reste du cartilage pubien, *d* marsupial.

Fig. 109. Portion du bassin d'un autre individu, où le trou sous-pubien n'est pas encore complet.

Fig. 110. Épaule du caméléon, grandeur naturelle, pour faire voir la ressemblance avec le bassin de la Salamandre.

Fig. 111. Le bassin d'une larve très jeune; très grossi.

Fig. 112. Le bassin vers l'époque de la métamorphose, double grandeur environ.

Fig. 113. Hyoïde de jeune Salamandre terrestre, plus que quadruplé. *Voyez*, pour les lettres, la figure 98; plus *c* uro-hyal

Fig. 114. Hyoïde de larve de la Salamandre marbrée, très grossi; *a* la langue; peut être un glosso-hyal chez la Salamandre palmipède. Les autres lettres avec la même valeur que dans la fig. 98; de plus, *c* uro-hyal, *h*, *i*, *j*, *k* arcs branchiaux, ϰ muscle hyo-pré-styloïdien ou pré-stylo-post-branchial; ϑ muscle pré-stylo-prébranchial, ε inter-branchial.

Fig. 115. Tête de la larve marbrée vue en-dessous, pour faire voir l'opercule. Figure grossie quatre fois.

Fig. 116. La même, disséquée pour faire voir les muscles de l'o-

percule et des branchies; sous-maxillaire, 2 et 3 temporo-guttural et stylo-sous-hyoïdien, 4 génio-sous-hyoïdien, 6 sterno-hyoïdien, 7 angulo-branchial.

Fig. 117. La même de côté; couche superficielle des muscles.

Fig. 118. La même; couche profonde. Pour l'explication des numéros, *voyez* le texte, page 211. Il en est de même des figures précédentes.

Fig. 119. Larve de la Salamandre marbrée vivante et de profil; double grandeur.

Fig. 120. Larve de la Salamandre palmipède morte et quadruplée.

Fig. 121. La même vue en-dessus.

Fig. 122. La même en-dessous.

Fig. 123. Larve de la Salamandre palmipède peu après l'éclosion; sept à huit fois plus grande que nature.

Fig. 124. La même un peu plus avancée; le membre postérieur commence à paraître

Fig. 125. Myologie de la Salamandre marbrée vue en-dessous, figure doublée. *Voyez* le texte, page 181.

Fig. 126. *Idem*; face dorsale.

Fig. 127. Couche profonde des muscles de la jambe.

Fig. 128. Couche profonde des muscles sous-cervicaux.

ADDITIONS

AUX RECHERCHES

SUR L'OSTÉOLOGIE ET LA MYOLOGIE

DES BATRACIENS

A LEURS DIFFÉRENS AGES.

ARTICLE PREMIER.

En énumérant les espèces de Batraciens anoures que nous avons pu observer, nous avons signalé le double emploi auquel a donné lieu le crapaud brun (*B. fuscus*), dont une variété a été nommée *Rana cultripes* par Cuvier. La même absolument a été récemment publiée dans l'*Isis* (*Bull. Férussac*, octobre 1830), sous le nom de *Rana calcarata* par Michaelles. L'individu décrit venait de Malaga.

ART. II.

J'ai décrit dans l'épaule des Batraciens anoures une pièce dont l'analogie ne se trouve généralement que parmi celles qui composent le bassin des jeunes mammifères. Je viens de trouver cette pièce, que je nomme *paraglénale*, dans le scapulum d'une marmotte jeune, mais ayant acquis tout son développement. Le paraglénal était ici en partie cartilagineux, en plus grande partie osseux. On peut le voir dans les figures 1 et 2 en *a*. (*Planche additionnelle.*)

Dans la première, le scapulum est vu par son bord inférieur ou côté : dans la deuxième, par sa face externe ou supérieure. Le paraglénal est aplati, concave d'un côté,

pour faire partie de la cavité glénoïde (fig. 1), appliqué par l'autre face sur la base (*b*) de l'apophyse coracoïde et l'omoplate même (fig. 2).

Cette omoplate offre encore ici, comme chez d'autres rongeurs, une production remarquable de l'acromion (*c*), qui, peut-être, dans un âge plus tendre, se développe par un point particulier et représente plus exactement l'acromial des reptiles.

ART. III.

Le même animal m'a offert d'autres points de ressemblance assez importans avec les Batraciens. Je ne signalerai pas comme telle la forme élargie en disque mince et cartilagineux de son xiphoïde; mais les tendons, longs extenseurs des doigts et des orteils, étaient aussi au nombre de deux à chacun, excepté pour le pouce. Au pied, l'un de ces tendons est fourni par le long extenseur commun, l'autre (digitulaire) vient du pédieux pour le deuxième et le troisième, et de deux muscles propres partis du péroné pour le quatrième et le cinquième. Ces deux extenseurs péroniens paraissent tenir lieu du péronier antérieur qui manque. A la main, un des tendons vient de l'extenseur commun, l'autre d'un muscle propre plus profondément situé.

La disposition du plantaire (qui loin de mériter ici, comme chez l'homme, le nom de *grêle*, est deux fois aussi gros que le soléaire), m'a fait penser que le muscle bi-fémoro-plantaire de la grenouille représente non les jumaux ou gastro cnémiens, mais le plantaire. Cette détermination s'accorde mieux avec sa terminaison du côté du pied. Les jumeaux sont sans doute, ou confondus avec lui, ou nuls.

ART. IV.

Je n'avais pas pu donner la figure des transformations que subit le *cartilage cranio-facial* aux approches de l'état parfait. J'ai pu, cette année, passer l'été dans le Midi, recueillir moi-même les têtards du *B. fuscus* et les étudier à l'état frais. J'ai ainsi confirmé tous les points douteux et achevé ce que j'avais laissé incomplet.

On voit, dans la figure 3 (Planche additionnelle), l'esquisse de ce cartilage dans la troisième période, mais de dimension plus que naturelle; nous avons tracé en trait ponctué, 1° du côté gauche de la figure, en *a*, l'échancrure qui doit se former plus tard (*voy.* fig. 4) entre la portion interne et l'externe ou tympanique de la lame ptérygo-tympanique. Du côté droit, nous avons figuré de même en *b* l'allongement que doit subir le pédicule antérieur ou lacrymal de cette même lame; allongement qui reportera plus loin l'échancrure *a* et le tympanique.

Ces changemens sont déjà opérés (quatrième période) dans la pièce représentée, d'après nature, dans la figure 4; seulement les dimensions sont ici accrues à dessein, et les lames ptérygo-tympaniques sont déjetées sur les côtés. Un trait ponctué indique ici, à gauche, l'agrandissement que subira l'échancrure *a*, à droite l'allongement nouveau que prendra le pédicule *b*. On peut voir, dans cette figure, que la lame ptérygo-tympanique, outre qu'elle se rétrécit, se détache complètement du rocher.

La figure 5 est celle du cartilage de l'adulte d'après la grenouille verte; les deux autres pièces sont du sonneur brun. Dans toutes, les mêmes lettres et les mêmes numéros indiquent les mêmes objets. 1 Avance ethmoïdale, 2 tympanique, 3 narine, 4 ligament qui la circonscrit.

La figure 6 offre le cartilage cranio-facial grossi et vu de profil durant la troisième période; les mêmes signes désignent les mêmes objets; 5 est l'apophyse orbitaire, 6 l'hyoïde, 7 la mâchoire inférieure.

Les mêmes désignations sont applicables à la figure 7 qui est celle des mêmes parties d'un têtard à la quatrième période, vu de profil et dessiné d'après nature.

On a enlevé les pièces osseuses qui déjà couvraient les avances ethmoïdales, le ligament de la narine et le pédicule lacrymal (intermaxillaire, sus-maxillaire, fronto-nasal). On voit ici comment l'apophyse orbitaire (5) recule et s'élève par la rétrocession et l'élévation de la lame ptérygo-tympanique détachée du rocher.

ART. V.

Il m'a paru utile d'offrir aussi, dans des figures, la position réelle de l'épaule et du bassin à la fin de la troisième période. Dans la figure 8 on voit l'épaule placée au-dessus du cœur et derrière les branchies, de manière que les pièces claviculaires sont bien éloignées de celles du côté opposé, qu'elles croiseront par la suite. On voit aussi que le bassin est d'abord presque vertical au lieu d'être horizontal comme chez l'adulte.

Les figures 9 et 10 offrent les pièces de l'épaule et du bassin grossies, et dessinées avec plus de soin : les parties pointillées sont cartilagineuses; celles qu'on a laissées blanches sont déjà osseuses, à part le centre de la rondelle du bassin qui est un trou fermé seulement d'une membrane. Déjà cette rondelle touche à plat celle du côté opposé.

Les figures 11, 12 et 13 représentent trois degrés de développement du membre abdominal, son point d'inser-

tion est toujours à peu près à l'endroit où la tête du fémur s'articule avec le bassin dans la figure 8.

ART. VI.

Pour les muscles du tétard j'ai aussi à joindre ici une rectification. J'ai dit que le sous-mentonnier était probablement formé par les ad-rostro-labiaux réunis; j'ai reconnu le contraire; déjà le sous-mentonnier est bien apparent que les ad-rostro-labiaux existent encore; ils se détruisent avec les lèvres. Le reste de mes déterminations dubitatives peut être regardé maintenant comme positif.

J'ai donné le muscle sous-mentonnier comme exemple d'un muscle sans analogue; on pourrait toutefois lui en trouver facilement un dans le triangulaire des lèvres de l'homme qui passe souvent sous le menton pour s'unir à son congénère.

FIN DES RECHERCHES SUR LES BATRACIENS.

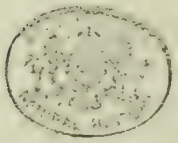


Fig. 1.

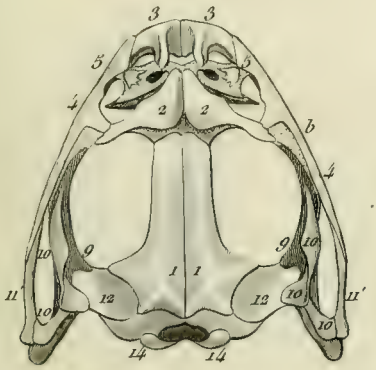


Fig. 2.

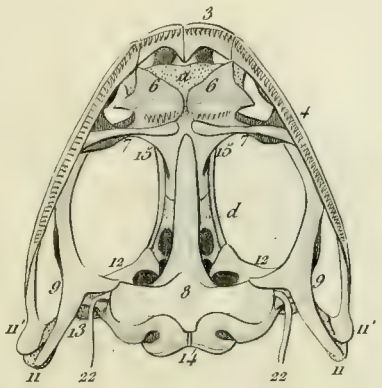


Fig. 5.

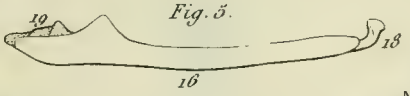


Fig. 6.

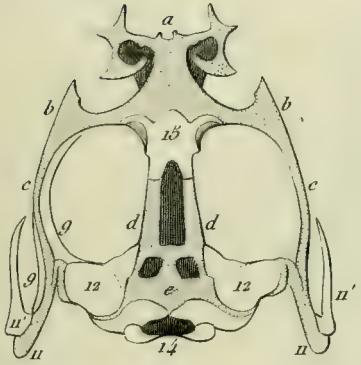


Fig. 7.

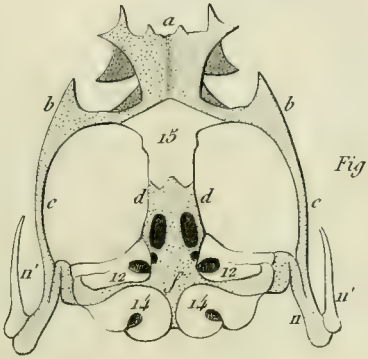


Fig. 3.

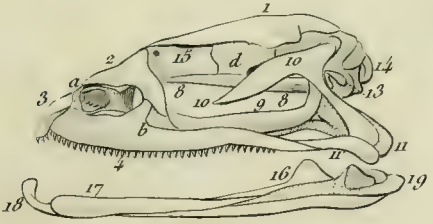


Fig. 4.

Fig. 11.

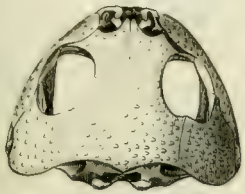


Fig. 8.

Fig. 12.

Fig. 9.

Fig. 10.

Fig. 13.

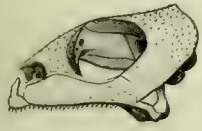


Fig. 14.

Fig. 15.

P. Duménil Direxit.

Fig. 21.

Fig. 16.

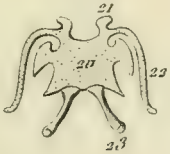


Fig. 20.

Fig. 19.

Fig. 18.

Fig. 17.

Fig. 29.

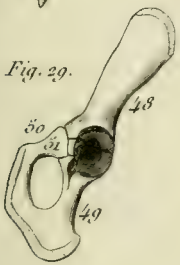


Fig. 22.

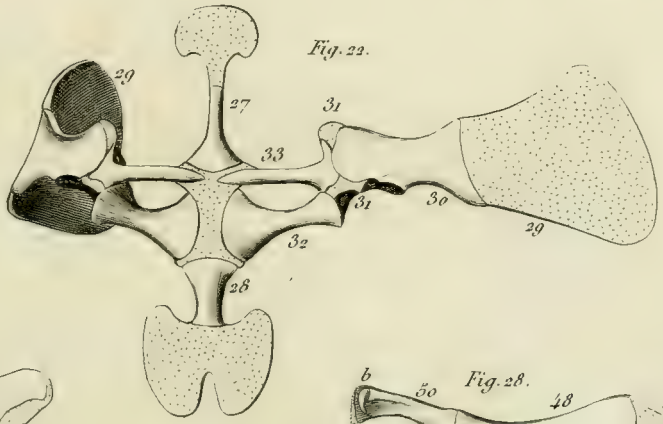


Fig. 26.

Fig. 29 bis.

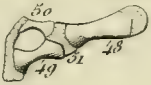


Fig. 28.

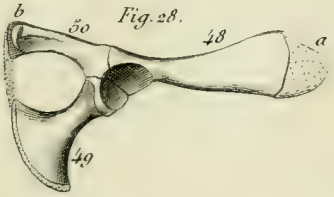


Fig. 27.

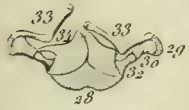


Fig. 23.

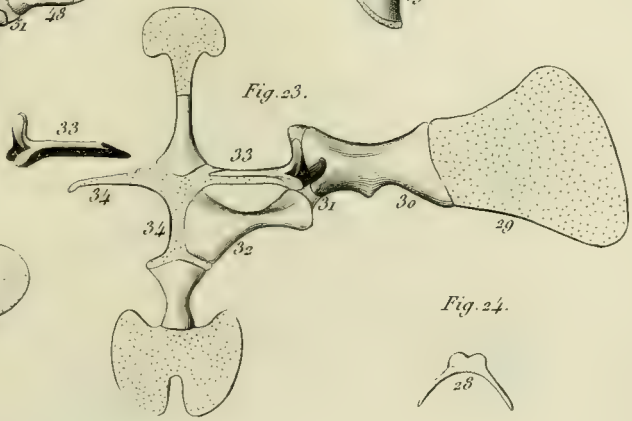


Fig. 25.

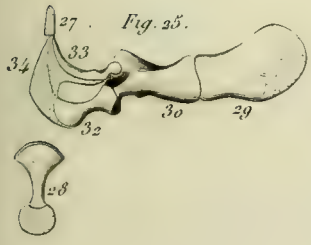


Fig. 24.

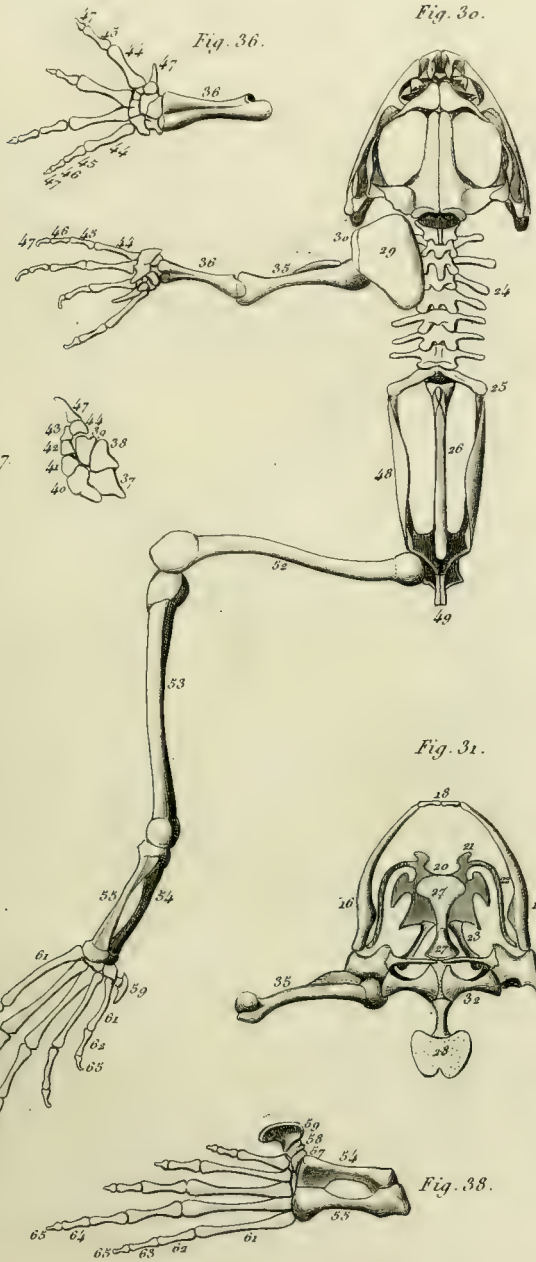
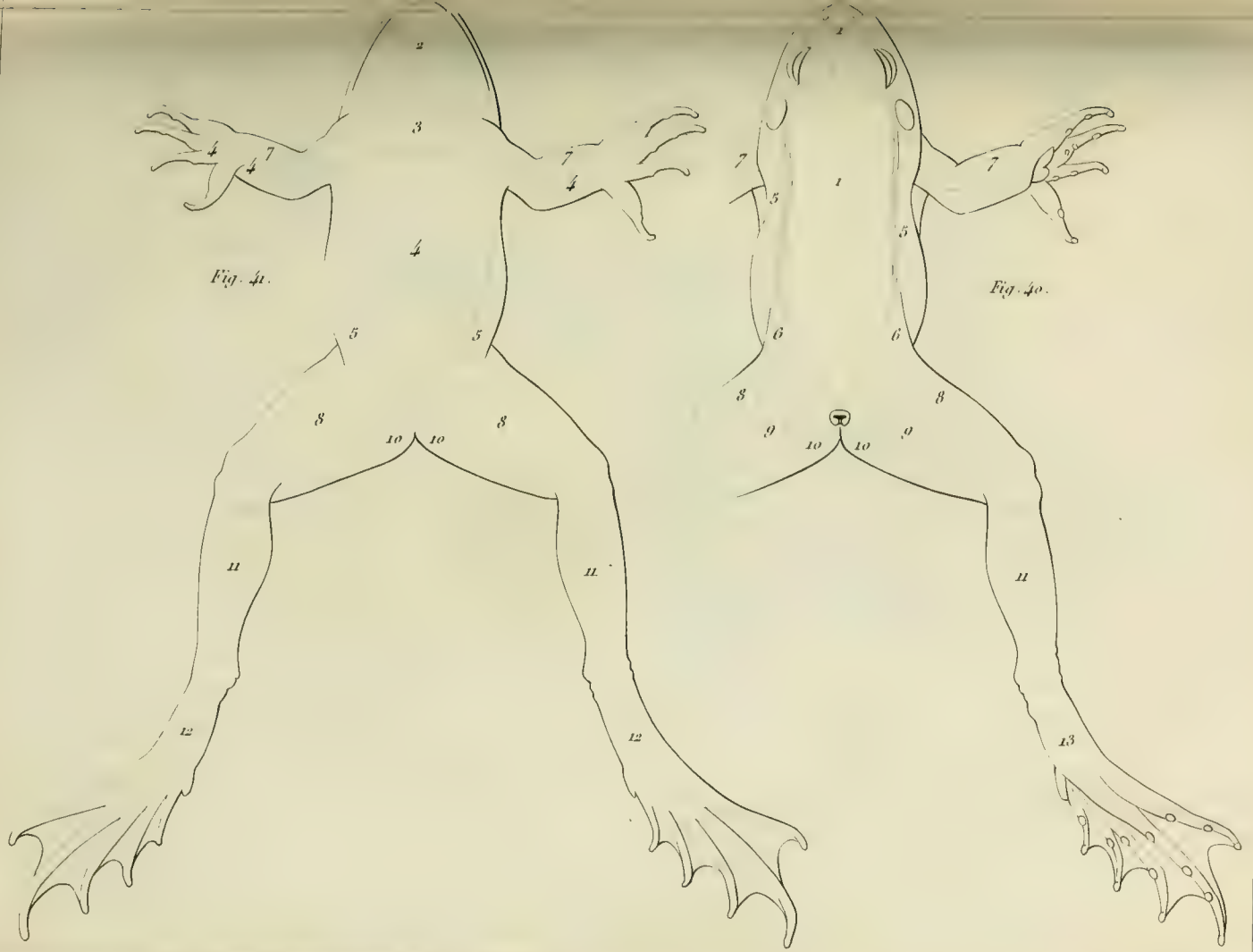


Fig. 30.
Fig. 36.
Fig. 34.
Fig. 35.
Fig. 37.
Fig. 32.
Fig. 31.
Fig. 33.
Fig. 39.
Fig. 38.



P. Dumont Direxit

Fig 42

Fig. 42 bis.

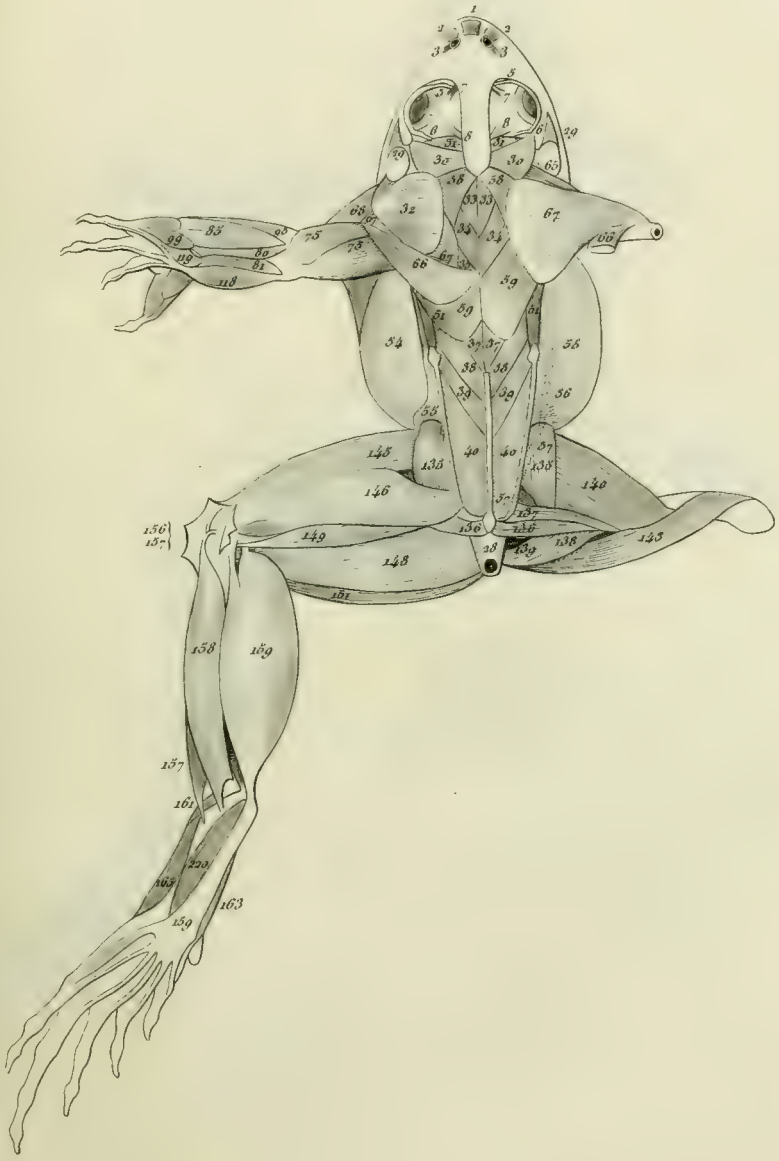


Fig. 43.

P. Duménil Direxit

Fig. 47. (bis)

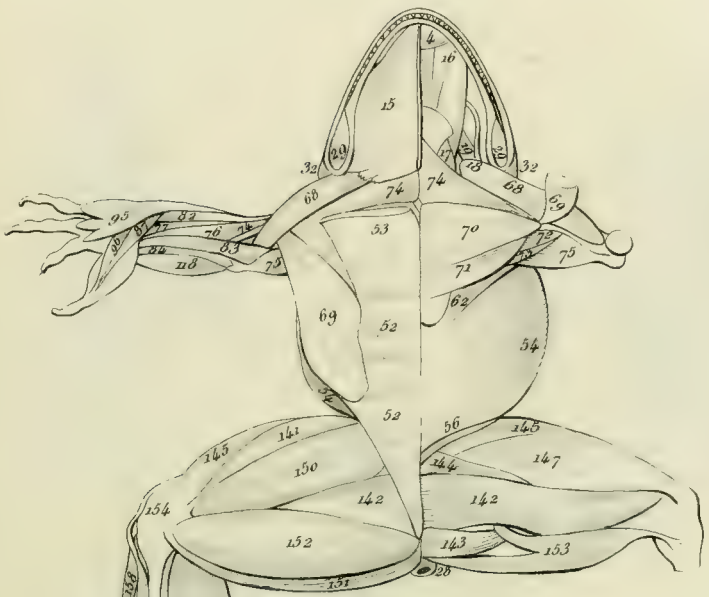


Fig 46

Fig 44.

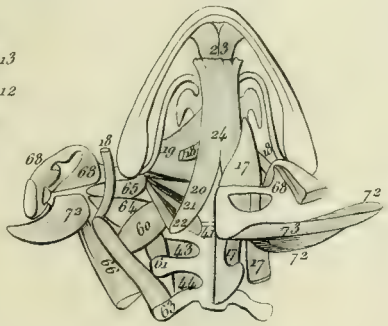


Fig. 45.

Fig. 47.

Fig. 48.

Fig. 50.

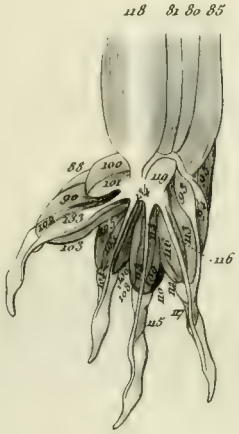


Fig. 52.

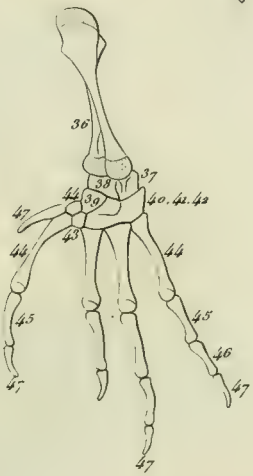


Fig. 49.

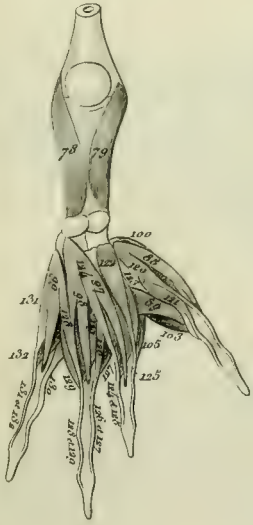
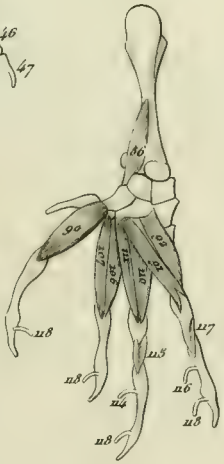
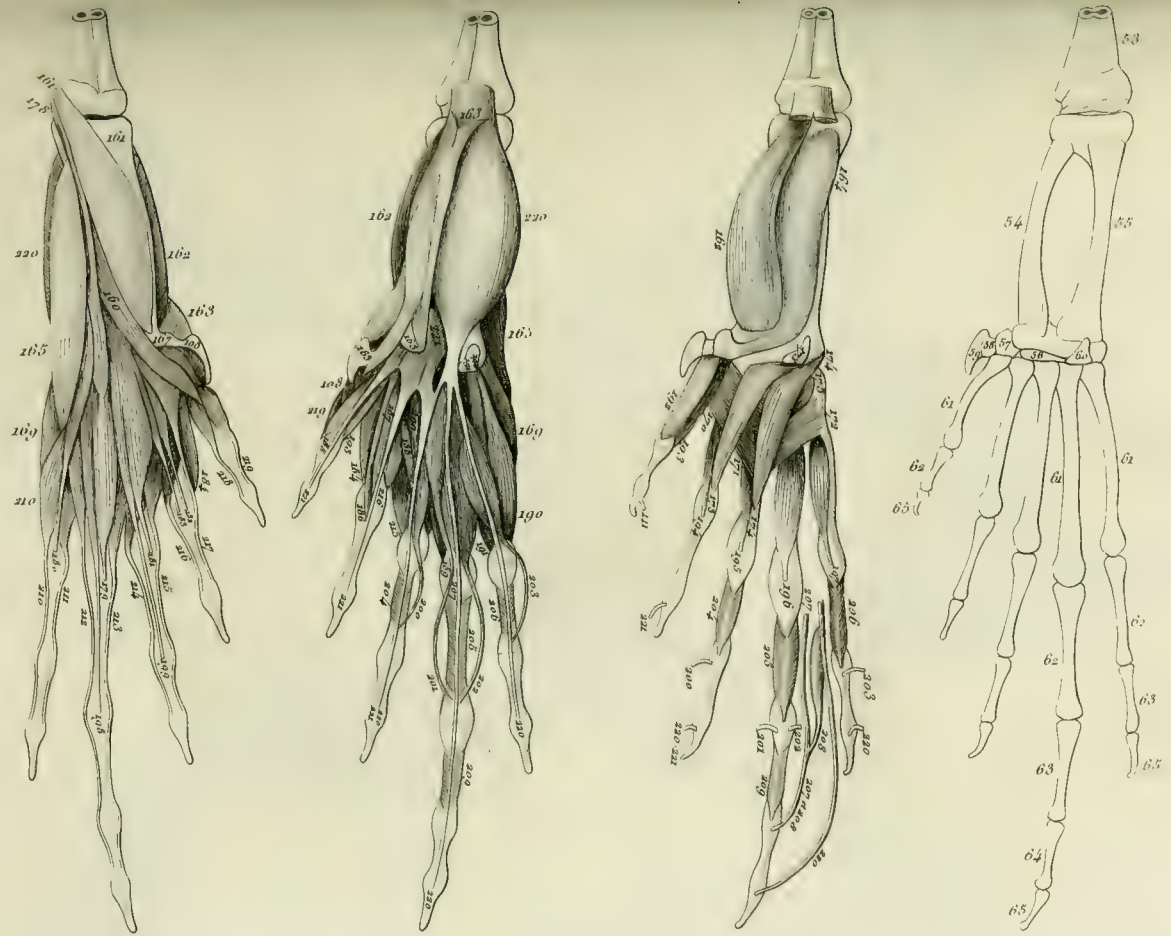


Fig. 51.





P. Duvernoi Dessinateur

Fig. 33.

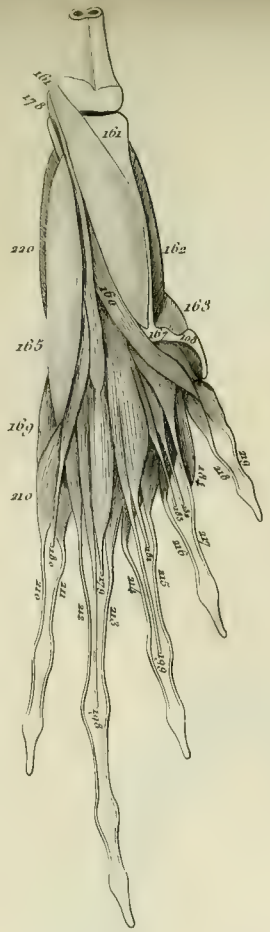


Fig. 34.

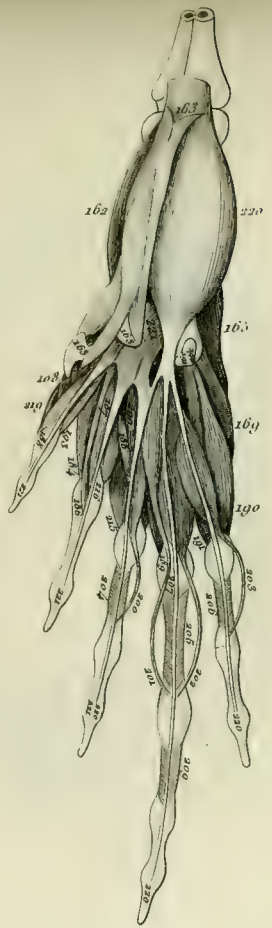
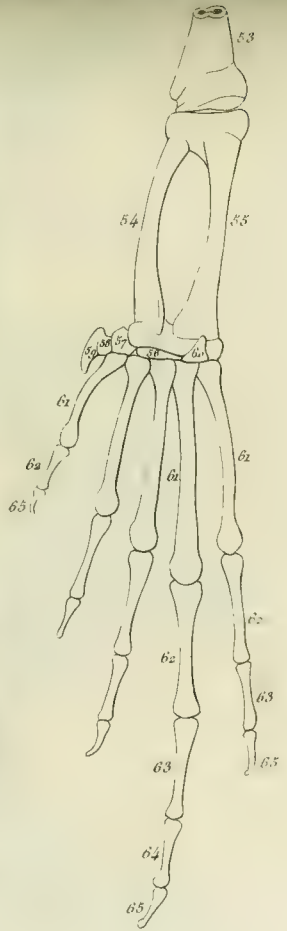


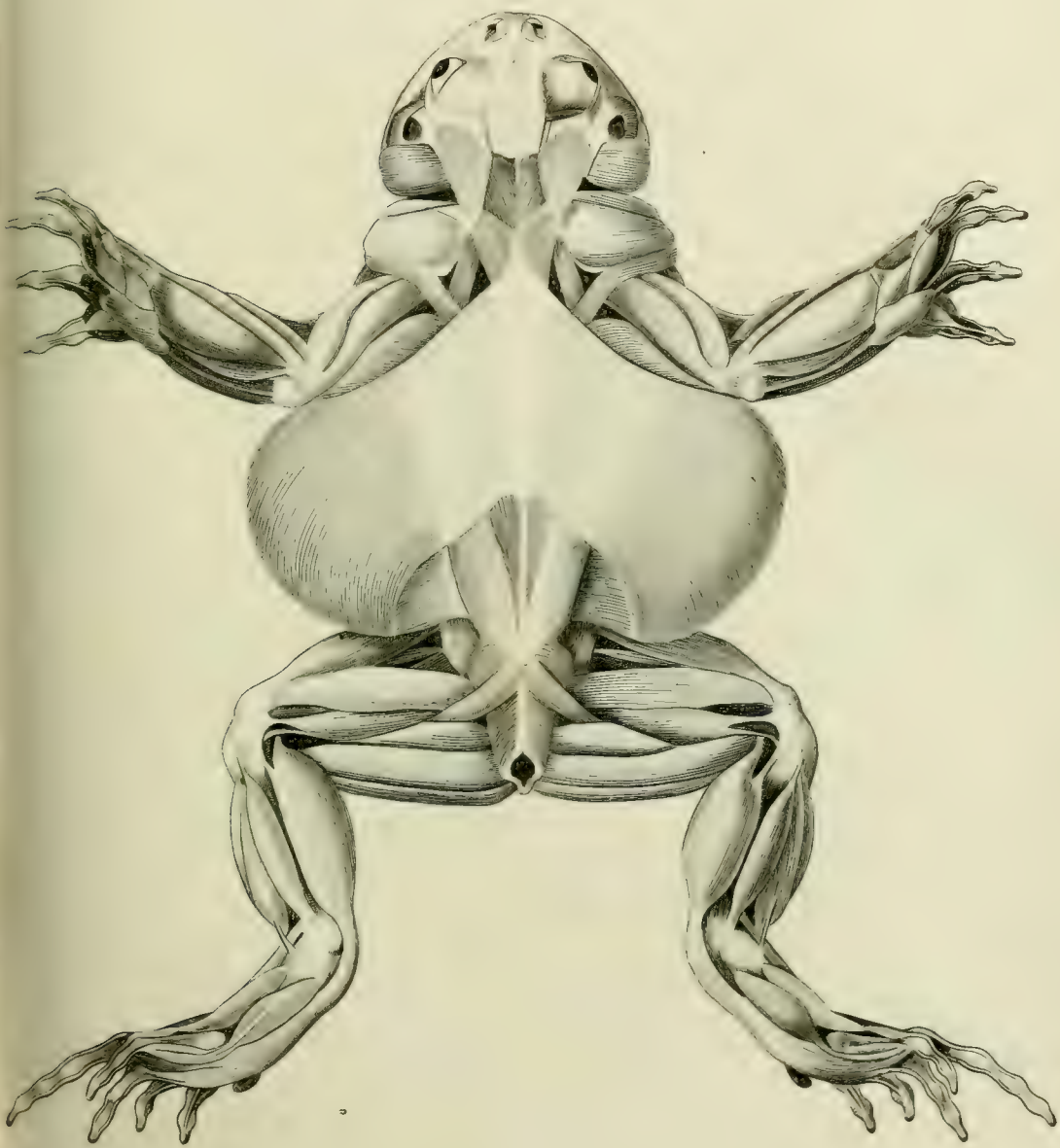
Fig. 35.

Fig. 36.



P. Duménil Direxit

Fig. 57.



P Duménil Direxit

Fig. 38.

P. Duménil Direxit

Fig. 60.

Fig. 59.

Fig. 61.

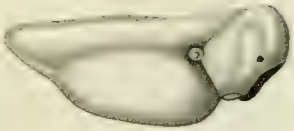


Fig. 62.

Fig. 63.

Fig. 64.

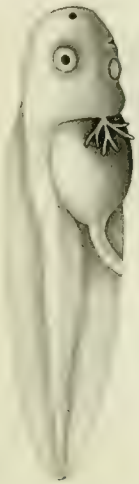


Fig. 67.

Fig. 66.

Fig. 68.

Fig. 65.

Fig. 70.

Fig. 71.

Fig. 72

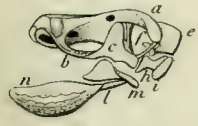


Fig. 81.

Fig. 82.

Fig. 80

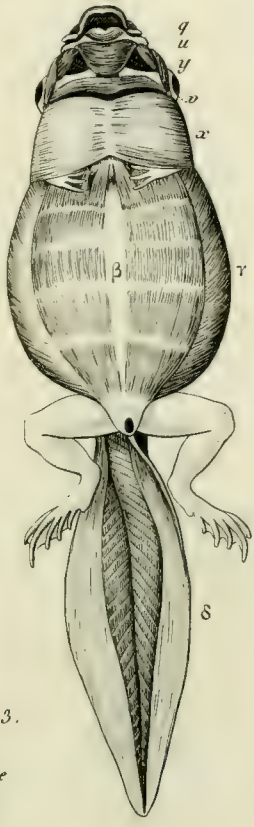


Fig. 73.

Fig. 83.

Fig. 74

Fig. 84.

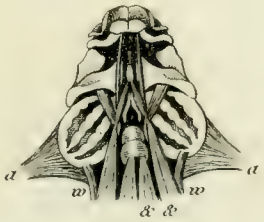


Fig. 75.

Fig. 76.

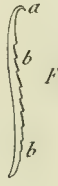


Fig. 69.

Fig. 77.

Fig. 78.

Fig. 79.

Fig. 85.

Fig. 89.

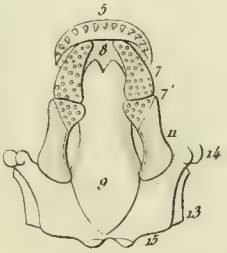


Fig. 86.

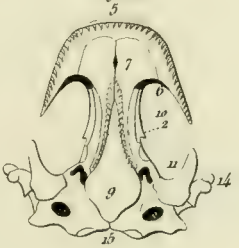


Fig. 87.

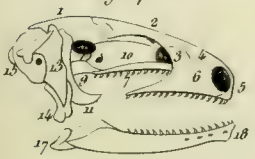


Fig. 90.

Fig. 91.

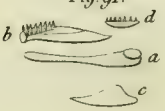


Fig. 88.

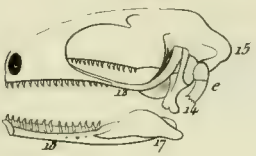


Fig. 94.

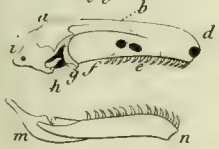


Fig. 93.

Fig. 95.

Fig. 96.

Fig. 97.

Fig. 99.

Fig. 98.

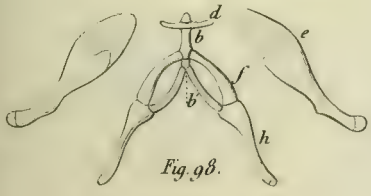


Fig. 92.

Fig. 100.

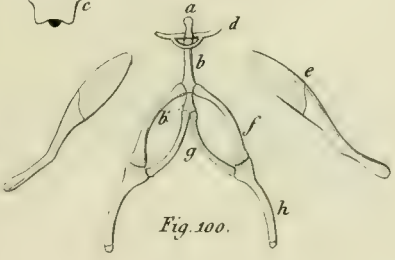


Fig 106.

Fig. 101.

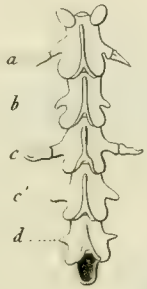


Fig. 102.

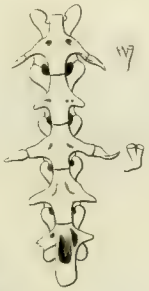


Fig 107

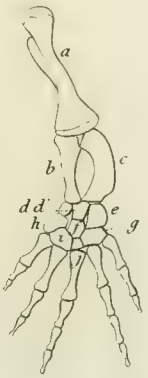


Fig. 103.

Fig 108.

Fig 109.

Fig 110.

Fig. 105.

Fig. 104.

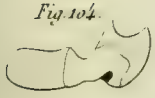


Fig. 112.

Fig. 111.

Fig. 115.

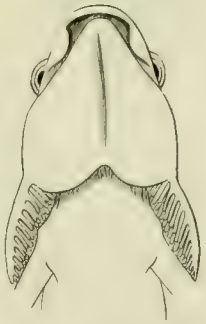


Fig 114.

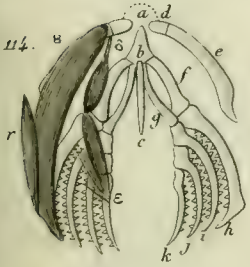
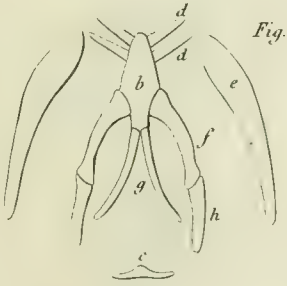


Fig. 113.



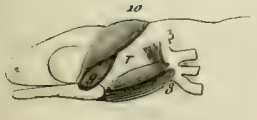


Fig. 118.

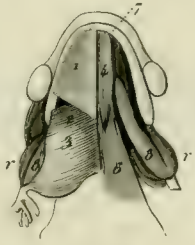


Fig. 116.

Fig. 117.

Fig. 119.

Fig. 120.

Fig. 121.

Fig. 123.

Fig. 122.

Fig. 124.

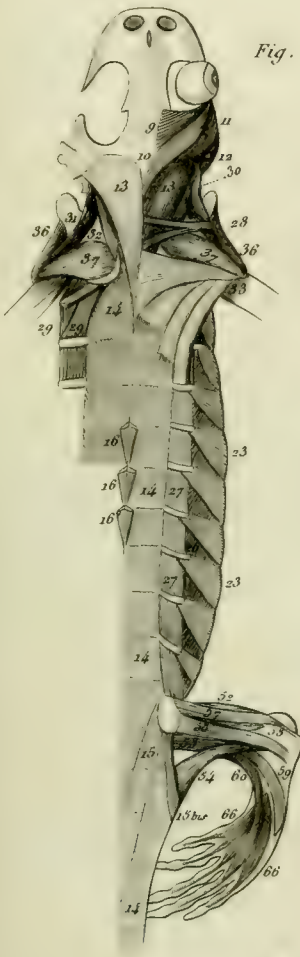


Fig. 126.

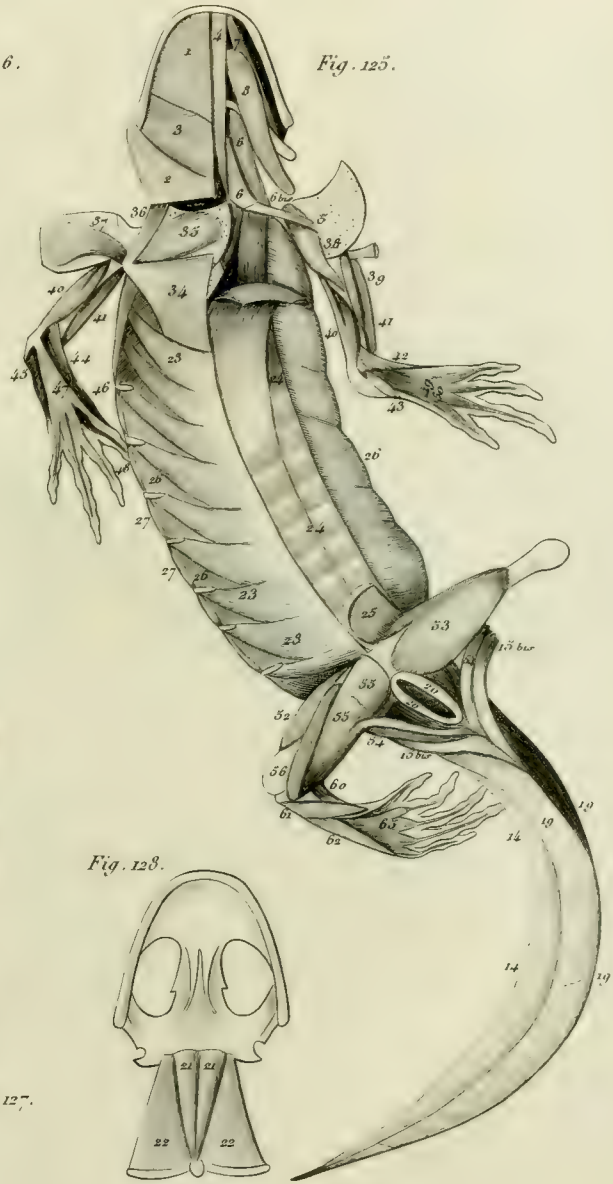


Fig. 125.

Fig. 127.

Fig. 128.

P. Duménil Pinxit

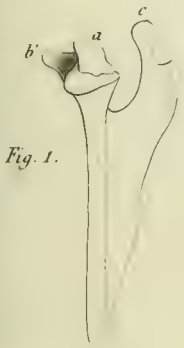


Fig. 1.

Fig 5.

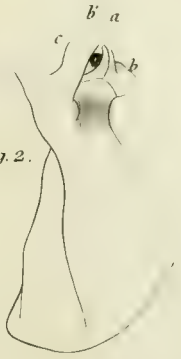


Fig. 2.

Fig. 3.

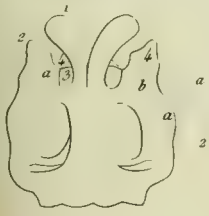


Fig. 4.

Fig. 7.

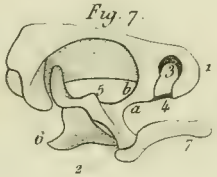


Fig. 6

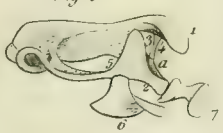


Fig. 8

Fig. 9.

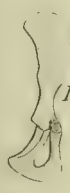


Fig 10.

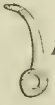


Fig 11

Fig. 12

Fig. 13.

P. Duménil. Direxit

MÉMOIRE

DE

NOSOLOGIE VÉGÉTALE,

PRÉSENTÉ A L'ACADÉMIE DES SCIENCES

LE 30 SEPTEMBRE 1833

MÉMOIRE

DE

NOSOLOGIE VÉGÉTALE.

OBSERVATIONS PHYSIOLOGIQUES

SUR LE DÉVELOPPEMENT DES GALES CORNICULÉES DE LA FEUILLE DU TILLEUL DE HOLLANDE (1), ET SUR LA CAUSE QUI LES PRODUIT.

PAR P.-J.-F. TURPIN.

Sous le titre de *Nosologie végétale* je me propose de publier, avec figures, tous les états anormaux que présentent les végétaux dans leurs divers organes constituans, tels que les monstruosités, soit celles qui résultent d'organes soudés entre eux, d'organes avortés ou d'organes surnuméraires, soit celles occasionées par des causes extérieures et irritantes, comme par le choc de quelques corps étrangers, ou, bien plus souvent, par la piqûre de ces nombreux insectes phytophages ou herbivores.

J'ajouterai à ces nombreux cas de Nosologie ceux, plus nombreux encore, qui proviennent du mauvais état des milieux ou des circonstances environnantes, comme le défaut de chaleur, d'air et de lumière, la privation de substances liquides et nutritives, la trop grande accumulation de ces substances et surtout de leur défaut de division et de préparation.

Je ferai connaître ces productions organisées, microsco-

(1) *Tilia platyphyllos*, Vent. *Tilia Europœa*, Will. Tilleul des jardins et des places publiques. Tilleul à larges feuilles.

piques, tantôt animales et tantôt végétales qui naissent et s'établissent à la surface des jeunes tiges, des feuilles et des fruits, sous le simple aspect, quelquefois, d'une crasse ou de noir de fumée répandu.

On verra que ces productions mal observées, ou plutôt toutes inconnues, nuisent beaucoup aux plantes qui leur servent de territoires, soit en se nourrissant à leurs dépens, soit en les enduisant de manière à les priver d'air et de lumière, soit enfin en empêchant l'absorption et la sortie des diverses excrétions.

On verra que ces crasses noires ou enduits, qui ont été considérées par les cultivateurs comme une simple malpropreté, sont toujours le résultat ou l'agglomération d'un grand nombre d'êtres organisés. Je citerai en passant, comme exemple, la crasse noire qui recouvre quelquefois les jeunes tiges, les feuilles et les fruits des Orangers et des Citronniers, dont j'ai fait l'analyse miscroscopique tout dernièrement. Cette crasse, pour la vue simple, offre sous le microscope une forêt immense de petits végétaux parasites d'autant plus curieux qu'ils tiennent aux conferves par leurs tiges et aux champignons par leurs apothécions, péricarpes ou porte-graînes. Une autre crasse, également noire, mais d'un aspect moins velouté (1) que celles dont je viens de parler, recouvre et salit d'une manière dégoûtante les feuilles des Pêchers en espalier mal exposés, celles de la Vigne, des Pommiers, etc. C'est toujours le même végétal parasite qui le produit : seulement, ici, ce végétal n'est encore qu'en herbe ; il n'offre que des tigellules confervoïdes peu avancées et par conséquent sans apothécions ou sans fructifications.

La différence qu'on remarque dans le plus ou le moins

(1) Moins velouté, à cause de l'absence des apothécions.

de développement de cette production confervoïde, provient, d'une part, de la persistance des feuilles de l'Oranger, ce qui lui donne le temps de fructifier, et de l'autre, de la chute de celles du Pêcher à l'automne, ce qui l'arrête au milieu de sa végétation.

Je joins ici les dessins de cette nouvelle et très curieuse production végétale dont on trouvera à la fin de ce Mémoire la description dans une explication de figures très détaillée.

Dans ce travail j'indiquerai souvent les moyens préservatifs ou hygiéniques propres à se garantir de ces nombreuses maladies et quelquefois ceux de s'en débarrasser une fois produites.

Bien convaincu que c'était dans l'étude des monstruosités et des diverses maladies des plantes qu'on pouvait le plus sûrement arriver à découvrir les rapports d'analogies qui les lient entre elles, à connaître la véritable détermination de chacun de leurs organes et des fonctions physiologiques qui en dépendent, à avoir, enfin, des idées nettes et précises sur l'accroissement unique et extensif des masses tissulaires végétales, je me suis attaché, depuis longues années, à recueillir, à observer, à décrire et à dessiner un très grand nombre de ces cas anormaux.

Mes collections en ce genre, commencées pendant mon séjour en Amérique, se sont considérablement augmentées depuis mon retour à Paris, tant par les exemples que je me suis procurés que par ceux qui m'ont été communiqués par diverses personnes.

J'ai de préférence étudié les maladies et les monstruosités propres aux végétaux cultivés, comme nous interressant d'une manière plus directe, et plus particulièrement encore celles qui nuisent aux arbres fruitiers, étant dans l'intention de les publier comme un complément nécessaire à notre Traité sur ces arbres utiles.

C'est sur l'une de ces nombreuses maladies que je vais avoir l'honneur d'entretenir aujourd'hui l'Académie.

Tout le monde connaît les gales ou les excroissances corniculées qui se développent pendant l'été, et qui couvrent quelquefois toute la face supérieure des feuilles du Tilleul de Hollande; mais personne, à ma connaissance, ne les a étudiées, ni suivies dans leurs développemens, dans leur organisation tissulaire et bien moins encore dans la cause qui les produit.

Dès la fin de mai, on commence à voir quelques feuilles de ce Tilleul dont la face supérieure offre çà et là de petits mamelons tuberculeux, d'un vert jaunâtre, qui s'élèvent ensuite en autant de petites cornes tubuleuses, munies de poils à l'intérieur, cylindriques ou légèrement déprimées dans le sens de leur longueur, pointues ou obtuses au sommet, droites ou courbées, tuberculées, simples ou quelquefois bifides, velues ou entièrement lisses, jaunâtres ou teintes de rose et de pourpre, selon leur plus grande exposition à la lumière. Ces cornes, du diamètre d'environ une ligne et de six à huit lignes de longueur, naissent sans ordre, le plus souvent isolées; mais aussi on les voit quelquefois, non-seulement réunies par petits groupes, mais encore greffées entre elles par approche de manière à ne plus former qu'une seule masse. Jamais on ne les voit s'élever, et pour cause (1), sur les grosses nervures. Leur base, sous la feuille, est toujours masquée par le développement anormal d'une petite houppe de poils fauves ou roussâtres.

L'analyse microscopique de ces excroissances corniculées apprend que les poils des houppes et ceux développés à

(1) On verra plus loin que l'Arachnide qui occasione ces excroissances ne peut s'établir que dans le tissu cellulaire où elle trouve sa nourriture, et non sur les nervures dures, sèches, et toujours dépourvues de globuline.

la surface des cornes sont blancs, transparens, tubuleux, confervoïdes, non cloisonnés, droits ou légèrement courbés, et colorés à la manière du cheveu, c'est-à-dire au moyen d'une médule d'un jaune ambré qu'ils contiennent dans leur intérieur.

Lorsqu'on coupe de petites tranches transversales de ces cornes, et qu'on les examine ensuite sous le microscope armé du seul grossissement de trois cents fois, on voit que l'épaisseur des cornes n'est plus une continuité naturelle du tissu cellulaire de la feuille; on n'y distingue plus les deux organes constituans de ce tissu, la *vésicule* et la *globuline*. C'est un tissu simplement globulaire, amorphe, devenu malade par cause d'une sur-irritation produite; c'est un amas de globules verdâtres, développés sans ordre apparent et seulement enveloppés par la cuticule générale de la feuille qui s'est étendue à mesure que la corne s'est accrue.

On voit, en même temps, que des parois intérieures des cornes il s'est développé une grande quantité de longs poils confervoïdes, analogues à ceux qui remplissent complètement les six loges des jeunes péricarpes du Châtaignier ou à ceux cloisonnés qui tapissent intérieurement les deux valves de la cosse ou du péricarpe de la féve de marais.

Ces poils, qui ne diffèrent de ceux qui sont situés à l'extérieur, que parce qu'ils sont plus grands, se dirigent horizontalement vers le centre de la cavité où, se rencontrant, ils s'enchevêtrent et se feutrent les uns dans les autres.

Parmi ces poils confervoïdes naît, vit, se développe et se reproduit une Arachnide nouvelle de la famille des Rhinaptères et assez voisines des Acarus ou Sarcoptes pour qu'on puisse, en attendant de nouvelles observations, la laisser dans ce genre (1). Je la nommerai, provisoirement,

(1) Latreille, auquel je communiquai mon travail, et qui eut la complai-

Sarcopte des gales corniculées de la feuille du Tilleul (*Sarcoptes gallarum tiliæ*).

Cette Arachnide, qu'on ne trouve dans l'intérieur des gales que du 15 mai au 15 août, offre une population composée d'un nombre assez considérable d'individus de tout âge et dans tous les états de développemens ou de métamorphoses, depuis l'œuf pondu jusqu'à l'animal parfait. Tous ces états gradués, que l'on a eu même temps sous les yeux, permettent d'observer et d'étudier convenablement cette nouvelle Arachnide.

L'œuf nouvellement pondu est sphérique ou légèrement ovoïde ; son enveloppe molle, muqueuse et transparente, contient ou plutôt est remplie d'une substance verdâtre, granuleuse, organisable, qu'on peut justement comparer à celle qui forme la cicatricule et le germe de tous les œufs, mais plus particulièrement au germe très gros, vert et granuleux de ceux de plusieurs espèces de Crustacées, notamment ceux du Homard (*Astacus marinus*), que M. le docteur Coste et moi avons, tout dernièrement, analysés sous le microscope.

Ces œufs, dont l'enveloppe molle est susceptible de s'accroître en dehors de la mère, deviennent bientôt ovalaires, et, en continuant de s'allonger, ils prennent la forme d'un petit cylindre légèrement courbé, obtus aux deux extrémités, avec un diamètre plus grand dans la partie postérieure; je dis postérieure parce que, comme on va le voir dans l'instant, c'est du côté opposé qu'est dirigée, dans l'œuf, la tête du jeune Sarcopte.

Dans l'intérieur de cette enveloppe, toujours d'une

---

sance d'observer avec moi ce Sarcopte sous le microscope, m'engagea à consulter particulièrement le genre *Ytrium*, dont je n'ai pu, jusqu'à présent, me procurer le caractère.

grande transparence, on aperçoit que la masse granuleuse organisable s'accroît par le développement successif d'un plus grand nombre de globules ; qu'elle se moule sous son enveloppe, et que, en elle, il y a déjà un commencement d'organisation, une ébauche véritable du Sarcopte parfait. Mais ce n'est encore qu'un corps dépourvu de tête et de pieds apparens. L'être, en ce premier état d'organisation, n'est encore qu'une sorte de végétal, absorbant, par tous les points de sa surface, la substance qu'il s'assimile.

Dans d'autres œufs plus avancés on distingue clairement, du côté du petit bout, et sur le corps dont je viens de parler, une tête et seulement deux paires de pates qui sont, comme on va le voir tout à l'heure, les pates antérieures du Sarcopte entièrement achevé.

En ce dernier état on peut croire que le Sarcopte, instinctivement tourmenté par le besoin de commencer une nouvelle existence, brise, en s'aidant de ses crochets et de sa trompe, une enveloppe d'abord protectrice, qui, maintenant, ne peut plus servir qu'à le gêner.

Le Sarcopte, ainsi dégagé, fait, pour la première fois, usage de ses quatre premières pattes pour marcher, et de sa trompe, qu'il enfonce dans le tissu globulaire de la corne, pour y sucer et se nourrir de l'eau muqueuse qui s'y trouve.

Il n'a encore, comme on vient de le voir, que quatre pates, malgré qu'il soit destiné à en avoir huit. Les quatre autres, très différentes des premières, ne se développent qu'après que l'animal est libre et qu'il a atteint à peu près toutes ses dimensions. Quoique je n'aie point vu de vieilles peaux parmi les Sarcoptes, il est pourtant assez probable qu'ils en changent au moins une fois, et que c'est entre deux peaux que se forment les deux paires de pates postérieures.

Je vais maintenant parler du Sarcopte ayant acquis son entier développement.

Il se compose, 1° d'une petite tête conique, tronquée au sommet et terminée en-dessous par une trompe courte et pointue, que je n'ai pu bien examiner dans ses parties à cause de l'exiguité de cet organe. Cette tête paraît entièrement dépourvue d'yeux et d'antennes. Le corselet semble également manquer; à moins, ce qui pourrait être, que cette pièce, très petite, ne se confonde ou ne soit cachée sous la partie antérieure et boursouflée du corps; 2° d'un corps vésiculeux, allongé, obtus aux deux extrémités, sans anneaux, arrondi ou bombé du côté du dos, aplati du côté du ventre et terminé par deux petits mamelons situés près de l'anus. Ce corps blanchâtre, nu, mou, contractile et susceptible de se courber selon la volonté de l'animal, ressemble assez bien à un petit sac transparent entièrement rempli de granules verdâtres.

Sous la partie tout-à-fait antérieure du corps sont attachées deux paires de grosses pates cornées et plus solides que le corps, composées chacune d'une jambe et d'un tarse d'une seule pièce terminée par un ongle ou crochet courbé et très aigu. A l'extrémité, et du côté extérieur de la jambe et du tarse, se trouve une épine moins longue que le crochet.

A quelque distance de ces deux paires de pates et vers le milieu du corps on en voit deux autres paires, sortes de fausses pates, très rudimentaires, mais qui cependant fonctionnent chaque fois que le Sarcopte change de lieu. Ces pates se composent seulement d'une petite cuisse terminée par une dernière pièce filiforme et courbée en crochet.

Ce Sarcopte, mesuré à l'aide du micromètre, offre les dimensions suivantes : longueur, un quinzième de milli-

mètre; largeur ou diamètre du corps un soixantième de millimètre.

Parmi tous les objets que je viens de décrire, se trouve encore un grand nombre de globules verdâtres qui ne sont, au moins pour la plupart, que les excrémens produits par les Sarcoptes.

On concevra aisément qu'un animal dont l'habitation, dont le monde tout entier est l'intérieur d'une petite corne, dont le grand nombre de poils parmi lesquels il vit sont pour lui une forêt toujours humide, qui privé, en grande partie, d'air et de lumière, et trouvant abondamment sa nourriture sur le point où il est né, un tel animal doit nécessairement, en raison de toutes ces circonstances environnantes, être décoloré ou blafard, mou, aqueux, lymphatique, avoir la peau excessivement mince et être très lent dans tous ses mouvemens : aussi est-il rare de le voir marcher; ses pates seules et surtout les postérieures sont les parties qu'il remue habituellement.

On concevra également bien que, dans un milieu semblable, des yeux et des antennes auraient été sans aucune utilité pour le Sarcopte. Aussi, comme on l'a vu, en est-il privé.

Ici se termine la partie descriptive et toute positive de ce Mémoire.

On peut maintenant se demander, sans sortir des bornes de la vraie science, d'où provient ce Sarcopte, dont l'existence est si éphémère, et dont le seul milieu qui lui convienne est l'intérieur d'une gale d'une feuille qui se renouvelle chaque année. Comment et par quelle voie un ou plusieurs œufs arrivent-ils dans l'épaisseur du tissu cellulaire de la feuille du Tilleul au moment où elle commence à s'étendre? Est-il la cause occasionnelle et irritante du développement de l'excroissance corniculée? ou bien la

corne développée par une autre cause d'irritation inconnue favorise-t-elle celui du Sarcopte en lui offrant un asile sûr et commode dans lequel sa nourriture se trouve préparée à l'avance? ou bien, enfin, peut-on croire que les premiers individus de ce Sarcopte proviennent immédiatement, comme génération spontanée, soit comme gemmation ou extension naturelle du tissu vivant, soit de la substance végétale à mesure qu'elle se désorganise?

Ces questions ne sont pas nouvelles, on les a souvent répétées au sujet des nombreuses espèces de Vers intestinaux et de tous ces animalcules qui naissent, vivent et meurent dans l'épaisseur des tissus et des mucosités de tous les êtres organisés, comme dans un monde qui leur est propre.

On s'est souvent demandé si le Sarcopte (1) que l'on trouve parfois dans le pus du bubon de la gale humaine, si identiquement le même (2) que celui qui vit sous les croûtes du vieux fromage et dans quelques autres substances, était la cause irritante de la gale, ou si cette maladie cutanée due à une cause interne favorisait seulement le développement du Sarcopte, en offrant à ses œufs, plus

---

(1) *Acarus scabiei*, Fab., *Sarcoptes scabiei*, Latr., Ciron de la gale.

(2) Je n'ai point vu de Sarcoptes extraits, en ma présence, d'une pustule de gale humaine ; mais en supposant, comme on le doit, que les très bonnes figures données par M. le docteur Gallée aient été faites d'après des individus trouvés, par lui, dans le pus d'un galeux, on peut, en comparant ces figures au Sarcopte en nature, qui vit sous la croûte du vieux fromage, s'assurer de l'identité parfaite qui existe entre ces Sarcoptes, comme j'en ai rendu témoin M. le professeur Duméril. Cette identité n'a rien, ce me semble, qui puisse étonner. Pourquoi le même animal ne vivrait-il pas, en même temps dans deux substances aussi analogues que celle du vieux fromage et celles du pus d'une pustule de gale? Il serait curieux de placer sous un verre de montre, appliqué pendant quelques jours sur la peau, une certaine quantité de Sarcoptes du fromage pour voir s'ils s'insinueraient dans la peau de manière à y développer la gale ordinaire. Cette expérience est des plus faciles à faire.

que microscopiques et profusément répandus dans l'espace, un milieu convenable à leur développement.

Cette dernière manière de voir, qui paraît le plus en rapport avec nos connaissances actuelles, ne peut tout-à-fait convenir au Sarcopte des gales corniculées de la feuille du Tilleul ; il est probable que, dans ce cas, comme dans le développement du Bédeguar mousseux de l'Églantier et de tant d'autres monstruosités analogues, que c'est à la présence du Sarcopte dans le tissu cellulaire de la feuille et à l'irritation qu'il y produit qu'est due la cause de ces nombreuses excroissances tissulaires. Mais comment, chaque année, les premiers œufs de ce Sarcopte, qui ne peut exister en dehors des gales, se retrouvent-ils dans le tissu cellulaire des feuilles nouvelles et naissantes ?

On peut assez raisonnablement supposer que les Sarcoptes en mourant dans l'intérieur des gales, y abandonnent un grand nombre d'œufs qui, isolés par la décomposition de la feuille et déposés sur la terre, y restent jusqu'au printemps suivant, époque à laquelle la chaleur et le vent les élèvent dans l'atmosphère, avec des milliers d'autres corps reproducteurs végétaux et animaux, et qu'alors rencontrant, par hasard, le milieu qui leur convient, la face molle et inférieure de quelques-unes des jeunes feuilles du Tilleul, ils s'y collent et sont bientôt introduits, par voie d'absorption, dans l'épaisseur du tissu cellulaire.

L'étude toute particulière que j'ai faite des êtres organisés microscopiques les plus simples, et chez lesquels j'ai presque toujours reconnu les moyens de leur reproduction, m'éloigne de toute idée de génération spontanée ou d'êtres organisés pouvant immédiatement se former par extension des tissus vivans d'une autre espèce d'êtres, ou, ce qui paraît plus impossible encore, par la réorganisation de la matière en dissolution.

Cette étude m'a mis à même de reconnaître cette loi : *que tout être organisé résulte toujours, par extension, de la substance d'une mère semblable qui précède.*

Ces générations spontanées, qui furent d'abord si nombreuses, se sont successivement effacées à mesure que l'on a mieux observé. On pourrait aujourd'hui presque dire que, parmi le très petit nombre de celles qui restent douteuses, il n'en est peut-être pas une seule capable de résister à l'observation constante et à l'action suivie du microscope.

Dans ce Mémoire j'ai fait connaître une des nombreuses maladies auxquelles sont sujets tous les êtres végétaux. J'en ai fait connaître la cause irritante et le développement organique et physiologique. On a vu que le tissu cellulaire normal de la feuille malade, tissu composé de ses deux organes constituans, la *vésicule* et la *globuline*, en s'étendant ou en s'élevant dans la formation de la corne, s'était appauvri au point de n'être plus qu'un tissu globulaire ou un simple amas de globuline recouvert par la cuticule générale de la feuille.

Embarrassé du choix, j'ai donné aujourd'hui la préférence au Tilleul, comme à l'un des plus anciens habitans de nos forêts, devenu depuis l'ami du logis par l'ombrage frais qu'il nous procure, et comme étant souvent le confident de nos plaisirs et de nos peines (1), comme à un arbre utile tant par son bois et les cordes que son écorce nous fournit, que par les qualités bienfaisantes et aromatiques de ses fleurs.

J'ai signalé une Arachnide nouvelle, d'une structure

---

(1) Là, le Tilleul docile en quinconce planté,
Ombrage un vert tapis, siége de la beauté.

CASTEL, *Poème des Plantes*, Chant I^er^, pag. 6.

toute particulière, et dont l'œuf offre, dans son mode de développement, une exception à la règle générale.

On sait que l'œuf de tous les animaux ovipares ne croît plus après son expulsion. Ceux du Sarcopte que je viens de décrire continuent de croître, en dehors, après avoir été pondus, jusqu'à ce qu'ils aient atteint les dimensions et la forme du Sarcopte parfait, Sarcopte que l'on voit, en même temps, se former sous l'enveloppe muqueuse, transparente et accrescente de l'œuf.

En étudiant comparativement le Sarcopte du vieux fromage, j'ai remarqué que l'œuf de cette espèce, d'abord petit, sphérique et assez lisse, croissait aussi après son expulsion, qu'il devenait ovale et comme tuberculeux. Mais son accroissement n'atteint guère que le quart de la longueur du Sarcopte parfait.

J'ai aussi observé que les petits de cette espèce, au sortir de l'œuf, ont tantôt six et tantôt huit pates, tandis que tous les adultes en ont constamment huit. Cette différence dans le nombre des pates des individus naissans indique-t-elle le sexe? Ceux qui, en sortant de l'œuf, n'ont encore que six pates, et qui doivent en acquérir deux autres en changeant de peau, ne sont-ils que des femelles? C'est une observation assez facile à faire. Il ne s'agit, pour cela, que d'isoler et de nourrir séparément les deux sortes d'individus jusqu'au moment de la reproduction.

Réaumur, dans ses *Mémoires pour servir à l'Histoire des Insectes*, T. III, Mém. 12, page 422, pl. XXXIV, fig. 7 et 8, parle d'une autre gale, assez rare, qui se développe sous forme de bourrelets marginaux, et qui recroqueville la feuille du Tilleul de manière à lui donner, comme il le dit, la ressemblance d'une cuillèreà pot. Soupçonnant que la cause de ce bourrelet devait se trouver dans

la présence de quelques insectes, il les y chercha longtemps sans pouvoir les trouver; mais enfin, en s'y prenant plus tôt, dès les premiers jours de mai, il découvrit de très petits vers blancs qui y étaient nichés.

« En certains endroits du bourrelet, dit Réaumur, je trouvais trois à quatre de ces vers, et je n'en trouvais qu'un ou deux dans d'autres endroits du même bourrelet. Ils étaient longuets, et ne paraissaient pas plus gros qu'un crin de cheval l'est à la vue simple, quoiqu'ils fussent grossis par une forte loupe; ils étaient assez tranquilles : cependant il ne m'a pas été possible de bien voir la figure de leur tête; je ne leur ai point aperçu de jambes. Je n'ai point cherché à voir les insectes dans lesquels ils se métamorphosent, qui m'auraient apparemment échappé par leur extrême petitesse. »

Deux feuilles de Tilleul représentant ces bourrelets marginaux sont figurées au bas de la planche citée plus haut, mais sans aucune indication, soit de l'intérieur des bourrelets, soit des petits vers reconnus par Réaumur. Ces petits vers blancs, mal observés, seraient-ils les mêmes que le Sarcopte des cornes que je viens de faire connaître? Cela pourrait être; c'est ce dont je m'assurerai au mois de mai prochain. Sur la même planche, on voit encore une troisième feuille de Tilleul, sur laquelle sont figurées les gales corniculées qui font le sujet de ce Mémoire; mais Réaumur ne les décrit point : seulement, dans l'explication des figures de cette planche, il dit : « La figure 9, est celle d'une feuille de Tilleul, chargée de ces gales que nous nommons *gales en clou.* »

Dans un prochain Mémoire, si l'Académie veut bien m'accorder la parole, j'aurai l'honneur de lui exposer la cause physiologique, constante, mais pourtant exceptionnelle, qui occasionne la grande fécondité de la Vigne,

en déterminant le scion ou le cep annuel à produire deux, trois, quatre et quelquefois cinq grappes latérales au lieu d'une seule, mais qui alors, d'après la loi générale, terminerait le scion, comme, par exemple, celles toujours uniques du Lilas ou du Marronnier d'Inde.

La même cause physiologique expliquera, en même temps, pourquoi la grappe solitaire et terminale est multipliée et successivement déjetée de côté, de manière à paraître comme si en réalité elle était née dans la position qu'elle occupe, c'est-à-dire, extra-axillaire ou opposée au pétiole de la feuille (1).

L'homme finissant en toute chose par où il aurait dû commencer, on ne s'étonnera point de ce que la Vigne, sur laquelle on a tant écrit, soit encore si peu connue dans son organisation, dans ses habitudes et dans le mode exceptionnel de son développement annuel.

Le *Connais-toi-toi-même* des Anciens, pris dans le sens le plus général, la connaissance du physique et du moral, sera la dernière étude de l'homme.

---

(1) Ce Mémoire, accompagné de deux planches in-folio, à été présenté à l'Académie et renvoyé à l'examen de MM. Dutrochet, Auguste de Saint-Hilaire et Adrien de Jussieu, qui en ont fait un rapport.

EXPLICATION DES PLANCHES.

PLANCHE I.

Fig. 1. Une feuille de Tilleul de Hollande (*Tilia platyphyllos*) de grandeur naturelle, sur laquelle il y a un grand nombre d'excroissances corniculées, de tous âges et de toutes grandeurs. *a* tige dont dépend la feuille, *b* nœud vital ou conceptacle du nouvel individu (bourgeon) qui doit en sortir, *c* cicatricule occasionnée par la chute de la stipule, *d* bourgeon ayant ses deux premières écailles situées latéralement.

Fig. 1*a*. Excroissances corniculées détachées d'une feuille et offrant des exemples de cornes soudées par approche, et d'autres tuberculées ou contournées.

Fig. 2. Une corne très grandie; on voit qu'elle est velue et légèrement déprimée.

Fig. 3. Une autre plus grossie et coupée horizontalement pour faire voir que ces cornes sont creuses et que de leurs parois intérieures il naît un grand nombre de poils confervoïdes.

Fig. 4. Une portion de feuille vue en-dessous, afin de faire connaître que du point où s'élève, de l'autre côté, la corne il se développe, par la même cause d'irritation, une houppe de poils fauves.

Fig. 5. Un poil extérieur de la corne, planté sur une petite portion de la cuticule *a*, et vu, par transparence, sous le microscope. Ce poil tubulaire, et dont l'épaisseur du tube est verdâtre, contient, dans son intérieur, des granulations incolores.

Fig. 6. Une masse détachée de l'intérieur d'une corne, vue sous le microscope, et composée d'un grand nombre de poils confervoïdes, d'œufs de grosseurs différentes et de Sarcoptes plus ou moins développés. *a, a, a, a,* bases des poils par lesquelles ils tenaient à la paroi intérieure de la cavité de la corne, et petites portions de tissu globulaire arrachées de la paroi.

Fig. 7, 7, 7, 7. OEufs de diverses grosseurs.

Fig. 8, 8. Sarcoptes commençant à se former dans leur enveloppe.

Fig. 9, 9 et 10. D'autres plus avancés chez lesquels on distingue déjà une tête et deux paires de pates antérieures.

Fig. 11. Un Sarcopte libre, parfait et en mouvement; son corps mou est, pour l'instant, légèrement contourné en S.

Fig. 11″. Un autre dont le corps offre une masse ovalaire, remplie de globules verts.

Fig. 11′. Un autre, posé de manière à faire voir les petits mamelons situés près de l'anus.

Fig. 12. Une pate antérieure, au trait, très grandie; *a* cuisse, *b* jambe, *c* tarse, *d* ongle ou crochet.

Fig. 13. Une pate postérieure, au trait, très grandie; *a* cuisse, *b* partie rudimentaire qui représente la jambe, le tarse et le crochet de la pate antérieure.

Fig. 14. Deux poils confervoïdes, cloisonnés, contenant quelques globules et détachés de la surface intérieure des valves du péricarpe de la Féve de marais.

Observation. Ces deux poils tubuleux, clos et obtus par leur extrémité, cloisonnés de distance en distance par des diaphragmes transversaux, incolores, sont analogues aux prétendus vaisseaux des masses tissulaires des végétaux, dans lesquels on ne tardera pas à voir des individus distincts, simplement agglutinés les uns aux autres, confervoïdes et vivant à l'état d'agglomération, de manière à former ces masses arboriformes que nous nommons du *bois*.

Fig. 15. Un œuf granuleux du Sarcopte du vieux fromage, vu sous le microscope.

Explication *de la Planche représentant les feuilles malades de l'Oranger et du Pêcher.*

PLANCHE II.

FUMAGINE DES ORANGERS.

Fumago citri. Pers.

Noir des cultivateurs.

Fig. 1. Feuille de Citronnier, de grandeur naturelle, vivante, attachée à son rameau, couverte en grande partie de taches couleur de suie, irrégulières dans leur étendue et d'un aspect velouté. Ces taches sont de véritables forêts microscopiques composées d'innombrables individus végétaux parasites ou au moins naissant sur l'épiderme d'autres végétaux qui leur servent de territoire ou simplement de point d'appui, comme, par exemple, le marbre des statues au *Lepra antiquitatis* ou *Collema nigrum, Ach.*

Les jeune tiges, les calices et les fruits sont également attaqués de cette sorte de vermine végétale.

Fig. 2. Portion de feuille très grandie sur laquelle se trouve établie la Fumagine, grossie à l'aide d'une forte loupe. On voit sur le bord de la petite forêt, qui donne sur la feuille, les nombreuses tigellules confervoïdes et traçantes d'où s'élèvent ensuite les apothécions noirs ou appareils fructifères de ces petits végétaux.

Fig. 3. Individus, vus sous le microscope armé du grossissement de trois cents fois.

Une quantité innombrable d'individus filamenteux, tubuleux, articulés ou cloisonnés, rameux, confervoïdes, comme moniliformes, transparens, verdâtres, traçans, formant en s'enchevêtrant une sorte de lacis que les botanistes ont appelé le *thalle* ou *croûte*, mais qu'ils ont eu tort d'individualiser, puisque en réalité ce thalle est une forêt microscopique composée d'un nombre prodigieux d'*individus distincts*.

Ces tigellules, d'abord très fines, sont droites et incolores. Ce n'est qu'en se développant qu'elles deviennent verdâtres et

que leurs articles en se gonflant les rendent un peu moniliformes.

Sur ces tigellules développées et du sommet latéral de l'un des articles (véritable mérithalle rigoureusement comparable à ceux des végétaux appendiculés) naissent ou des petits rameaux de continuité, fig. 4, *b*, ou des appareils reproducteurs, fruits, c'est-à-dire péricarpes et graines, qui commencent par un globule vésiculaire *c*, et qui s'étendent ensuite en un tube corniforme, légèrement arqué, terminé en pointe arrondie, strié ou ridé longitudinalement, quelquefois rameux, couleur de suie, plus transparent et verdâtre au sommet, lequel s'ouvre et s'évase en petits lobes (huit?) comme, par exemple, les péricarpes capsulaires des *Primulacées*, pour laisser échapper les innombrables seminules ou corps reproducteurs sphériques et incolores que ces péricarpes tubuleux contiennent. Ces corps reproducteurs, nés par extension des parois intérieures du tube péricarpien, présentent, sous le microscope, un mouvement de grouillement dont j'ignore la cause. *a*, apothécion rameux, dont le sommet semble s'être allongé tout nouvellement; *a'*, extension nouvelle paraissant être sortie du tube ancien; *c*, un autre également rameux; *b*, apothécion simple non ouvert; *d*, deux autres plus avancés, ouverts au sommet, et lançant en *f* leurs seminules. Un autre plus avancé; *e*, on voit quelquefois au sommet de certains apothécions un pinceau composé de filamens très fins, incolores, d'inégales longueurs et cloisonnés; *g* épiderme transparent, incolore, réticulé, ayant appartenu à la feuille de Citronnier sur laquelle végétait la petite forêt microscopique.

Fig. 4. Un individu plus grossi, pour bien faire sentir comment les apothécions naissent, par extension, du sommet latéral de l'un des articles ou mérithalles de la tigellule traçante; *a* tigellule articulée, moniliforme, rameuse; *b* jeune rameau latéral qui aurait tout aussi bien pu devenir un apothécion, que dans les végétaux appendiculés un bourgeon peut s'arrêter en une fleur ou s'emporter en une branche.

Ce jeune rameau est encore incolore, et ses articles non encore gonflés; *c* apothécion vésiculaire, naissant, strié; *d id.*, plus avancé.

Observation. Une chose extrêmement remarquable, et qui a toujours excité mon admiration dans toutes mes observations d'Organogénie comparée, c'est non-seulement ce principe unique d'après lequel la puissance créatrice procède dans le grand développement successif des êtres; non-seulement encore cette loi, qu'elle suit à mesure que les espèces se compliquent, en ne faisant que surajouter de nouvelles parties à des parties déjà existantes, mais bien parce que, dès l'origine, pour ainsi dire, des êtres organisés, elle s'empresse de faire presque tout ce qui existe dans les organisations les plus complexes.

Si l'on se reporte à la figure 4, on sentira sans peine que dans cette petite tige confervoïde se trouve déjà, réduit à sa plus simple expression, tout ce qui se trouve dans la branche d'un arbre, moins cependant les organes appendiculaires qui n'existent point encore sur ces végétaux simples ou inappendiculés. Chacun des articles est déjà un véritable mérithalle comparable à ceux des scions annuels des végétaux appendiculés. Aussi est-ce du sommet latéral de chacun de ces mérithalles, point où se trouve le nœud vital des végétaux appendiculés, que naît, soit un nouveau rameau *b*, soit un apothécion *c*, *d*.

Les tiges traçantes de la Fumagine, comme dans tout le reste des végétaux, précèdent nécessairement la fructification; elles sont comparables à ces petites tigellules coralloïdes qui précèdent l'apothécion globulaire et vésiculaire de mon genre *Alysphæria*, confondu dans les forêts de Lépras. Elles sont encore les analogues de ces autres tigellules ramusculeuses et byssoïdes que l'on nomme vulgairement le *blanc de Champignon*, de celles des Vesseloups, etc., etc., qu'à tort quelquefois on a pris pour des racines.

On pourrait peut-être s'étonner de la disproportion qui existe entre les tiges byssoïdes de ces végétaux et leurs fruits, la seule chose apparente pour bien des gens, si déjà nous ne connaissions pas l'énorme Potiron, ou mieux encore la fleur gigantesque du *Rafflesia Arnoldi*, dont la tige existe à peine.

Dans les végétaux appendiculés, la fleur, le fruit, et l'embryon qui en résulte, ne sont, comme on le sait maintenant, qu'une branche arrêtée, terminée, qui naît solitaire-

ment d'un nœud vital ou de l'aisselle d'une feuille le plus souvent rudimentaire; la même chose s'observe sur la Fumagine; le rameau *b* et les apothécions *c*, *d*, de la figure 4, partant de trois points vitaux parfaitement identiques, pouvaient, selon certaines circonstances de végétation, être l'une ou l'autre de ces deux modifications.

Fig. 5. Production confervoïde trouvée parmi les Fumagines.

Elle consistait en une petite souche commune d'où s'élançaient quatre filamens cylindriques, tubuleux, non cloisonnés, légèrement flexueux, allant en diminuant de grosseur de la base au sommet qui se termine en pointe obtuse; ils étaient transparens, incolores, et contenaient dans les deux tiers de leur partie inférieure des granules informes et jaunâtres; on voyait tout à la base le commencement d'un tube intérieur.

FUMAGINE DES PÊCHERS (1).

Fumago Persicæ. Turp.

Noir des cultivateurs.

Fig. Une feuille de grandeur naturelle presque entièrement couverte de Fumagine.

Dans l'angle supérieur du cadre on a figuré une petite masse de Fumagine vue sous le microscope du grossissement de trois cents fois. On voit qu'elle se compose d'un amas consi-

(1) En faisant une espèce particulière de la Fumagine des Pêchers, quoique celle-ci me paraisse la même, plus jeune, que la Fumagine de l'Oranger, j'ai suivi, provisoirement, l'usage des mycologues, qui font autant d'espèces d'Urédos que de plantes sur lesquelles ces productions se développent. Il est certain que les Urédos mieux étudiés se réduiront à un très petit nombre, et que l'on sentira que faire autant d'espèces qu'il y a de plantes pouvant en être affectées, est une chose aussi vicieuse que si l'on multipliait en espèces différentes le *Viscum album* et l'*Hedera helix*, en raison des espèces d'arbres sur lesquels ces deux végétaux vivent en parasites.

dérable d'individus végétaux confervoïdes qui s'étendent, en rayonnant, dans tous les sens.

Au bas de la planche on a représenté tous les états dans lesquels cette conferve naissante se trouvait au moment de l'observation. La lignée d'individus qui se trouve tout-à-fait en bas indique le mode d'accroissement successif de ces petits végétaux parasites et microscopiques. Les plus petits globules blancs, que l'on voit dans cette masse, ont un mouvement monadaire très prononcé.

En comparant ces conferves naissantes aux petites tiges confervoïdes de l'espèce figurée à côté, on reste convaincu que les deux productions sont identiques, et que les premières, seulement en herbe, n'ont pas encore développé leurs apothécions, à cause, très probablement, de la non persistance des feuilles du Pêcher.

MÉMOIRE

SUR

LE TANNIN ET LES ACIDES GALLIQUE, PYRO-GALLIQUE, ELLAGIQUE ET MÉTA-GALLIQUE ;

PRÉSENTÉ A L'ACADÉMIE DES SCIENCES LE 24 FÉVRIER 1834.

MÉMOIRE

MÉMOIRE

SUR

LE TANNIN ET LES ACIDES GALLIQUE, PYRO-GALLIQUE, ELLAGIQUE, ET MÉTA-GALLIQUE;

PAR J. PELOUZE.

Il n'existe peut-être pas de matière organique sur laquelle il ait été fait autant de recherches que sur le Tannin, et c'est cependant encore aujourd'hui l'un des corps dont l'histoire laisse le plus à désirer.

Il serait trop long d'énumérer les opinions si diverses qui ont été successivement émises sur sa nature, les méthodes plus ou moins compliquées, mais toujours défectueuses, que l'on a indiquées pour son extraction et les propriétés quelquefois si contradictoires que l'on a dû lui assigner, en raison même de son état d'impureté.

Je vais entrer immédiatement en matière en commençant par la description du procédé au moyen duquel j'obtiens le Tannin.

Je me sers d'un appareil fort simple que MM. Robiquet et Boutron ont fait connaître dans leur *Mémoire sur l'Huile essentielle d'Amandes amères* (*Ann. de Ph. et de Ch.*, T. XLIV.) Cet appareil consiste en une allonge étroite et très longue reposant sur une carafe ordinaire, et terminée à sa partie supérieure par un bouchon de cristal.

On introduit d'abord une mèche de coton dans la douille de l'allonge, et, par-dessus, de la noix de galle

réduite en poudre fine. On comprime très légèrement cette poudre; et, lorsque son volume est égal à la moitié de la capacité de l'allonge, on achève de remplir celle-ci avec de l'éther sulfurique du commerce. On bouche imparfaitement l'appareil, et on l'abandonne à lui-même.

Le lendemain, on trouve dans la carafe deux couches bien distinctes : l'une, très légère et très fluide, occupe la partie supérieure; l'autre, beaucoup plus dense, de couleur légèrement ambrée, d'un aspect sirupeux, reste au fond du vase.

On ne cesse d'épuiser la noix de galle, que lorsqu'on s'est assuré que le volume de ce dernier liquide n'augmente plus sensiblement. Alors on verse les deux liqueurs dans un entonnoir dont on tient le bec bouché avec le doigt. On attend quelques instans; et lorsque les deux couches se sont reformées, on laisse tomber la plus pesante dans une capsule, et l'on met l'autre de côté pour en retirer l'éther, qui en constitue la majeure partie.

On lave à plusieurs reprises le liquide dense avec de l'éther sulfurique pur, et on le porte ensuite dans une étuve ou sous le récipient d'une machine pneumatique.

Il s'en dégage d'abondantes vapeurs d'éther et un peu de vapeur d'eau; la matière augmente considérablement de volume et laisse un résidu spongieux, comme cristallin, très brillant, quelquefois incolore, mais plus souvent d'une teinte légèrement jaunâtre.

C'est du Tannin pur, dont l'astringence est extrême, et sans aucun mélange de saveur amère.

Quant au liquide surnageant le Tannin sirupeux, je ne l'ai soumis qu'à un petit nombre d'essais, et me suis borné à constater qu'il est principalement formé d'éther, d'eau, d'acide gallique et d'un peu de Tannin; mais il contient, en outre, des matières indéterminées.

De 100 parties de noix de galle, on retire 35 à 40 parties de Tannin par le procédé que je viens de décrire, et on l'obtient constamment pur.

Par les autres procédés, au contraire, les divers agens servant à son extraction lui font subir une altération toujours plus ou moins profonde; car le Tannin est un des corps les plus altérables que l'on connaisse, et il est d'ailleurs accompagné, dans les végétaux, de matières colorantes dont il est extrêmement difficile, peut-être même impossible de le débarrasser complètement, une fois qu'on en a opéré simultanément la dissolution.

Le procédé indiqué ci-dessus ne présente aucun de ces inconvéniens; car non-seulement je n'emploie ni acides ni alcalis, mais je n'opère pas même sur une infusion aqueuse de noix de galle.

C'est ici le lieu de remarquer l'influence que la configuration différente des vases peut exercer dans les résultats de certaines recherches chimiques, lorsque d'ailleurs les agens employés sont de même nature et en quantités semblables. Jamais, par exemple, il n'eût été possible d'obtenir le Tannin avec l'éther seul et la poudre de noix de galle, dans des vases ordinaires. Le liquide dense dont j'ai parlé plus haut, serait toujours resté caché dans cette masse de poudre, et n'aurait pu en être séparé par décantation.

Lorsqu'on substitue à l'éther aqueux de l'éther anhydre et de la noix de galle bien desséchée, on n'obtient pas de Tannin; et quand, d'une autre part, on agite le Tannin sec avec de l'éther distillé sur du chlorure de calcium, il s'en dissout une très petite quantité et tout le reste se précipite à l'état pulvérulent; tandis qu'avec l'éther aqueux, on obtient, au bout de quelques instans, un liquide très dense, tout-à-fait semblable à celui de la couche infé-

rieure qui se forme au fond de la carafe dans la préparation du Tannin.

Ces diverses observations me paraissent conduire naturellement à la théorie suivante de l'extraction du Tannin pur.

De tous les corps qui constituent la noix de galle, le plus soluble dans l'eau, celui qui a le plus d'affinité pour ce liquide, est le Tannin.

Lors donc qu'on vient à mettre en contact de la noix de galle en poudre très fine avec de l'éther aqueux, le Tannin s'empare de l'eau contenue dans ce liquide, et forme avec elle et une certaine quantité d'éther, un liquide sirupeux très dense, qui, peu à peu, est poussé de l'allonge dans la carafe par les couches supérieures d'éther, qui font dans ce cas l'office de piston.

Chose remarquable et qui s'explique également, les liqueurs sont à peine colorées, tandis que si l'on reprend le résidu de l'allonge par l'eau distillée, on en extrait un liquide rouge-brun, qui contient en dissolution toutes les matières colorantes de la noix de galle.

Le Tannin pur est incolore; il possède une saveur astringente portée au plus haut degré : il n'a pas d'odeur; l'eau le dissout en quantité très considérable; la dissolution rougit la teinture du tournesol, décompose avec effervescence les carbonates alcalins, et forme avec la plupart des dissolutions métalliques des précipités qui sont de véritables *tannates*. Les sels de fer au *minimum* ne la troublent pas, mais elle précipite abondamment en bleu foncé par les mêmes sels peroxidés.

L'alcool et l'éther dissolvent le Tannin, mais beaucoup moins bien que l'eau, et en quantités d'autant plus faibles qu'ils se rapprochent davantage de l'état anhydre.

J'ai vainement essayé de le faire cristalliser; je n'ai

pu y réussir, quoique j'aie employé pour cela un grand nombre de dissolvans et opéré avec tous les soins possibles.

Examiné au microscope, il présente l'aspect d'un corps parfaitement homogène.

Brûlé sur une lame de platine, il n'y laisse aucune trace de résidu.

Une dissolution concentrée de Tannin est abondamment précipitée en blanc par les acides hydro-chlorique, nitrique, phosphorique et arsénique; mais elle ne l'est pas par les acides oxalique, tartrique, lactique, acétique, citrique, succinique et sélénieux.

Le gaz acide sulfureux n'y produit pas non plus de précipité.

L'acide nitrique, chauffé avec le Tannin, le décompose avec rapidité, produit beaucoup de vapeurs rutilentes et une abondante cristallisation d'acide oxalique.

Les sels de cinchonine, de quinine, de brucine, de strychnine, de codéine, de narcotine et de morphine, forment, avec la solution de Tannin, des précipités blancs, peu solubles dans l'eau, mais très solubles dans l'acide acétique.

M. Wistock a annoncé que les sels de morphine, bien débarrassés des sels de narcotine, ne sont pas précipités par l'infusion de noix de galle; mais je me suis assuré plusieurs fois que cette infusion, lorsqu'elle est récente, précipite, comme le Tannin lui-même, les sels de morphine parfaitement purs, tandis qu'elle cesse de les précipiter, lorsqu'elle a été préparée depuis longtemps. Cela tient sans doute à la présence de l'acide gallique qui se forme dans cette liqueur; au moins j'ai constaté qu'une dissolution froide de ce dernier acide dissout facilement le précipité formé dans les sels de

morphine, soit par le Tannin, soit par l'infusion de noix de galle elle-même.

Le Tannin, versé dans une dissolution de gélatine en excès, y produit un précipité blanc, opaque, *soluble, surtout à chaud, dans la liqueur qui le surnage;* mais lorsque le Tannin, domine, le précipité, au lieu de se dissoudre quand on chauffe, se rassemble sous forme d'une espèce de membrane grisâtre et très élastique.

Dans les deux cas, le liquide filtré colore fortement en bleu les sels de fer au *maximum.*

J'avais pensé que la grande insolubilité du composé de Tannin et de gélatine me fournirait un moyen de m'assurer de la pureté du Tannin et de l'absence ou de la présence de l'acide gallique dans ce principe immédiat; mais cette insolubilité n'étant pas encore assez grande, j'eus recours à un autre moyen, qui me réussit complètement.

Ce moyen consiste à laisser en contact pendant quelques heures le Tannin que l'on veut examiner, avec un morceau de peau dépilée par la chaux, et telle qu'on l'introduit dans les fosses avec le tan : après avoir agité souvent le mélange, on le filtre.

Lorsque le Tannin est pur, il est absorbé en totalité par le morceau de peau; l'eau qui le tenait en dissolution ne produit pas le plus léger signe de coloration avec les per-sels de fer; elle est sans saveur, et ne laisse aucun résidu par l'évaporation.

Si, au contraire, le Tannin est mêlé avec de l'acide gallique, n'en contînt-il que 4 à 5 millièmes de son poids, la liqueur colore très sensiblement les sels de fer en bleu. C'est le meilleur moyen, et peut-être le seul connu jusqu'ici, de s'assurer de la présence de cet acide dans le Tannin.

Cette expérience est d'ailleurs intéressante, en ce qu'elle

fait voir qu'il existe une grande différence entre la gélatine et la peau, relativement à l'action que ces deux substances exercent sur le Tannin. Le cuir ne peut, d'après cela, être considéré comme un composé de gélatine et de Tannin, mais bien de cette dernière substance et de peau.

L'alumine en gelée, que l'on agite avec une dissolution de Tannin, l'absorbe rapidement, et forme avec lui un composé très insoluble, car la liqueur qui le surnage ne bleuit pas les sels de fer; mais cette propriété est aussi partagée par l'acide gallique, et ne peut servir, par conséquent, à indiquer la pureté réciproque de ces deux substances.

Le Tannin séché à 120° dans une étuve, et analysé avec l'appareil de M. Liébig, a donné les résultats suivans.

	Tannin.	A. carbonique obtenu.	Eau.
I.	1,255.....	2,350.....	0,450
II.	0,629.....	1,173.....	0,248
III.	0,560.....	1,037.....	0,217
IV.	0,433.....	0,810.....	0,103

Ce qui donne en centièmes :

	I.	II.	III.	IV.
Carbone.....	51,77....	51,56....	51,20....	51,72
Hydrogène...	3,98.....	4,37....	4,29....	4,17
Oxigène.....	44,25....	44,07....	44,51....	44,11
	100,00	100,00	100,00	100,00

Les rapports atomiques qui dérivent des analyses précédentes, sont $C^3H^3O^2$, et conduisent à la composition théorique suivante :

Carbone.....	51,18
Hydrogène.....	4,18
Oxigène.....	44,64
	100,00

La capacité de saturation du Tannin a été obtenue en brûlant le tannate de plomb préparé en versant l'acétate neutre et le nitrate de plomb dans une dissolution de Tannin en excès.

Il se forme, dans les deux cas, un précipité blanc abondant, qui, lavé, séché à 120°, et brûlé, donne le poids de l'atome du Tannin.

I. 1,602 de tannate de plomb préparé avec l'acétate = 0,549 d'oxide de plomb.

II. 0,808 *id.* avec nitrate = 0,273 oxide de plomb; d'où 1° poids d'atome = 2692;
2° . . *id.* . . . . *id.* . . . = 2732.

D'une autre part, 1 gr. de tannate de plomb a fourni 1,205 d'acide carbonique et 0,263 d'eau.

La formule $C^{18}H^{18}O^{12}$ donne pour poids atomique le nombre 2688,204.

En supposant, ce qui est fort vraisemblable, que le sel analysé était neutre, cette formule représente 1 atome de Tannin.

Elle est d'ailleurs en accord parfait avec l'analyse du tannate de peroxide de fer.

M. Berzélius avait déjà trouvé pour le Tannin la même formule et la même capacité de saturation que celles qui dérivent de mes expériences; mais il avait annoncé ses résultats comme susceptibles de révision, tant parce qu'il n'était pas certain de la pureté de son Tannin, que parce que ses analyses avaient différé les unes des autres dans des limites telles, qu'il ne pouvait les considérer comme rigoureusement exactes.

1,073 de tannate de peroxide de fer, obtenus en versant du persulfate de fer dans une dissolution de Tannin, après avoir été bien lavés et séchés à 120°, furent brûlés à plusieurs reprises avec de l'acide nitrique, et calcinés. Le

résidu, consistant en peroxide de fer pur, pesait 0,129; d'où l'on tire le nombre 7959 pour la quantité de Tannin combinée avec 1 atome de peroxide de fer. 1 atome de Tannin pesant 2688,198, 3 atomes = 2688,198 × 3 = 8064,594, nombre très rapproché de 7959, trouvé par la combustion du per tannate de fer. La formule de ce sel est donc $fe^2O^3(C^{18}H^{18}O^{12})^3$.

Cette composition est remarquable, en ce qu'elle fait voir que le Tannin se comporte comme les acides les mieux définis, et se combine avec les divers oxides, en suivant les mêmes lois de saturation.

C'est le tannate de peroxide de fer qui constitue, à proprement parler, la base de l'encre; car, outre qu'il n'existe que fort peu d'acide gallique dans les infusions récentes de noix de galle, le gallate de fer se décompose rapidement par son ébullition avec l'eau.

Le tannate de protoxide d'antimoine, qu'on obtient facilement en versant du Tannin dans une dissolution d'émétique, se présente sous la forme d'un précipité blanc, gélatineux, d'une grande insolubilité.

Il est formé comme le tannate de fer au *maximum*, et représenté par la formule $Sb^2O^3(C^{18}H^{18}O^{12})^3$.

Lorsqu'on abandonne à l'air une dissolution aqueuse très étendue de Tannin, elle perd peu à peu sa transparence et laisse précipiter une matière cristalline, légèrement colorée en gris, dont l'acide gallique constitue la presque totalité. Il suffit, pour se procurer cet acide dans un état de pureté parfaite, de traiter la dissolution bouillante par un peu de noir animal.

Si l'expérience se fait dans un tube de verre gradué et dans une atmosphère de gaz oxigène, ce gaz est absorbé lentement, et remplacé par un égal volume d'acide carbonique. On voit, au bout de quelques semaines, la

liqueur traversée par de nombreuses aiguilles cristallines et incolores d'acide gallique.

Si l'oxigène n'a pas d'accès dans la dissolution du Tannin, on peut la conserver indéfiniment, sans la moindre altération ; au moins une semblable liqueur, abandonnée à elle-même pendant plus de sept mois, dans une éprouvette, sur le mercure, est encore aujourd'hui parfaitement incolore, et il ne s'y est pas formé d'acide gallique.

M. Chevreul a fait une observation semblable sur l'infusion de noix de galle. Il a remarqué qu'elle n'avait subi aucune espèce d'altération pendant l'espace de trois ans qu'il l'avait conservée dans un flacon bouché.

La noix de galle cède à l'eau environ 5o centièmes de matières solubles dans lesquelles il y a environ 4o centièmes de Tannin, et, d'après Richter, 3 $\frac{1}{2}$ d'acide gallique; et l'on sait cependant qu'elle peut fournir facilement la cinquième partie de son poids de ce dernier acide, quand on abandonne la dissolution à une décomposition spontanée. Il faut donc que la majeure partie de l'acide gallique qu'on retire de la noix de galle n'y préexiste pas, et ce ne peut être assurément 3 à 4 centièmes de matière extractive qui donnent naissance à un acide si abondant.

Ce raisonnement que je m'étais fait *à priori*, et avant l'expérience que j'ai rapportée ci-dessus, s'accorde parfaitement avec tous les faits connus jusqu'ici. Aussi n'ai-je pas été étonné de voir le Tannin pur se transformer en acide gallique, sous l'influence de l'air et de l'eau. Il est très probable que la petite quantité d'acide gallique qu'on peut retirer directement de la noix de galle par l'alcool concentré, provient d'une altération qu'elle éprouve pendant sa dessiccation au contact de l'air.

Il n'est aucun chimiste qui ne sache que de tous les procédés indiqués pour la préparation de l'acide gallique,

les seuls qui en donnent des quantités considérables sont ceux dans lesquels on fait moisir pendant long-temps la noix de galle. Toutefois ces moisissures ne paraissent pas provenir du Tannin lui-même, car, d'une part, la poudre de noix de galle, épuisée de Tannin par l'éther, donne les mêmes moisissures sans qu'il y ait production d'acide gallique; et, d'une autre part, les dissolutions aqueuses de Tannin fournissent de l'acide gallique sensiblement pur.

ACIDE GALLIQUE.

On considère généralement, en France, comme de l'acide gallique pur la matière blanche, cristallisable, que l'on obtient en abondance par la décomposition spontanée que la noix de galle éprouve à l'air. M. Berzélius ne partage pas cette opinion, et pense que l'acide précité est combiné chimiquement avec une certaine quantité de Tannin, dont on doit le débarrasser par la distillation pour l'obtenir pur.

M. Braconnot reconnut postérieurement au travail de M. Berzélius, que l'acide sublimé offre des caractères qui ne permettent pas de le confondre avec l'acide gallique ordinaire; et lui donna le nom d'acide *pyro-gallique*.

Cette divergence d'opinion sur la véritable nature de l'acide gallique est cause des nombreuses différences qu'on observe dans ce que les chimistes ont écrit sur ce sujet.

Les expériences et les analyses consignées dans ce Mémoire confirment la manière de voir de M. Braconnot. L'acide gallique change complètement de nature, quand on le distille, et donne naissance à un acide pyrogéné différent du corps qui l'a produit, autant pas ses propriétés que par sa composition.

L'acide gallique pur, bien débarrassé de Tannin, ne

trouble pas la dissolution de gélatine. Il cristallise en aiguilles soyeuses d'une grande blancheur, d'une saveur légèrement acidule et styptique, et qui exigent, d'après M. Braconnot, 100 parties d'eau froide pour se dissoudre. Il est plus soluble dans l'alcool; l'éther le dissout aussi, mais en moindre quantité.

Il forme dans la dissolution de persulfate de fer un précipité d'un bleu foncé, beaucoup plus soluble que ne l'est le tannate de la même base. Ce précipité se dissout lentement à froid dans la liqueur au sein de laquelle il s'est formé. Celle-ci se décolore presque complètement au bout de quelques jours; l'acide sulfurique reprend peu à peu la majeure partie de l'oxide de fer à l'acide gallique, et ce dernier cristallise dans la liqueur ramenée au *minimum* par la destruction d'une certaine quantité d'acide gallique.

La même chose se produit en quelques minutes, lorsqu'on fait bouillir la liqueur; et, dans ce cas, il se dégage de l'acide carbonique.

Le Tannin manifeste aussi une réaction semblable.

Dans tous les cas, le cyano-ferrure de potassium produit dans les liqueurs un précipité verdâtre qui annonce une réduction du persulfate de fer.

L'acide gallique ne trouble pas la dissolution des sels à bases d'alcalis végétaux.

Il forme, avec les eaux de baryte, de strontiane et de chaux, des précipités blancs qui se redissolvent dans un excès d'acide, et cristallisent en aiguilles prismatiques satinées, inaltérables à l'air.

Ces sels, comme l'a remarqué M. Chevreul, prennent des couleurs très variées, depuis le vert jusqu'au rouge foncé, et se détruisent quand on les expose à l'influence simultanée de l'air et d'un excès de base.

La potasse, la soude et l'ammoniaque forment avec l'acide gallique des sels très solubles, parfaitement incolores, même avec un excès d'alcali, tant qu'on les conserve à l'abri du contact de l'oxigène, mais qui prennent une couleur brune très foncée lorsqu'on fait intervenir ce gaz, dont une quantité très notable est absorbée.

Versés dans une solution d'acide gallique, l'acétate et le nitrate de plomb y produisent un précipité blanc, dont l'air n'altère pas la couleur.

L'acide gallique dissous dans l'eau, et abandonné à lui-même dans des vases ouverts, se décompose avec lenteur. Il s'y forme des moisissures et une matière noire, que M. Dobereiner considère comme de l'ulmine. Cette altération est nulle dans des vases hermétiquement fermés.

Les cristaux d'acide gallique, exposés à une douce chaleur, perdent de l'eau et subissent une espèce d'efflorescence.

$2^{gr},000$ chauffés à 120° ont perdu 0,189 d'eau = 9,45 p. $\frac{c}{o}$.

Le même acide, desséché et soumis à l'analyse, a donné les résultats suivans :

	Acide sec.	A. carbonique obtenu.	Eau.
I.	0,644.....	1,170.....	0,218
II.	0,362.....	0,658.....	0,116
III.	0,426.....	0,772.....	0,140

Ces nombres, exprimés en centièmes, donnent :

	I.	II.	III.
Carbone.....	50,23....	50,25....	50,10
Hydrogène...	3,75....	3,55....	3,64
Oxigène.....	46,02....	46,20....	46,26
	100,00	100,00	100,00

1° $1^{gr},017$ de gallate de plomb a fourni 0,572 de protoxide.

2° 1gr,183 en ont donné 0,675.

D'où l'on tire les nombres 1084, 8 et 1049 pour le poids d'atome de l'acide gallique.

D'une autre part, 1,310 de gallate de plomb ont fourni 0,190 d'eau et 1,020 d'acide carbonique.

Si l'on en déduit l'oxide de plomb, on trouve la composition suivante pour l'acide qui lui était combiné :

Carbone.....	49,56
Hydrogène.....	3,70
Oxigène.....	46,74
	100,00

Cette composition est la même que celle de l'acide gallique séché à 120°. Elle correspond à la formule $C^7H^6O^5$, qui elle-même s'accorde avec le poids d'atome trouvé par l'expérience.

En effet,

C^7.....	=	535,066.....	49,89
H^6.....	=	57,438.....	3,49
O^5.....	=	500,000.....	46,62
		1072,504	100,00

100 parties d'acide cristallisé perdent par la dessiccation 9,95 p. % d'eau; ce qui correspond à un atome. Ces cristaux ont donc la formule $C^7H^6O^5+H^2O$, et lorsqu'ils ont été desséchés, ils se combinent intégralement avec les bases.

L'action de la chaleur sur l'acide gallique est extrêmement remarquable, non-seulement par la nature des produits qui naissent de cette action, mais encore par les résultats entièrement différens qu'amène une variation à peine sensible dans l'intensité de cet agent. Elle jette la plus vive lumière sur la véritable nature de l'acide gal-

lique, sur ses rapports avec le Tannin, l'acide pyro-gallique, et un nouvel acide à la découverte duquel l'étude long-temps suivie de cette réaction m'a conduit.

Lorsqu'on introduit de l'acide gallique sec dans une cornue de verre dont le col est fortement incliné, et qu'on tient plongée dans un bain d'huile, on remarque que, quelques instans après que le thermomètre maintenu dans le bain marque 210 à 215°, il se manifeste un dégagement abondant d'un gaz qui n'est autre chose que de l'acide carbonique parfaitement pur, et qu'en même temps le dôme de la cornue se recouvre d'une multitude innombrable de lames cristallines d'une blancheur éclatante.

Du reste, pas la plus légère trace d'eau ni de matières empyreumatiques, et dans la cornue un résidu à peine pondérable, quelquefois même tout-à-fait nul.

Si au lieu de porter la température de la cornue à 215°, on l'élève le plus rapidement possible à 240 ou 250°; si l'on fait bouillir l'huile, il se forme encore de l'acide carbonique pur; mais au lieu de cristaux sublimés, dont il ne se manifeste plus la moindre trace, on voit apparaître de l'eau qui ruisselle le long de la paroi de la cornue, et l'on trouve dans le fond de ce vase une masse considérable d'une matière noire, brillante, insoluble, qu'on prendrait au premier aspect pour du charbon, mais qui est un véritable acide susceptible de se combiner avec les diverses bases, de les saturer complètement, et de se dissoudre à froid, sans résidu, dans une faible dissolution de potasse ou de soude.

La matière blanche sublimée à 215°, est l'acide pyro-gallique pur qui est représenté par la formule $C^6H^6O^3$.

Je désignerai la matière noire sous le nom d'*acide métagallique*, et décrirai plus loin ses propriétés.

Le rapport de ses élémens est exprimé par $C^6H^4O^2$.

Ainsi dans un cas, lorsqu'on chauffe l'acide gallique à 215°, il se transforme entièrement en acide carbonique, en acide pyro-gallique ; et dans l'autre cas, quand on le soumet à la température de l'huile bouillante, on le change en eau, en acide carbonique et en acide méta-gallique.

Ces transformations sont aussi nettes que les équations suivantes qui les représentent :

$$\underbrace{C^7H^6O^5}_{\text{A. gallique.}} = CO^2 + \underbrace{C^6H^6O^3}_{\text{A. pyro-gallique.}} \ldots\ldots \text{à la t. de } 215°.$$

$$C^7H^6O^5 = CO^2 + H^2O + \underbrace{C^6H^4O^2}_{\text{A. méta-gallique.}} \ldots\ldots \text{à } 250°.$$

Les phénomènes que manifeste l'acide gallique sont donc exactement du même ordre que ceux que présente l'acide méconique, lorsqu'on les soumet l'un et l'autre à l'influence d'une température modérée.

M. Robiquet a fait voir que ce dernier acide dégage abondamment de l'acide carbonique pur, soit lorsqu'on le fait bouillir dans l'eau, soit quand on l'expose à une température sèche de 220°, et que, dans les deux cas, il en résulte un nouvel acide différent de celui qui l'a produit, par ses propriétés, et qu'on peut représenter, d'après les analyses de M. Liébig, par l'acide méconique moins une certaine quantité d'acide carbonique.

Le nouvel acide, à une température un peu plus élevée, laisse encore dégager une nouvelle quantité d'acide carbonique pur, et produit un troisième acide, que M. Robiquet, qui l'a découvert, a nommé *acide pyro-méconique*.

L'étude bien suivie de l'action de la chaleur sur le Tannin devenait dès lors fort importante, et pouvait à son tour éclairer vivement l'histoire chimique de cette singulière substance.

En le soumettant à la température de l'huile bouillante, j'ai constaté qu'il ne se formait que de l'eau, du gaz carbonique pur, et un résidu abondant d'acide méta-gallique également pur.

Si l'on ne chauffe le Tannin que vers 210 à 215°, on obtient encore de l'acide carbonique, de l'eau, de l'acide méta-gallique en abondance, plus une certaine quantité d'acide pyro-gallique, c'est-à-dire les mêmes produits que ceux que l'on obtient avec l'acide gallique, avec cette seule différence qu'on ne peut éviter, avec le Tannin, la production d'une quantité très notable d'acide méta-gallique, quelque soins que l'on apporte à maintenir la température stationnaire et aussi basse que le comporte la réaction.

Cela tient, sans doute, à ce que la formation de l'eau précède de quelques degrés celle de l'acide pyro-gallique; et, dans ce cas, l'acide méta-gallique, qui n'est autre chose que ce dernier moins une certaine quantité d'eau, peut seul se produire.

Quoi qu'il en soit, les seuls produits auxquels donnent naissance l'acide gallique et le Tannin, par l'application d'une chaleur modérée, sont de l'eau, de l'acide carbonique, de l'acide pyro-gallique, et enfin de l'acide méta-gallique.

Quant à l'acide pyro-gallique, si on l'expose à quelques degrés au-dessus de son point d'ébullition, il ne donne que de l'eau et de l'acide méta-gallique, sans aucune trace d'acide carbonique.

Je ne me suis pas borné à constater la formation

de ces divers produits; je les ai isolés avec le plus de soin possible, et je me suis assuré que les équations suivantes représentent exactement les résultats de l'expérience :

$$\underbrace{C^{36}H^{36}O^{24}}_{\text{Tannin.}} = \underbrace{C^{33}H^{22}O^{11}}_{\text{A. méta-gallique. Hydrate.}} + C^{3}O^{6} + H^{14}O^{7}.$$

$$\underbrace{C^{6}H^{6}O^{3}}_{\text{A. pyro-gallique.}} = \underbrace{C^{6}H^{4}O^{2}}_{\text{A. méta-gallique. Hydrate.}} + H^{2}O.$$

$$\underbrace{C^{7}H^{6}O^{5}}_{\text{A. gallique.}} = \underbrace{C^{6}H^{6}O^{3}}_{\text{A. pyro-gallique.}} + CO^{2}.$$

$$C^{7}H^{6}O^{5} = CO^{2} + H^{2}O + C^{6}H^{4}O^{2}.$$

Qu'il me soit permis d'insister ici sur la nécessité de mesurer exactement la température à laquelle on soumet les substances organiques, et sur la nécessité, non moins grande, de l'appliquer graduellement.

Jusqu'ici on avait bien étudié l'action du feu sur le Tannin et l'acide gallique; mais pour n'avoir pas tenu compte de cette température, pour ne l'avoir pas graduée convenablement et maintenue stationnaire et uniforme, on n'avait pas obtenu les résultats que j'ai annoncés, résultats si remarquables par leur simplicité et par les lumières inattendues dont ils éclairent le point jusqu'ici le plus obscur peut-être de toute la Chimie organique.

La meilleure manière, la seule qui soit rationnelle, d'étudier l'action de la chaleur sur une matière d'origine organique, consiste à maintenir cette matière dans un bain dont on élève la température avec lenteur et uniformité. Aussitôt la manifestation d'un phénomène quelconque, on arrête immédiatement le feu, et on le maintient sta-

tionnaire pendant toute la durée de ce même phénomène. On recueille les produits, on les examine, puis on reprend ceux qui sont fixes, et on les chauffe derechef jusqu'à ce qu'on remarque la production de quelque nouveau phénomène.

C'est en opérant de la sorte, d'abord sur le Tannin et les acides gallique et pyro-gallique, ensuite sur quelques autres substances, que je suis arrivé à la découverte d'une loi générale sur la production des acides pyrogénés; loi dont j'ai eu l'honneur d'entretenir l'Académie des Sciences, et qui m'a conduit à de nouveaux résultats qui simplifient singulièrement une des parties les plus intéressantes de la Chimie organique.

ACIDE ELLAGIQUE.

Je n'ai pu m'en procurer qu'une très petite quantité. Il se forme, comme l'a le premier observé M. Chevreul, quand on expose à l'air une infusion de noix de galle, et s'en dépose en même temps que l'acide gallique. En lavant leur mélange à l'eau bouillante on dissout ce dernier; et l'acide ellagique, repris par une eau de potasse et précipité par un acide, peut être considéré comme pur.

Chauffé à 120°, l'acide ellagique perd 11,7 p. $\frac{c}{o}$ de son poids d'eau.

0,440 d'acide sec ont donné 0,888 d'acide carbonique et 0,107 d'eau.

0,424 = 0,864 d'acide carbonique et 0,095 d'eau.

D'où :

	I.	II.
Carbone.....	55,80.....	55,69
Hydrogène.....	2,66.....	2,48
Oxigène.....	41,54.....	41,83
	100,00	100,00

Ces nombres correspondent à la formule $C^7H^4O^4$; et en admettant que cette formule représente l'atome, les cristaux d'acide ellagique sont représentés par $C^7H^4O^4 + H^2O$.

Cet acide, à l'état anhydre, ne diffère donc de l'acide gallique, également anhydre, que par 1 atome d'eau.

Le fait suivant peut être considéré comme une confirmation complète de l'analyse.

Après avoir lavé à plusieurs reprises avec de l'eau bouillante le dépôt cristallin formé dans une infusion de noix de galle, je traitai le résidu par de l'acide hydro-chlorique, afin de décomposer l'ellagate et d'en précipiter l'acide; mais, au lieu d'obtenir de l'acide ellagique, je trouvai une abondante cristallisation d'acide gallique.

Je crus que je pourrais reproduire le même phénomène avec d'autre acide ellagique et lui faire prendre ce qui lui manque d'eau pour se transformer en acide gallique; mais je ne pus réussir : je reproduisis constamment l'acide ellagique. Toutefois je ne doute pas qu'en répétant plusieurs fois l'expérience, en faisant varier, soit la concentration des liqueurs ou leur température, soit leur degré d'acidité ou d'alcalinité, on ne reproduise le phénomène tel que je l'ai annoncé.

La connaissance du fait que je rapporte me coûta ce que je possédais d'acide ellagique. Tout fut ainsi transformé en acide gallique.

ACIDE PYRO-GALLIQUE.

C'est, comme l'indique son nom, l'acide qui résulte de l'action de la chaleur sur l'acide gallique. J'ai déjà fait remarquer que la température nécessaire à sa production est celle de 210 à 215°, et que lorsqu'on dépasse ce terme,

qu'on va, par exemple, jusqu'à 240 ou 250°, on n'en obtient plus la moindre trace, et qu'il est remplacé alors par un acide que j'ai appelé *méta-gallique*. Sa préparation exige donc beaucoup de précaution. Le mieux est de la faire dans un bain d'huile, dans lequel sont placés une cornue à demi remplie d'acide gallique, et un thermomètre, pour en accuser sans cesse la température.

L'acide pyro-gallique, ainsi obtenu par sublimation, est d'une blancheur comparable à celle de la neige, sous forme de lames ou d'aiguilles très allongées, excessivement solubles dans l'eau, solubles dans l'alcool et dans l'éther sulfurique.

Sa réaction sur le papier bleu de tournesol est très faible, et la teinte rouge qui en résulte à peine visible.

Il entre en fusion vers 115°, et en ébullition vers 210°. Sa vapeur est incolore et très légèrement piquante. A 250°, il noircit fortement, laisse dégager de l'eau et donne un résidu abondant d'acide méta-gallique.

La potasse, la soude et l'ammoniaque forment avec lui des sels très solubles dans l'eau.

Celui de potasse cristallise en tables rhomboïdales d'une grande blancheur.

L'acide pyro-gallique ne trouble pas les eaux de baryte et de strontiane, et ne se colore sous l'influence des oxides solubles, que lorsqu'on fait intervenir l'action de l'oxigène.

Le persulfate de fer, versé, soit à froid, soit à chaud, dans une dissolution d'acide pyro-gallique, est instantanément ramené au *minimum*, et la liqueur prend une très belle teinte rouge, sans laisser déposer aucun précipité. Il ne se forme pas d'acide carbonique, comme cela a lieu pour le Tannin et l'acide gallique.

Si, au lieu d'acide libre, on prend un pyro-gallate

ou du peroxide de fer hydraté, on obtient une liqueur et un précipité d'un bleu-violet très intense.

Les cristaux d'acide pyro-gallique ne perdent pas de leur poids par la fusion. Ceux qui proviennent de la distillation ménagée du Tannin offrent la même composition et les mêmes propriétés que ceux que l'on obtient en sublimant l'acide gallique.

	A. pyro-gallique.	A. carbonique.	Eau.
I.	0,583.....	1,205.....	0,256
II.	0,880.....	1,830.....	0,386
III.	1,160.....	2,425.....	0,500

Ce qui donne en centièmes :

	I.	II.	III.
Carbone.....	57,14.....	57,49.....	57,80
Hydrogène.....	4,86.....	4,86.....	4,78
Oxigène.....	38,00.....	37,65.....	37,42
	100,00	100,00	100,00

Les deux premières analyses ont été faites avec l'acide pyro-gallique provenant de l'acide gallique ; la troisième l'a été avec de l'acide pyro-gallique fourni par la distillation du Tannin.

La formule $C^6H^6O^3$ se déduit de ces trois analyses.

C'est la même que celle qu'a donnée M. Berzélius, il y a déjà un grand nombre d'années; mais il n'avait opéré que sur de l'acide provenant de la distillation de l'acide gallique : celui que fournit le Tannin, dans la même circonstance, n'avait point été analysé jusqu'ici. Plusieurs chimistes avaient même émis l'opinion qu'il différait de l'acide pyro-gallique.

Relativement à l'analyse de l'acide pyro-gallique faite par M. Berzélius, on me permettra d'invoquer la puis-

sante autorité de ce chimiste, pour donner au travail que j'ai l'honneur de soumettre à l'Académie le degré de certitude qui pourrait lui manquer.

On a sans doute remarqué avec quelle facilité toutes les substances dont j'ai parlé sont susceptibles de se transformer les unes dans les autres, et la nature très simple des produits qui prennent naissance en même temps qu'elles. Ces produits sont constamment de l'eau et de l'acide carbonique pur; or, si l'on m'accorde de les avoir recueillis et dosés avec soin, toutes mes expériences se trouvent contrôlées par la seule analyse de M. Berzélius; car je puis toujours avec le Tannin faire de l'acide gallique, avec de l'acide gallique faire de l'acide pyro-gallique, et, enfin, transformer ce dernier en acide méta-gallique, sans qu'il se produise jamais autre chose que de l'eau et du gaz carbonique. L'acide ellagique lui-même rentre dans la même vérification, puisqu'en absorbant de l'eau, il devient acide gallique.

La capacité de saturation, déduite de la combustion du sel neutre de plomb, m'a fourni, dans deux expériences, les nombres 791 et 795, qui sont très rapprochés de ceux qu'indique la théorie; en effet,

C^6	=	458,628	57,61
H^6	=	37,438	4,70
O^3	=	300,000	37,69
		796,066	100,00

ACIDE MÉTA-GALLIQUE.

On l'obtient en soumettant le Tannin ou les acides gallique et pyro-gallique à une température de 250°. Il reste dans le vase distillatoire, sous forme d'une masse

noire, très brillante, insipide et complètement insoluble dans l'eau.

La potasse, la soude, l'ammoniaque et la glucine le dissolvent avec facilité. Un acide, versé dans ces sels, en précipite des flocons noirs qui présentent la même composition que celle de l'acide obtenu par la voie sèche.

Il est presque complètement insoluble dans l'alcool.

Le méta-gallate de potasse, préparé en faisant bouillir une dissolution alcaline avec un excès d'acide méta-gallique, a une réaction neutre sur les couleurs végétales. Il forme des précipités noirs avec les sels de plomb, de fer, de cuivre, de magnésie, de zinc, d'argent, de chaux, de baryte et de strontiane.

L'acide méta-gallique dégage avec effervescence l'acide carbonique des carbonates de potasse et de soude; mais il est sans action sur le carbonate de baryte, sans doute en raison de son extrême insolubilité, et de celle, non moins grande, du méta-gallate de baryte.

0,285 d'acide méta-gallique, obtenu par la distillation de l'acide gallique, ont donné 0,693 d'acide carbonique et 0,101 d'eau.

0,380 *id.* provenant du Tannin, ont fourni 0,123 d'eau et 0,920 d'acide carbonique.

0,458 du même acide, dissous dans la potasse, précipité par l'acide hydro-chlorique, lavé et séché à 120°, ont donné 1,110 d'acide carbonique et 0,158 d'eau.

Ces nombres correspondent à ceux qui suivent :

	I.	II.	III.
Carbone.....	67,25.....	66,94.....	67,01
Hydrogène.....	3,92.....	3,85.....	3,82
Oxigène.....	28,83.....	29,21.....	29,17
	100,00	100,00	100,00

La formule $C^6H^4O^2$ va très bien avec ces analyses. Elle est d'ailleurs en parfaite harmonie avec les phénomènes qui naissent de l'action de la chaleur sur les acides gallique, pyro-gallique et le Tannin.

0,780 de méta-gallate d'argent ont fourni une quantité de métal correspondant à 0,420 d'oxide; d'où l'on tire le nombre 1,249 pour le poids de l'atome de l'acide méta-gallique.

1,273 du même sel d'argent = 0,170 d'eau et 1,592 d'acide carbonique. En faisant la déduction de l'oxide, on trouve que la composition de l'acide méta-gallique, dans le sel d'argent, est représentée par les nombres,

Carbone.....	72,86
Hydrogène.....	3,18
Oxigène.....	23,96
	100,00

La formule théorique déduite de cette analyse, est :

C^{12}.....	=	917,256.....	73,10
H^6.....	=	37,438.....	2,98
O^3.....	=	300,000.....	23,92
		1254,694	100,00

L'atome de l'acide méta-gallique indiqué par la formule $C^{12}H^8O^4$, quand il est isolé, devient $C^{12}H^6O^3$ lorsqu'on l'analyse dans les sels, c'est-à-dire que la saturation lui fait perdre 1 atome d'eau.

M. P. Boullay a annoncé, il y a quelques années, que l'ulmine présentait la même composition que l'acide pyro-gallique, avec lequel elle était isomérique. Comme il m'importait de connnaître les véritables rapports qui existent entre ces deux corps, j'ai analysé l'ulmine avec

beaucoup de soin ; mais je lui ai trouvé une composition fort différente de celle que lui avait assignée M. Boullay. Elle contient beaucoup plus de carbone et d'hydrogène.

La cause de la différence de ses analyses avec les miennes tient à l'extrême difficulté que l'on éprouve à brûler l'ulmine. Cette difficulté est telle, qu'il faut une température d'un rouge blanc pour la vaincre, et cette chaleur ne pouvait être obtenue dans des tubes de verre blanc, dont on se servait encore lors de la publication du travail de M. Boullay.

Ce chimiste, qui avait d'ailleurs signalé lui-même combien est difficile la combustion de l'ulmine, conservait quelques doutes sur l'exactitude de ses analyses, et allait les reprendre lorsque je lui ai communiqué mes résultats.

Quand on expose à l'influence simultanée de l'air et d'un excès d'alcali, le Tannin et les acides gallique et pyro-gallique, ces matières se détruisent avec rapidité et se transforment en une matière colorante rouge, qui reste en dissolution avec une certaine quantité d'acide carbonique, toujours beaucoup plus faible que le poids de l'oxigène absorbé.

M. Chevreul est le premier qui ait attiré l'attention des chimistes sur le fait remarquable de la décomposition des gallates.

La matière colorante qui se produit dans ces diverses circonstances paraît être la même, et ne se précipite pas de la dissolution lorsqu'on vient à traiter celle-ci par un acide.

On peut l'obtenir à l'état de liberté en saturant par l'acide hydro-chlorique la liqueur rouge alcaline, évaporant à sec, et traitant le résidu par l'alcool. La matière colorante seule se dissout.

Dans un prochain Mémoire, je traiterai de ses propriétés, ainsi que de l'ulmine, qui paraît se rapprocher d'elle sous plusieurs rapports. Je me propose également de poursuivre l'examen des diverses espèces de Tannin, et de voir si les substances que l'on a désignées sous ce nom, ne seraient pas des combinaisons d'un seul et même Tannin avec des matières organiques variables faisant fonction de base. Déjà je me suis assuré qu'en distillant le cachou avec précaution, on obtient des cristaux blancs qui présentent toutes les propriétés de l'acide pyro-gallique; mais des expériences nombreuses sont encore nécessaires pour pouvoir émettre une opinion quelconque sur cette importante question.

En résumant les principaux faits rapportés dans ce Mémoire, on arrive aux conclusions suivantes :

Le Tannin peut être obtenu avec facilité, en abondance et dans un état de pureté complète, par le procédé que j'ai fait connaître.

C'est un acide dont la composition est fort simple, qui se combine intégralement avec les diverses bases, les sature, et forme avec elles des sels parfaitement définis.

L'acide gallique ne préexiste pas dans la noix de galle; il est le produit de l'action de l'air sur le Tannin qu'elle renferme.

A une température de 215°, l'acide gallique se transforme en acide carbonique et en acide pyro-gallique purs; de telle sorte qu'un atome de ce dernier, plus un atome de gaz carbonique, représente exactement un atome d'acide gallique.

L'acide ellagique, qui paraît se former dans les mêmes circonstances que l'acide gallique, n'en diffère que par un atome d'eau, et peut, en s'hydratant, devenir lui-même acide gallique.

A son tour l'acide pyro-gallique peut se transformer par l'action de la chaleur en eau et en acide méta-gallique, ces acides ne différant l'un de l'autre que par de l'eau.

La place du Tannin, qu'il serait plus convenable d'appeler *acide tannique*, est marquée à côté de celle de l'acide gallique lui-même. Il existe entre eux une grande analogie, relativement à l'action de la chaleur et à celle des bases s'exerçant sous l'influence de l'air. Peut-être contiennent-ils un radical commun; mais, sans s'arrêter à des hypothèses toujours plus ou moins vagues, ce sont, dans l'état actuel de la science, deux acides différens.

Le Tannin deviendra sans doute un médicament précieux, car il doit être aux végétaux astringens ce que la quinine, par exemple, est au quinquina.

La facilité avec laquelle il peut être obtenu, le fera sans doute substituer, comme réactif, à l'infusion de noix de galle, dont la couleur brune foncée et la constitution complexe peuvent altérer, dans certains cas, la netteté d'un résultat.

MÉMOIRE

SUR LA RÉSOLUTION

DES

ÉQUATIONS NUMÉRIQUES.

MÉMOIRE
SUR LA RÉSOLUTION
DES
ÉQUATIONS NUMÉRIQUES,

PAR C. STURM.

La résolution des équations numériques est une question qui n'a pas cessé d'occuper les géomètres, depuis l'origine de l'Algèbre jusqu'à nos jours. Nous ne rappellerons pas tous les procédés qui ont été proposés pour la détermination des racines réelles des équations. Lagrange, le premier, a donné pour cet objet une méthode rigoureuse; elle consiste à substituer dans l'équation, à la place de l'inconnue, une suite de nombres croissant depuis la limite supérieure des racines négatives jusqu'à celle des racines positives, et tellement choisis, qu'entre chaque nombre substitué et le suivant, il ne puisse tomber qu'une seule racine de l'équation; les changemens de signe qu'on obtient dans la suite des résultats indiquent quels sont ceux de ces nombres qui comprennent effectivement une racine. On remplit la condition qu'il ne puisse tomber qu'une racine entre un nombre substitué et celui qui le surpasse immédiatement, en substituant des nombres formant une progression arithmétique, dont la raison soit une quantité moindre que la plus petite des différences qui existent entre les racines réelles de l'équation proposée. On parvient à déterminer une telle quantité, en formant une équation auxiliaire

dont l'inconnue a pour valeurs les carrés des différences entre les racines de la proposée, et cherchant une limite inférieure des racines positives de cette nouvelle équation; la racine carrée de cette limite ou toute quantité moindre peut être prise pour l'intervalle des substitutions successives qu'il faut effectuer dans l'équation.

Cette méthode, considérée sous un point vue purement théorique, ne laisse rien à désirer du côté de la rigueur. Mais, dans l'application, la longueur des calculs nécessaires pour former l'équation aux carrés des différences, et la multitude des substitutions qu'on peut avoir à effectuer, la rendent presque impraticable; et quoique Lagrange y ait apporté quelques simplifications, les calculs qu'elle exige sont toujours très pénibles; aussi l'on a essayé d'autres solutions. Fourier a découvert un théorème qui renferme comme corollaire *la règle des signes de Descartes*, et à l'aide duquel on peut reconnaître qu'une équation n'a aucune racine entre deux limites données, ou bien que le nombre des racines comprises entre ces limites ne peut pas surpasser un certain nombre facile à déterminer. Mais ce théorème ne donnant pas précisément le nombre de ces racines, on peut être exposé, en l'appliquant, à chercher des racines dans des intervalles où il n'en existe pas, de sorte que de nouvelles règles sont nécessaires pour faire disparaître cette incertitude.

Le théorème dont le développement est l'objet de ce Mémoire a beaucoup d'analogie avec celui de Fourier. Il fournit un moyen sûr de connaître combien une équation a de racines réelles comprises entre deux nombres quelconques; cette connaissance suffit pour conduire à la détermination effective de toutes les racines réelles, sans qu'on soit obligé de recourir à l'équation aux carrés des différences.

1.

Soit

$$Nx^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + \ldots + Tx + U = 0$$

une équation numérique d'un degré quelconque, dont on se propose de déterminer toutes les racines réelles.

On commencera par exécuter sur cette équation le calcul qui sert à trouver si elle a des racines égales, en opérant de la manière que nous allons indiquer. En désignant par V la fonction entière $Nx^m + Px^{m-1} +$ etc., et par V_1 sa fonction dérivée (qui se forme en multipliant chaque terme de V par l'exposant de x dans ce terme et diminuant cet exposant d'une unité), il faut chercher le plus grand commun diviseur des deux polynomes V et V_1. On divisera d'abord V par V_1, et quand on sera arrivé à un reste d'un degré inférieur à celui du diviseur V_1, on changera les signes de tous les termes de ce reste (les signes + en — et les — en +). Désignons par V_2 ce que deviendra ce reste après ce changement de signes. On divisera de la même manière V_1 par V_2, et, après avoir encore changé les signes du reste, on aura un nouveau polynome V_3 d'un degré inférieur à celui de V_2. La division de V_2 par V_3 conduira de même à une fonction V_4 qui sera le reste de cette division où l'on aura changé les signes. On continuera cette série de divisions, en ayant toujours soin de changer les signes des termes de chaque reste. Ce changement de signes qui serait inutile si l'on n'avait pour but que de trouver le plus grand commun diviseur des polynomes V et V_1 est nécessaire dans la théorie que nous exposons. Comme les degrés des restes successifs vont en diminuant, on arrivera finalement soit à un reste numérique indépendant

de x et différent de zéro, soit à un reste fonction de x qui divisera exactement le reste précédent. Nous examinerons ces deux cas séparément.

2.

Supposons, en premier lieu, qu'on parvienne après un certain nombre de divisions à un reste numérique qui soit désigné par V_r.

Dans ce cas, on est assuré que l'équation $V = 0$ n'a pas de racines égales, puisque les polynomes V et V_1 n'ont pas de diviseur commun fonction de x. En représentant par $Q_1, Q_2, \ldots Q_{r-1} \ldots$ les quotients donnés par les divisions successives qui laissent pour restes $-V_2$, $-V_3, \ldots -V_r$, on a cette suite d'égalités

$$\begin{aligned} V &= V_1Q_1 - V_2 \\ V_1 &= V_2Q_2 - V_3 \\ V_2 &= V_3Q_3 - V_4 \qquad (1) \\ &\cdots \\ V_{r-2} &= V_{r-1}Q_{r-1} - V_r. \end{aligned}$$

Cela posé, la considération de ce système de fonctions $V, V_1, V_2, \ldots V_r$ fournit un moyen sûr et facile de connaître *combien l'équation* $V = 0$ *a de racines réelles comprises entre deux nombres* A *et* B *de grandeurs et de signes quelconques*, B *étant plus grand que* A. Voici la règle qui remplit cet objet :

On substituera à la place de x *le nombre* A *dans toutes les fonctions* $V, V_1, V_2, \ldots V_{r-1}, V_r$, *puis on écrira par ordre sur une même ligne les signes des résultats, et l'on comptera le nombre de variations qui se trouveront*

dans cette suite de signes. On écrira de même la suite des signes que prendront ces mêmes fonctions, par la substitution de l'autre nombre B, *et l'on comptera le nombre des variations qui se trouveront dans cette seconde suite. Autant elle aura de variations de moins que la première, autant l'équation* $V = 0$ *aura de racines réelles comprises entre les deux nombres* A *et* B. *Si la seconde suite a autant de variations que la première, l'équation* $V = 0$ *n'aura aucune racine entre* A *et* B. *D'ailleurs,* B *étant plus grand que* A, *la seconde suite ne peut pas avoir plus de variations que la première.*

3.

Nous allons démontrer ce théorème, en examinant comment le nombre des variations formées par les signes des fonctions V, V_1, V_2.., V_r, pour une valeur quelconque de x, peut s'altérer, quand x passe par différens états de grandeur.

Quels que soient les signes de ces fonctions pour une valeur de x déterminée, lorsque x croît par degrés insensibles au-delà de cette valeur, il ne peut arriver de changement dans cette suite de signes qu'autant qu'une des fonctions V, V_1... change de signe et par conséquent devient nulle. Il y a donc deux cas à examiner, selon que la fonction qui s'évanouit est la première V, ou quelqu'une des autres fonctions V_1, V_2,.. V_{r-1} *intermédiaires* entre V et V_r; la dernière V_r ne peut pas changer de signe, puisque c'est un nombre positif ou négatif.

4.

Voyons, premièrement, quelle altération éprouve la suite des signes, lorsque x, en croissant d'une manière

continue, atteint et dépasse une valeur qui annulle la première fonction V. Désignons cette valeur par c. La fonction V_1, dérivée de V, ne peut pas être nulle en même temps que V pour $x = c$; car, par hypothèse, l'équation $V = 0$, n'a pas de racines égales. On voit d'ailleurs d'après les équations (1), sans s'appuyer sur la théorie des racines égales, que si les deux fonctions V et V_1 étaient nulles pour $x = c$, toutes les autres fonctions $V_2, V_3 \ldots$ et enfin V_r seraient nulles en même temps. Or, au contraire, V_r est par hypothèse un nombre différent de zéro. V_1 a donc pour $x = c$ une valeur différente de zéro, positive ou négative.

Considérons des valeurs de x très peu différentes de c. Si, en désignant par u une quantité positive aussi petite qu'on voudra, on fait tour à tour $x = c - u$ et $x = c + u$, la fonction V_1 aura pour ces deux valeurs de x le même signe qu'elle a pour $x = c$; car on peut prendre u assez petit pour que V_1 ne s'évanouisse pas et ne change pas de signe, tandis que x croît depuis la valeur $c - u$ jusqu'à $c + u$.

Il faut maintenant déterminer le signe de V pour $x = c + u$. Désignons pour un moment V par $f(x)$, V_1 par $f'(x)$, et les autres fonctions dérivées de V par $f''(x)$, $f'''(x) \ldots f^{(m)}(x)$, suivant la notation usitée. Lorsqu'on fait $x = c + u$, V devient $f(c + u)$. Or on

$$f(c+u) = f(c) + f'(c)u + \frac{f''(c)}{1.2}u^2 + \frac{f'''(c)}{1.2.3}u^3 + \text{etc.}$$

ou bien, en observant que $f(c)$ est zéro, et que $f'(c)$ ne l'est pas,

$$f(c+u) = u.\left[f'(c) + \frac{f''(c)}{1.2}u + \frac{f'''(c)}{1.2.3}u^2 + \ldots\right]$$

On voit, d'après cette expression de $f(c+u)$, qu'en attribuant à u des valeurs positives très petites, $f(c+u)$ aura le même signe que $f'(c)$, et par conséquent $f(c+u)$ aura aussi le même signe que $f'(c+u)$, puisque $f'(c+u)$ a le même signe que $f'(c)$. Ainsi V a le même signe que V_1 pour $x = c+u$.

En changeant u en $-u$ dans la formule précédente, on a

$$f(c-u) = -u.\left[f'(c) - \frac{f''(c)}{1\,2}u + \text{etc.}\right],$$

et l'on voit de même que $f(c-u)$ a un signe contraire à celui de $f'(c)$; d'où il suit que, pour $x = c-u$, le signe de V est contraire à celui de V_1.

Donc, si le signe de $f'(c)$ ou de V_1 pour $x = c$ est $+$, le signe de V sera $+$ pour $x = c+u$ et $-$ pour $x = c-u$. Si au contraire le signe de V_1 est $-$ pour $x = c$, celui de V sera $-$ pour $x = c+u$ et $+$ pour $x = c-u$. D'ailleurs V_1 a pour $x = c+u$ et pour $x = c-u$ le même signe qu'il a pour $x = c$.

Ces résultats sont indiqués dans le tableau suivant :

		V	V_1		V	V_1
pour	$x = c-u$	$-$	$+$	ou bien	$+$	$-$
	$x = c$	0	$+$		0	$-$
	$x = c+u$	$+$	$+$		$-$	$-$

Ainsi, lorsque la fonction V s'évanouit, le signe de V forme avec le signe de V_1 une variation, avant que x atteigne la valeur c qui annulle V, et cette variation est changée en une permanence après que x a dépassé cette valeur.

Quant aux autres fonctions V_2, V_3, etc., chacune aura, comme V_1, soit pour $x = c+u$, soit pour $x = c-u$, le même signe qu'elle a pour $x = c$, si toutefois aucune ne s'évanouit pour $x = c$, en même temps que V.

La suite des signes des fonctions $V, V_1, V_2, .. V_r$, perd donc une variation, lorsque x en croissant dépasse une valeur c qui annulle la première fonction V, sans annuler aucune des autres fonctions V_1, V_2, etc. Il faut maintenant examiner ce qui arrive lorsqu'une de ces fonctions s'évanouit.

5.

Soit V_n une fonction intermédiaire entre V et V_r, qui s'annulle quand x devient égal à b. Cette valeur de x ne peut réduire à zéro, ni la fonction V_{n-1} qui précède immédiatement V_n, ni la fonction V_{n+1} qui suit V_n. En effet, on a entre les trois fonctions V_{n-1}, V_n, V_{n+1}, l'équation suivante qui est l'une des équations (1)

$$V_{n-1} = V_n Q_n - V_{n+1},$$

Elle prouve que si les deux fonctions consécutives V_{n-1}, V_n, étaient nulles pour la même valeur de x, V_{n+1} serait nul en même temps; et comme on a aussi

$$V_n = V_{n+1} Q_{n+1} - V_{n+2},$$

on aurait encore $V_{n+2} = 0$, et ainsi de suite; de sorte qu'on aurait enfin $V_r = 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Les deux fonctions V_{n-1} et V_{n+1} ont donc pour $x = b$ des valeurs différentes de zéro; en outre, ces valeurs sont de signes contraires; car la même équation

$$V_{n-1} = V_n Q_n - V_{n+1}$$

donne $V_{n-1} = -V_{n+1}$ lorsqu'on a $V_n = 0$.

Cela posé, substituons à la place de x deux nombres $b - u$ et $b + u$, très peu différens de b; les deux fonctions

V_{n-1} et V_{n+1} auront pour ces deux valeurs de x les mêmes signes qu'elles ont pour $x = b$, puisqu'on peut toujours prendre u assez petit pour que ni V_{n-1} ni V_{n+1} ne change de signe quand x croît dans l'intervalle de $b - u$ à $b + u$. Quel que soit le signe de V_n pour $x = b - u$, comme il est placé dans la suite des signes entre ceux de V_{n-1} et de V_{n+1} qui sont contraires, les signes de ces trois fonctions consécutives V_{n-1}, V_n, V_{n+1} pour $x = b - u$ formeront toujours, soit une permanence suivie d'une variation, soit une variation suivie d'une permanence, comme on le voit ici :

	V_{n-1}	V_n	V_{n+1}		V_{n-1}	V_n	V_{n+1}
pour $x = b - u$	$+$	$\pm$	$-$	ou bien	$-$	$\pm$	$+$

Pareillement, les signes de ces trois fonctions V_{n-1}, V_n, V_{n+1} pour $x = b + u$, quel que soit celui de V_n, formeront une variation, et n'en formeront qu'une.

D'ailleurs, chacune des autres fonctions aura un même signe pour $x = b - u$ et $x = b + u$, pourvu qu'aucune ne se trouve nulle pour $x = b$ en même temps que V_n.

Conséquemment, la suite des signes de toutes les fonctions $V, V_1, \ldots V_r$ pour $x = b + u$ contiendra précisément autant de variations que la suite de leurs signes pour $x = b - u$. Ainsi, le nombre des variations dans la suite des signes n'est pas changé, quand une fonction intermédiaire quelconque passe par zéro.

On arriverait évidemment à la même conclusion, si plusieurs fonctions intermédiaires non consécutives s'évanouissaient pour la même valeur de x. Mais si cette valeur annullait aussi la première fonction V, le changement de signe de celle-ci ferait alors disparaître une variation sur la gauche de la suite des signes, ainsi que nous l'avons fait voir n° 4.

6.

Il est donc démontré que chaque fois que la variable x, en croissant par degrés insensibles, atteint et dépasse une valeur qui rend V égal à zéro, la suite des signes des fonctions V, V_1, V_2, ... V_r perd une variation formée sur sa gauche par les signes de V et V_1, laquelle est remplacée par une permanence; tandis que les changemens de signes des fonctions intermédiaires V_1, V_2, ... V_{r-1} ne peuvent jamais ni augmenter ni diminuer le nombre des variations qui existaient déjà. En conséquence, si l'on prend un nombre quelconque A positif ou négatif, et un autre nombre quelconque B plus grand que A, et si l'on fait croître x depuis A jusqu'à B, autant il y aura de valeurs de x comprises entre A et B, qui rendront V égal à zéro, autant la suite des signes des fonctions V, V_1, ... V_r pour $x = B$ contiendra de variations de moins que la suite de leurs signes pour $x = A$. C'est le théorème qu'il fallait démontrer.

Pour en faciliter les applications, il est nécessaire d'ajouter plusieurs remarques à ce qui précède.

7.

Dans les divisions successives qui servent à former les fonctions V_2, V_3, etc., on peut, avant de prendre un polynome pour dividende ou pour diviseur, le multiplier ou le diviser par tel nombre positif qu'on voudra. Les fonctions V, V_1, V_2, ... V_r qu'on obtiendra en opérant ainsi, ne différeront que par des facteurs numériques positifs, de celles que nous avons considérées précédem-

ment et qui figurent dans les équations (1); de sorte qu'elles auront respectivement les mêmes signes que celles-ci pour chaque valeur de x.

Avec cette modification on peut, lorsque les coefficiens de l'équation $V = 0$ sont des nombres entiers, former des polynômes V_2, V_3, etc., dont tous les coefficiens seront aussi entiers; mais il faut bien prendre garde que les facteurs numériques qu'on introduit ou qu'on supprime soient toujours positifs.

8.

Il peut arriver que l'une des fonctions $V_1, V_2, \ldots V_{r-1}$ se trouve nulle, soit pour $x = A$, soit pour $x = B$. Dans ce cas, il suffit de compter les variations qui se trouvent dans la suite des signes des fonctions V, V_1, $V_2, \ldots V_r$ en omettant la fonction qui est nulle. C'est ce qui résulte de la démonstration que nous avons donnée n° 5 pour le cas où une fonction intermédiaire s'évanouit. En effet, on a vu que, lorsque V_n s'annulle pour $x = b$, si l'on attribue à x une valeur $b - u$ ou $b + u$ très peu différente de b, les signes des trois fonctions consécutives V_{n-1}, V_n, V_{n+1} forment une variation, et n'en forment qu'une; or cette variation subsistera encore lorsqu'on fera $x = b$, et qu'on omettra dans la suite des signes le résultat o placé entre les deux signes contraires de V_{n-1} et de V_{n+1}.

Si V se trouve nul pour $x = A$, on en conclut d'abord que A est racine de l'équation $V = 0$, puis on attribue à x une valeur $A + u$ qui surpasse A d'une quantité aussi petite qu'on voudra; pour cette valeur $A + u$, le signe de V forme avec le signe de V_1 une permanence comme

on l'a vu n° 4, tandis que dans le reste de la suite des signes, depuis V_1 jusqu'à V_r, il y a le même nombre de variations que pour $x = B$. On trouvera donc par la règle générale combien l'équation $V = 0$ a de racines comprises entre $A + u$ et B, c'est-à-dire plus grandes que A et plus petites que B.

De même si B est racine de l'équation $V = 0$, on déterminera par la même règle le nombre de ses racines comprises entre A et $B - u$, en observant que pour $x = B - u$ le signe de V forme avec celui de V_1 une variation (n° 4), et que dans le reste de la suite des signes depuis V_1 jusqu'à V_r il y a autant de variations que pour $x = B$.

9.

Quand on pourra reconnaître qu'une des fonctions auxiliaires, V_n, intermédiaire entre V et V_r, conserve constamment le même signe pour toutes les valeurs de x comprises entre A et B, il ne sera point nécessaire de considérer les fonctions qui suivent V_n; il suffira de substituer ces deux nombres A et B dans les fonctions des degrés supérieurs $V, V_1, V_2, ..$ en s'arrêtant à V_n, et d'écrire les signes des résultats. *Autant la suite des signes des fonctions* $V, V_1, V_2, ..$ *jusqu'à* V_n *inclusivement, pour* $x = A$, *présentera de variations de plus que celle pour* $x = B$, *autant il y aura de racines de l'équation* $V = 0$ *comprises entre* A *et* B.

En effet, on peut appliquer au système partiel des fonctions $V, V_1, V_2, .. V_n$, la démonstration que nous avons donnée plus haut pour le système complet des fonctions $V, V_1, V_2 .., V_n, V_{n+1}, .. V_r$, dont la dernière était un nombre constant. Dans l'hypothèse actuelle V_n conserve toujours le même signe, sans avoir une valeur constante, pour

toutes les valeurs de x croissant depuis A jusqu'à B. Or, comme on l'a vu n^{os} 4 et 5, la suite des signes de ces fonctions $V, V_1, V_2 .., V_n$ perd une variation chaque fois que V devient nul, et l'évanouissement des fonctions intermédiaires entre V et V_n ne peut ni augmenter ni diminuer le nombre des variations; donc autant l'équation $V = 0$ aura de racines comprises entre A et B, autant le nombre B substitué dans les fonctions $V, V_1, V_2 .., V_n$ donnera de variations de moins que A; ce qu'il fallait prouver.

10.

On voit encore que si V_n ne change pas de signe, quand x croît depuis A jusqu'à B, on obtiendra constamment le même nombre de variations en substituant, soit A, soit B, soit tout autre nombre compris entre A et B dans la suite partielle des fonctions $V_n, V_{n+1} ..., V_r$. Mais il ne faut pas croire que réciproquement, si les deux nombres A et B substitués dans ces fonctions, donnent le même nombre de variations, V_n doive toujours conserver le même signe pour toutes les valeurs de x croissant depuis A jusqu'à B. Cette proposition inverse n'a lieu qu'autant que les fonctions $V_n, V_{n+1} ..$ remplissent certaines conditions que nous ne croyons pas devoir exposer ici. Nous dirons seulement qu'elle a lieu en particulier, lorsque les degrés respectifs de ces fonctions V_n, V_{n+1}, $V_{n+2} ..$ vont en diminuant d'une unité, et qu'en outre le premier terme de chacune est positif. Nous développerons dans un autre Mémoire cette propriété et plusieurs autres dont jouissent certaines classes d'équations.

11.

Notre théorème, modifié comme nous venons de le dire n° 9, sera souvent d'une application plus facile. Ainsi, lorsqu'en cherchant le plus grand commun diviseur de V et de V_n, on parviendra à un polynome V_n (par exemple à celui du second degré) qui égalé à zéro ne donnera que des valeurs imaginaires de x, il ne sera pas nécessaire de pousser plus loin les divisions, car ce polynome V_n sera constamment de même signe que son premier terme pour toutes les valeurs réelles de x, de sorte qu'on pourra le prendre pour la dernière des fonctions auxiliaires V_1, V_2, etc. On pourrait même encore s'arrêter à un polynome V_n qui s'annullerait pour des valeurs réelles de x, pourvu qu'on pût déterminer toutes ces valeurs. Car en désignant par p, q, r,.. celles qui seraient comprises entre A et B, après les avoir disposées par ordre de grandeur, en commençant par les plus petites, et observant que V_n conserve le même signe pour toutes les valeurs de x comprises entre A et p, on trouverait, par l'application du théorème, modifié comme dans les n°s 8 et 9, combien l'équation $V = 0$ a de racines entre A et $p - u$, u étant une très petite quantité; de même, V_n ayant encore un signe constant pour toutes les valeurs de x comprises entre p et q, on trouverait combien $V = 0$ a de racines entre $p + u$ et $q - u$, c'est-à-dire entre p et q, en prenant u suffisamment petit; on reconnaîtrait de même combien $V = 0$ a de racines entre q et r, et ainsi de suite. On suppose ici que l'équation $V = 0$ n'a pas de racines égales, et qu'une valeur de x qui annulle V_n n'annulle pas V en même temps.

Ces circonstances où l'on peut diminuer le nombre des fonctions auxiliaires méritent d'être remarquées; car les calculs nécessaires pour la détermination des fonctions V_2, V_3,... sont très longs, surtout lorsqu'on arrive aux dernières fonctions, à cause de la grandeur de leurs coefficiens numériques.

12.

Le théorème général donne le moyen de connaître le nombre total des racines réelles de l'équation $V = 0$. En effet, étant donné un polynome fonction entière de x, on peut toujours, sans connaître les valeurs de x qui l'annullent, assigner à x une valeur positive finie telle que, pour cette valeur et pour toutes les valeurs plus grandes, le polynome aura constamment le même signe que son premier terme; il en est de même pour toutes les valeurs de x négatives au-delà d'une certaine limite. Donc, si l'on représente selon l'usage par le caractère ∞ un nombre aussi grand qu'on voudra, toutes les racines réelles de l'équation $V = 0$ étant comprises entre $-\infty$ et $+\infty$, il suffira pour en connaître le nombre, de substituer $-\infty$ et $+\infty$ au lieu de A et B dans les fonctions $V, V_1, V_2, \ldots V_r$ et de marquer les deux suites de signes pour $-\infty$ et $+\infty$. Quand on fait $x = +\infty$, chaque fonction est de même signe que son premier terme. Pour $x = -\infty$ chaque fonction de degré pair, y compris la constante V_r, a le même signe qu'elle a pour $x = +\infty$, mais chaque fonction de degré impair prend pour $x = -\infty$ un signe contraire à celui qu'elle a pour $x = +\infty$. L'excès du nombre des variations formées par les signes des fonctions $V, V_1, \ldots V_r$, pour $x = -\infty$, sur le nombre des variations pour $x = +\infty$,

exprimera le nombre total des racines réelles de l'équation $V = 0$.

13.

Mais on peut faire usage d'une règle encore plus simple, pour déterminer le nombre des racines réelles et celui des racines imaginaires dans la plupart des équations.

Les fonctions auxiliaires V_1, V_2, etc., sont ordinairement en nombre égal au degré m de l'équation $V = 0$, parce que dans la recherche du plus grand commun diviseur de V et de V_1, chaque reste est ordinairement d'un degré inférieur d'une seule unité à celui du reste précédent. Toutes les fois que les fonctions V_1, V_2, etc., sont effectivement en nombre égal à m, on peut connaître le nombre des racines imaginaires de l'équation $V = 0$ par la simple inspection des signes des premiers termes de ces fonctions $V_1, V_2, ..$ y compris le signe de la dernière, qui ne contient plus x et qui doit être actuellement représentée par V_m. *L'équation* $V = 0$ *a autant de couples de racines imaginaires qu'il y a de variations dans la suite des signes des premiers termes des fonctions* V_1, V_2, *etc., jusqu'au signe de la constante* V_m *inclusivement.* Voici la démonstration de cette proposition.

Il résulte de l'hypothèse qu'on vient d'admettre, que deux fonctions consécutives V_{n-1}, V_n, sont l'une de degré pair, l'autre de degré impair. Donc si ces deux fonctions ont un même signe pour $x = +\infty$, elles auront des signes contraires pour $x = -\infty$; *et vice versâ,* si elles ont des signes contraires pour $x = +\infty$, elles auront un même signe $x = -\infty$: de sorte que si l'on écrit l'une au-dessous de l'autre les deux suites de signes des fonctions $V, V_1, V_2, .. V_m$ pour $x = -\infty$ et pour $x = +\infty$,

chaque variation dans l'une quelconque de ces deux suites correspondra à une permanence dans l'autre suite; ainsi le nombre des permanences pour $x = -\infty$ est égal au nombre des variations pour $x = +\infty$.

Soit i le nombre des variations pour $x = +\infty$, i pouvant être zéro. Ces variations sont celles que présente la suite des signes des coefficiens qui multiplient les plus hautes puissances de x dans les fonctions auxiliaires $V_1, V_2, .. V_m$, le premier terme de V et celui de V_1 étant positifs.

On vient de voir que la suite des signes pour $x = -\infty$ doit contenir i permanences; elle contiendra donc $m - i$ variations, puisque les fonctions $V, V_1, .. V_m$ sont au nombre de $m + 1$, et que dans une suite de $m + 1$ signes, le nombre des variations et celui des permanences réunis font une somme égale à m.

Or, en vertu du théorème général, le nombre des racines réelles de l'équation $V = 0$ toutes comprises entre $-\infty$ et $+\infty$, doit être égal à l'excès du nombre $m - i$ des variations pour $x = -\infty$ sur le nombre i des variations pour $x = +\infty$. L'équation $V = 0$ a donc $m - 2i$ racines réelles et par conséquent $2i$ racines imaginaires; on sait d'ailleurs que celles-ci forment des couples de la forme $a \pm b\sqrt{-1}$; ainsi le nombre de ces couples est égal à i; ce qu'il fallait démontrer.

14.

En supposant $i = 0$, on conclut de là le corollaire suivant : *le premier terme de* V *et celui de* V_1 *étant positifs, si les autres fonctions* V_2, V_3 *etc., y compris celle qui ne contient plus* x *sont au nombre de* $m - 1$, *et si elles ont*

toutes un premier terme positif, l'équation V = o *aura toutes ses racines réelles.*

Réciproquement, *si l'équation* V=o *a toutes ses racines réelles, il faut nécessairement que les fonctions auxiliaires* V_2, V_3.. *jusqu'à celle qui ne contient plus* x *inclusivement, soient au nombre de* m — 1, (ou, *en d'autres termes, que chacune de ces fonctions soit d'un degré inférieur d'une seule unité à celui de la précédente*) *et qu'en outre leurs premiers termes soient tous positifs.*

En effet, si le nombre des fonctions V_2, V_3, etc., était plus petit que $m - 1$, la suite des signes des fonctions V, V_1, V_2, etc., pour $x = -\infty$ aurait un nombre de variations plus petit que m; or, au contraire, elle doit avoir m variations de plus que la suite des signes pour $x = +\infty$, si l'équation V=o a toutes ses racines réelles. Il faut donc d'abord que le nombre des fonctions V_2, V_3.. soit $m - 1$, en outre le coefficient de la plus haute puissance de x dans chacune d'elles doit être positif, comme dans V et dans V_1; car, autrement, il y aurait une ou plusieurs variations dans la suite des signes des fonctions V, V_1, V_2.. pour $x = +\infty$ et l'équation V=o aurait des couples de racines imaginaires en nombre égal à celui de ces variations.

Lorsque les coefficiens de l'équation V= o sont indéterminés et représentés par des lettres, les polynomes V_2, V_3, etc., qu'on obtient par la recherche du plus grand commun diviseur de V et de V_1 sont respectivement des degrés $m-2$, $m-3$, etc., et les coefficiens des plus hautes puissances de x dans ces polynomes, en y comprenant V_m, sont des quantités littérales composées des coefficiens de l'équation V= o. Les conditions de la réalité de toutes les racines de cette équation V=o se réduisent donc à ce que toutes ces quantités soient positives, aucune n'étant

nulle. On voit que le nombre de ces conditions n'est pas plus grand que $m-1$; mais il peut être moindre, parceque quelques-unes peuvent être comprises dans les autres.

15.

L'usage de notre théorème pour la recherche des racines réelles d'une équation $V=0$ qui n'a pas de racines égales, se présente de lui-même.

Après avoir obtenu les fonctions V_2, V_3.. jusqu'à V_r qui ne contient plus x, on détermine en premier lieu le nombre total des racines réelles de l'équation, en écrivant les signes de ces fonctions $V, V_1, .. V_r$ pour $x=-\infty$ et pour $x=+\infty$, comme on l'a dit n° 12 ou bien en appliquant la règle du n° 13 dans le cas ordinaire où les fonctions auxiliaires V_2, V_3... etc., sont au nombre de $m-1$.

Pour trouver les racines positives, on substitue à la place de x une suite de nombres croissans 0, A, B, C, D, etc., dans les fonctions $V, V, .. V_{r1}$, et l'on écrit la suite des signes des résultats que donne chaque nombre substitué; le nombre des variations perdues en passant de la suite des signes que donne un nombre substitué à celle que donne le nombre suivant, exprime, en vertu du théorème, combien l'équation $V=0$ a de racines comprises entre ces deux nombres-là. On trouve ainsi quels sont ceux qui comprennent des racines et combien ils en comprennent.

Pour ne pas faire des substitutions inutiles, il faut s'arrêter dès qu'on arrive à un nombre qui donne autant de variations qu'en donnerait un nombre infiniment grand, c'est-à-dire autant de variations qu'il s'en trouve dans la

suite des signes des premiers termes des polynomes $V, V_1, V_2, .. V_r$ (en comptant V_r). Un tel nombre est une limite supérieure des racines de l'équation, puisque entre ce nombre et $+\infty$ il ne peut pas exister de racines.

Admettons qu'il y ait plusieurs racines entre A et B; alors on substituera un nombre intermédiaire ou plusieurs; et les variations perdues en passant d'un nombre substitué à celui qui le surpasse immédiatement, indiqueront toujours l'existence d'autant de racines comprises entre eux.

Il pourra se faire que quelques substitutions suffisent pour opérer complètement la séparation des racines, c'est-à-dire pour assigner à chacune d'elles deux limites entre lesquelles elle soit seule comprise. Mais quand des racines seront très rapprochées, on sera obligé de faire un plus grand nombre de substitutions pour les séparer. Au surplus, on verra bientôt que cette séparation n'est pas indispensable pour le calcul des racines, et qu'il suffit d'avoir la partie entière de chacune. En substituant des nombres négatifs dans les fonctions $V, V_1, .. V_r$, ou ce qui revient au même, en y substituant des nombres positifs après avoir changé dans toutes x en $-x$, on trouvera de la même manière entre quels nombres tombent les racines négatives.

Ces substitutions peuvent être effectuées de telle sorte, qu'on obtienne d'abord le chiffre de l'ordre le plus élevé de chaque racine, puis le chiffre de l'ordre immédiatement inférieur, et ainsi de suite.

16.

On peut ainsi déterminer la valeur approchée de chaque racine, à une unité près où même à une certaine

fraction près; il reste à calculer sa partie inconnue par une méthode d'approximation plus rapide. On peut ici employer celle de Newton ou celle de Lagrange.

On sait qu'il y a des cas où la première se trouve en défaut; alors il vaut mieux se servir de celle de Lagrange, à laquelle notre théorème donne le complément dont elle avait besoin, comme nous allons l'expliquer.

L'usage de cette méthode suppose que la racine qu'on veut calculer, soit seule comprise entre deux nombres entiers consécutifs; on ramène aisément à ce cas, par une transformation, celui où une racine est seule comprise entre deux limites connues. Mais lorsqu'une équation a des racines qui diffèrent entre elles de quantités très petites, on ne parvient à obtenir deux limites de chacune qu'après des substitutions multipliées, qui exigent de longs calculs. Or, on peut éviter cet inconvénient, en combinant notre théorème avec la méthode de Lagrange.

Il s'agit de calculer les racines de l'équation $V = 0$ qui sont comprises entre les deux nombres entiers consécutifs a et $a+1$. Si le théorème indique que ces deux nombres ne comprennent qu'une seule racine, on fait, suivant le procédé connu, $x = a + \frac{1}{y}$ dans l'équation $V=0$, et comme l'inconnue y ne doit avoir qu'une seule valeur positive plus grande que l'unité, on substitue, dans l'équation transformée en y, à la place de y les nombres entiers 1, 2, 3, 4,.. jusqu'à ce qu'on arrive à deux nombres consécutifs b et $b+1$, qui donnent des résultats de signes contraires; ces nombres comprennent la valeur cherchée $d_e y$; on fait ensuite $y = b + \frac{1}{z}$ dans l'équation en y, z n'ayant aussi qu'une seule valeur positive plus grande que 1; on cherche de même sa partie entière c en substituant les nombres 1, 2, 3,... et en continuant ainsi on

obtient la valeur de x exprimée par la fraction continue

$$a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \text{etc.}}}$$

Supposons actuellement que le théorème indique l'existence de plusieurs racines entre les deux nombres entiers a et $a + 1$. On fait encore $x = a + \frac{1}{y}$ dans l'équation $V = 0$; l'inconnue y devant avoir autant de valeurs positives plus grandes que l'unité que x a de valeurs entre a et $a + 1$, la simple substitution des nombres naturels 1, 2, 3, 4,.. dans l'équation transformée en y, ne suffirait pas généralement pour faire découvrir toutes ces valeurs de y, puisque deux ou plusieurs valeurs de y peuvent avoir la même partie entière. C'est pourquoi l'on doit remplacer x par $a + \frac{1}{y}$ non-seulement dans la fonction V, mais aussi dans les fonctions auxiliaires V_1, V_2, etc., en s'arrêtant à une fonction V_n, dont on soit certain que le signe reste le même pour toutes les valeurs de x comprises entre a et $a + 1$.

Les polynomes V, V_1, V_2, ... V_n étant ainsi transformés en fonction de y, on y substitue à la place de y les nombres entiers 1, 2, 3, 4, ... et l'on écrit la suite des signes que donne chaque nombre substitué. La différence entre les deux nombres de variations que donnent deux nombres entiers consécutifs b et $b + 1$, exprime combien il y a de valeurs de y, comprises entre ces deux nombres, qui satisfont à l'équation $V = 0$. Car, puisqu'on a fait $x = a + \frac{1}{y}$, en substituant b et $b + 1$ à la place de y dans les polynomes V, V_1, ... V_n exprimés en fonction de y, on obtient les mêmes résultats qu'en substituant $a + \frac{1}{b}$ et $a + \frac{1}{b+1}$ à la place de x dans les mêmes poly-

nomes exprimés sous leur forme primitive en fonction de x : or, la différence entre les deux nombres de variations que présentent les signes de ces résultats exprime le nombre des valeurs de x comprises entre $a + \frac{1}{b}$ et $a + \frac{1}{b+1}$ qui sont racines de l'équation $V = 0$, et auxquelles répondent autant de valeurs de y comprises entre b et $b + 1$.

Si l'on trouve ainsi que b et $b + 1$ comprennent plusieurs valeurs de y, on fera $y = b + \frac{1}{z}$, et l'on remplacera y par $b + \frac{1}{z}$ dans les polynomes V, V_1, V_2, ... déjà exprimés en fonction de y, en s'arrêtant, sans aller jusqu'à V_n, à un polynome V_k qui conserve toujours le même signe pour toutes les valeurs de y comprises entre b et $b + 1$; puis on substituera dans ces polynomes V, V_1, V_2, ... V_k à la place de z les nombres 1, 2, 3....

La différence entre les deux nombres de variations que donneront deux nombres entiers consécutifs c et $c + 1$, marquera le nombre des valeurs de z comprises entre c et $c + 1$ qui correspondront à des racines x de l'équation $V = 0$. En continuant ainsi, on développera en fractions continues toutes les valeurs de x comprises entre a et $a + 1$.

Lorsqu'une des inconnues successives $y, z, \ldots$ n'a qu'une seule valeur comprise entre deux nombres entiers consécutifs, on n'a plus besoin des fonctions auxiliaires V_1, V_2... pour développer cette valeur en fraction continue ; il suffit d'employer le procédé ordinaire que nous avons rappelé plus haut, pour développer une valeur de x, dans le cas où elle est seule comprise entre les deux nombres a et $a + 1$.

Si l'on doit calculer avec une grande approximation des

racines qui sont très peu différentes, on pourra d'abord obtenir, par les moyens que nous venons d'indiquer, une valeur suffisamment approchée de chaque racine, puis recourir à la méthode d'approximation de Newton, pour avoir une valeur plus exacte.

Remarques. 1° La fonction V, étant représentée par $f(x)$, devient, lorsqu'on y fait $x = a + \frac{1}{y}$,

$$V = f\left(a + \frac{1}{y}\right) = \frac{1}{y^m}\left\{f(a)y^m + f'(a)\,y^{m-1} + \frac{f''(a)}{1.2}y^{m-2} + \text{etc.}\right\}$$

Or, on n'a besoin de connaître que les signes et non les valeurs numériques des polynomes V, V_1, V_2, ... pour chaque nombre positif substitué à la place de y; on peut donc supprimer dans cette expression de V le facteur positif $\frac{1}{y^m}$, et prendre simplement pour V la fonction entière $f(a)y_m + f'(a)y^{m-1} + \frac{f''(a)}{1.2}y^{m-2} + \text{etc.}$ Cette remarque s'applique à toutes les fonctions V, V_1, V_2.... où l'on remplace x par $a + \frac{1}{y}$, ainsi qu'à toutes leurs transformées successives qu'on emploie dans le cours des calculs.

2° Il est inutile de remplacer x par $a + \frac{1}{y}$ dans la fonction V_n, si elle conserve le même signe, comme on l'a supposé, pour toutes les valeurs de x comprises entre a et $a + 1$; car elle aura aussi ce même signe pour toutes les valeurs de y plus grandes que 1.

De même on se dispensera de mettre $b + \frac{1}{z}$ à la place de y dans V_k, si V_k a un signe constant pour toute valeur de y comprise entre b et $b + 1$.

17.

Appliquons notre méthode à quelques exemples.

1^er^ EXEMPLE.

Soit l'équation

$$x^3 - 2x - 5 = 0;$$

on a ici

$$V = x^3 - 2x - 5,$$
$$V_1 = 3x^2 - 2.$$

Pour former V_2 on divise V par V_1; mais afin d'éviter les fractions, on multiplie d'abord V par 3 (n° 7): on obtient ainsi le reste $-4x - 15$, et l'on a, en changeant les signes,

$$V_2 = 4x + 15.$$

On divise ensuite V_1 par V_2, et pour éviter les fractions, on multiplie par 4 la fonction V_1, ainsi que le reste du premier degré.

Le reste, indépendant de x auquel on arrive est $+643$; on a donc

$$V_3 = -643. \quad (*)$$

L'existence de ce reste numérique prouve que l'équation proposée n'a pas de racines égales. Le nombre des fonctions auxiliaires V_1, V_2, V_3 est égal au degré de

(*) Si les coefficiens de V_1 et de V_2, étaient des nombres plus grands, on éviterait la division de V_1 par V_2, en observant qu'à cause de la relation $V_1 = V_2Q_2 - V_3$, le signe cherché de V_3 doit être contraire à celui du résultat qu'on obtiendrait en substituant dans V_1 la valeur de x unique qui annulle V_2. Or, on touve facilement le signe de ce résultat, en examinant si la valeur de x qui annulle V_2 est ou n'est pas comprise entre celles qui annullent V_1.

l'équation, et la suite des signes de leurs premiers termes, y compris V_3, est

$$+ \quad + \quad -.$$

Cette suite offrant une variation, on en conclut, d'après la proposition du n° 13, que l'équation a une couple de racines imaginaires, et par conséquent une seule racine réelle; ce qu'on peut voir encore en écrivant les signes des fonctions V, V_1, V_2, V_3 pour $x = -\infty$, et pour $x = +\infty$, et prenant la différence entre les deux nombres de variations.

Cette racine réelle étant unique, pour obtenir sa partie entière, on n'a plus besoin de considérer les fonctions auxiliaires V_1, V_2, V_3, il suffit de substituer différens nombres dans la seule fonction V. Comme 0 et $+\infty$ substitués dans V, donnent des résultats de signes contraires, on voit d'abord que cette racine est positive. En faisant $x = 2$ dans V, on a un résultat négatif; et en faisant $x = 3$, on a un résultat positif : la racine est donc comprise entre 2 et 3. On en obtiendra des valeurs aussi approchées qu'on voudra par les procédés ordinaires d'approximation qui ont été rappelés dans les n^os^ précédens. On trouvera

$$x = 2{,}09455148.$$

2^e^ EXEMPLE.

Cherchons les conditions nécessaires pour que l'équation

$$x^3 + px + q = 0$$

ait toutes ses racines réelles.

On a

$$V = x^3 + px + q,$$
$$V_1 = 3x^2 + p.$$

On obtient V_2 et V_3 par les divisions successives. Pour éviter les fractions, on a soin de multiplier le dividende par 3 dans la première division, et dans le seconde par $4p^2$ qui est une quantité positive (n° 7).

On trouve

$$V_2 = -2px - 3q,$$
$$V_3 = -4p^3 - 27q^2.$$

Les conditions de la réalité des racines de l'équation proposée sont (n^os 13 et 14) les deux suivantes :

$$-2p > 0, \qquad -4p^3 - 27q^2 > 0,$$

qui reviennent à celles-ci :

$$p < 0, \qquad 4p^3 + 27q^2 < 0.$$

La première se trouve comprise dans la seconde; ce qui est d'ailleurs bien connu.

On pourrait trouver de la même manière les conditions nécessaires pour que l'équation

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0$$

ait toutes ses racines réelles.

3^e EXEMPLE.

On verra, dans l'exemple suivant, comment on peut calculer deux racines dont la différence est très petite.

Soit l'équation

$$x^3 + 11x^2 - 102x + 181 = 0.$$

On a $$\begin{aligned} V &= x^3 + 11x^2 - 102x + 181, \\ V_1 &= 3x^2 + 22x - 102, \\ V_2 &= 854x - 2751, \\ V_3 &= +441. \end{aligned}$$

On voit d'abord, d'après la proposition du n° 14, que l'équation a ses trois racines réelles.

Pour trouver les racines positives, on substitue à la place de x les nombres 0, 1, 2, 3, 4,... dans les fonctions V, V_1, V_2, V_3, et l'on écrit les signes des résultats; on trouve

	V	V_1	V_2	V_3		
pour $x = 0$	+	−	−	+	2 variations,	(a)
$x = 1$	+	−	−	+		(a)
$x = 2$	+	−	−	+		(a)
$x = 3$	+	−	−	+	2 variations,	(a)
$x = 4$	+	+	+	+	0	(a)
$x = +\infty$	+	+	+	+	0	(a)

Ce tableau montre que l'équation a deux racines positives et qu'elles sont comprises entre 3 et 4.

Déterminons la valeur de ces racines à *un dixième* près. Pour rendre le calcul plus facile, on fera $x = 3 + y$, et l'on remplacera x par $3 + y$, non-seulement dans V, mais aussi dans V_1 et V_2, parce qu'on voit dans le tableau précédent que chacune de ces fonctions V_1, V_2, change de signe pour une valeur de x comprise entre 3 et 4. Les fonctions V, V_1,..., deviendront par cette transformation

$$\begin{aligned} V &= y^3 + 20y^2 - 9y + 1, \\ V_1 &= 3y^2 + 40y - 9, \\ V_2 &= 854y - 189, \\ V_3 &= +. \end{aligned}$$

On fera successivement $y = 0$, $y = 0{,}1$, $y = 0{,}2\ldots$; jusqu'à ce que la suite des signes des fonctions V, V_1, V_2, V_3, perde les deux variations qu'elle a pour $y = 0$ (qui répond à $x = 3$), ou jusqu'à ce que V change de signe.

		V	V_1	V_2	V_3
$y = 0$	donne	+	−	−	+
$y = 0{,}1$		+	−	−	+
$y = 0{,}2$		+	−	−	+
$y = 0{,}3$		+	+	+	+

On a donc $V = 0$ pour deux valeurs de y comprises entre 0,2 et 0,3, et par conséquent pour deux valeurs de x comprises entre 3,2 et 3,3.

On déterminera le chiffre des *centièmes* de chaque racine, en substituant à la place de y, dans les mêmes fonctions, les nombres 0,20 .. 0,21 .. 0,22 .. jusqu'à ce que la suite de leurs signes perde deux variations, ou jusqu'à ce que V change de signe. On trouvera

	V	V_1	V_2	V_3	
pour $y = 0{,}20$	+	−	−	+	
$y = 0{,}21$	+	−	−	+	$V = +\ 0{,}001261$
$y = 0{,}22$	−				$V = -\ 0{,}001352$.

On voit par le changement de signe de V, que l'une des deux valeurs cherchées de y tombe entre 0,21 et 0,22, et que l'autre doit être plus grande que 0,22 ; de sorte que les deux racines sont maintenant séparées. Dès lors on n'a plus besoin des fonctions auxiliaires V_1, V_2, V_3. On substitue 0,23 à la place de y dans la seule fonction V : on trouve le résultat positif + 0,000167 ; d'où il suit que la seconde valeur cherchée de y tombe entre 0,22 et 0,23.

Par de nouvelles substitutions faites dans V, on trouvera que le chiffre des *millièmes* est 3 pour la plus petite racine, et 9 pour l'autre. Ainsi les deux racines positives de l'équation proposée

$$x^3 + 11x^2 - 102x + 181 = 0,$$

sont 3,213 et 3,229 à *un millième près*.

On obtiendra trois chiffres décimaux de plus pour chacune, en appliquant la règle de Newton à cette équation ou à sa transformée en y. On trouvera les valeurs 3,213128 et 3,229521, exactes à *un millionième* près.

On peut obtenir les mêmes racines en cherchant leurs valeurs en fractions continues, suivant le procédé de Lagrange. Après avoir reconnu par le tableau (a) que l'équation $V = 0$ a deux racines positives entre 3 et 4, on fait $x = 3 + \frac{1}{y}$, y aura deux valeurs positives plus grandes que l'unité. On remplace x par $3 + \frac{1}{y}$, non-seulement dans V, mais aussi dans V_1 et V_2, qui changent de signe quand x croît depuis 3 jusqu'à 4. En supprimant les facteurs positifs $\frac{1}{y^3}, \frac{1}{y^2}, \ldots$ comme on l'a dit à la fin du n° 16, les fonctions deviennent :

$$\begin{aligned} V &= y^3 - 9y^2 + 20y + 1, \\ V_1 &= -9y^2 + 40y + 3, \\ V_2 &= -189y + 854, \\ V_3 &= +. \end{aligned}$$

On fait dans ces fonctions $y = 1, 2, 3, 4 \ldots$; on trouve pour

$$y = 1 \quad + \quad + \quad + \quad +$$

les mêmes résultats qu'on avait obtenus pour $x = 4$

$$\begin{aligned} y = 4 &\quad + \quad + \quad + \quad + \\ y = 5 &\quad + \quad - \quad - \quad + \end{aligned}$$

On voit que les deux valeurs cherchées de y tombent entre 4 et 5. On fait alors $y = 4 + \frac{1}{z}$; z aura encore deux valeurs plus grandes que 1. Les fonctions $V, V_1 \ldots$ deviennent

$$\begin{aligned} V &= z^3 - 4z^2 + 3z + 1, \\ V_1 &= 19z^2 - 32z - 9, \\ V_2 &= 98z - 189, \\ V_3 &= +. \end{aligned}$$

Or

	V	
$z = 1$	donne	$+ - - +$ (comme $y = 5$),
$z = 2$		$-$
$z = 3$		$+$

Donc l'une des valeurs de z tombe entre 1 et 2, l'autre entre 2 et 3. Arrivé à ce point, on n'a plus besoin des fonctions auxiliaires V_1, V_2, V_3. On développe la plus petite valeur de z en fraction continue : on pose $z = 1 + \frac{1}{t}$. L'équation précédente

$$z^3 - 4z^2 + 3z + 1 = 0$$

devient

$$t^3 - 2t^2 - t + 1 = 0;$$

t ne doit avoir qu'une seule valeur positive plus grande que l'unité; on substitue pour t, les nombres entiers 1, 2, 3. . . On trouve que 2 et 3 donnent des résultats de signes contraires; on fait donc $t = 2 + \frac{1}{u}$, u étant > 1. On trouve de même $u = 4 + \frac{1}{v}$, $v = 20 + \frac{1}{r}$, et ainsi

de suite. La plus petite racine positive de l'équation V = 0, est donc exprimée par la fraction continue

$$x = 3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{20 + \frac{1}{r}}}}}}$$

En formant les fractions convergentes et convertissant la sixième, qui est $\frac{3965}{1234}$, en fraction décimale, on trouve $x = 3,213128$, à *un millionième* près.

On calculera de la même manière la seconde valeur de z qui tombe entre 2 et 3. On aura successivement

$$z = 2 + \frac{1}{t},\ t = 1 + \frac{1}{u'},\ (1)\ u' = 4 + \frac{1}{v'},\ v' = 20 + \frac{1}{r}\ \text{etc.},$$

puis

$$x = 3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{20 + \text{etc.}}}}}},$$

et de là $x = 3,229521$, pour la seconde racine positive de l'équation proposée.

---

(1) L'équation transformée en u', se trouve la même que l'équation en u à laquelle on est arrivé dans le calcul de la première racine.

18.

Nous avons admis jusqu'à présent que l'équation proposée $V = 0$, n'avait pas de racines égales. On peut toujours faire en sorte qu'on n'ait à résoudre que des équations qui remplissent cette condition. Car on sait que si une équation a des racines égales, on peut en ramener la résolution à celle d'autres équations de degrés moindres qui n'ont que des racines inégales, et dont les racines sont celles de la proposée elle-même. On pourra donc déterminer toutes ses racines réelles à l'aide des principes exposés précédemment.

Toutefois, il ne sera pas inutile de faire voir que lors même que l'équation proposée $V = 0$ a des racines égales, le théorème énoncé n° 2 ne cesse pas d'être vrai, et peut servir encore à faire découvrir toutes les racines réelles de cette équation, sans qu'il soit nécessaire de la décomposer en deux ou plusieurs autres, qui n'aient que des racines inégales.

Supposons donc qu'en cherchant le plus grand commun diviseur de V et de V_1 comme on l'a dit n° 1, on parvienne à un reste V_r, fonction de x, qui divise exactement le reste précédent V_{r-1}. Ce dernier reste V_r est alors le plus grand commun diviseur de V et de V_1, et l'on est averti que l'équation $V = 0$ a des racines égales.

Les divisions successives donnent cette suite d'égalités

$$\begin{aligned} V &= V_1 Q_1 - V_2, \\ V_1 &= V_2 Q_2 - V_3, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots \\ V_{r-2} &= V_{r-1} Q_{r-1} - V_r, \\ V_{r-1} &= V_r Q_r. \end{aligned} \qquad (2)$$

On voit que V_r divise à la fois toutes les fonctions V, V_1, V_2, etc. Si l'on désigne par $T, T_1, T_2, .., T_r$, les quotiens que donnera la division de $V, V_1, V_2, \ldots, V_r$ par V_1, on aura les équations suivantes

$$\begin{aligned} T &= T_1 Q_1 - T_2, \\ T_1 &= T_2 Q_2 - T_3, \\ &\ldots \\ T_{r-2} &= T_{r-1} Q_{r-1} - T_r, \end{aligned} \qquad (3)$$

et enfin

$$T_r = +1.$$

Nous allons prouver que le théorème énoncé n° 2, relativement au système des fonctions $V, V_1, V_2, .., V_r$, pour le cas où l'équation $V = 0$ n'avait pas de racines égales, s'applique à ces nouvelles fonctions $T, T_1, T_2, \ldots, T_r$, quoique T_1 ne soit pas la fonction dérivée de T.

D'abord on sait que le plus grand commun diviseur V_r de V et de V_1, se compose du produit des facteurs multiples de V, élevés chacun à une puissance dont l'exposant est moindre d'une unité que dans V, d'où il suit que le quotient T de la division de V par V_r, contient tous les facteurs de V soit simples, soit multiples, à la première puissance. L'équation $T = 0$ a donc les mêmes racines que la proposée $V = 0$, mais chacune de ces racines ne se trouve qu'une fois dans $T = 0$.

Examinons maintenant comment la suite des signes des fonctions $T, T_1, T_2, .., T_r$, perd ou acquiert des variations, quand x passe par différens états de grandeur. Cette suite ne peut s'altérer qu'à cause des changemens de signe qu'éprouvent les fonctions $T, T_1, T_2, \ldots$ en s'évanouissant.

Considérons d'abord le cas où la première fonction T

devient égale à zéro. Soit c une valeur de x qui rend $T = 0$. La fonction T_1 ne peut pas être nulle en même temps que T; car si T et T_1 étaient nuls pour la même valeur de x, en vertu des équations (3) toutes les autres fonctions T_2, T_3,... et enfin T_r, seraient nulles en même temps; ce qui ne peut pas être, puisque T_r est égal à $+1$. T_1 aura donc pour $x = c$ une valeur différente de zéro, et si l'on attribue à x des valeurs $c - u$ et $c + u$ très peu différentes de c, T_1 aura pour ces valeurs le même signe qu'il a pour $x = c$.

La valeur c qui annulle T est aussi une racine de l'équation $V = 0$. Supposons qu'elle se trouve p fois dans $V = 0$, ou en d'autres termes que V soit divisible par $(x - c)^p$: en désignant le quotient par $\varphi(x)$, on a

$$V = (x - c)^p \cdot \varphi(x)$$

et sa fonction dérivée V_1 a pour expression

$$V_1 = (x - c)^{p-1} [p\varphi(x) + (x - c)\,\varphi'(x)].$$

On tire de là

$$\frac{V}{V_1} = \frac{(x - c)\,\varphi(x)}{p\varphi(x) + (x - c)\,\varphi'(x)} = \frac{x - c}{p + \dfrac{(x - c)\,\varphi'(x)}{\varphi(x)}};$$

mais puisque

$$V = TV_r \text{ et } V_1 = T_1 V_r,$$

on a

$$\frac{V}{V_1} = \frac{T}{T_1},$$

donc aussi

$$\frac{T}{T_1} = \frac{x - c}{p + \dfrac{(x - c)\,\varphi'(x)}{\varphi(x)}} \qquad (4)$$

Cette formule fait voir que le quotient $\frac{T}{T_1}$ est positif pour des valeurs de x un peu plus grandes que c, et né-

gatif pour des valeurs de x un peu plus petites que c. Ainsi, pour $x = c + u$, T a le même signe que T_1 et pour $x = c - u$, T a un signe contraire à celui de T_1. Chacune des autres fonctions T_2, T_3,. . aura d'ailleurs, soit pour $x = c - u$, soit pour $x = c + u$, le même signe qu'elle a pour $x = c$, si toutefois aucune ne s'évanouit pour $x = c$. On conclut de là, que la suite des signes des fonctions T, T_1, T_2, .., T_r perd une variation lorsque x en croissant dépasse une valeur qui annulle la seule fonction T.

Quand une des autres fonctions T_1, T_2, . . T_{r-1}, s'évanouira pour une valeur de x qui ne réduira pas en même temps T à zéro, le nombre des variations restera le même dans la suite des signes. En effet, supposons $T_n = 0$ pour $x = b$: en vertu des équations (3), les deux fonctions adjacentes T_{n-1} et T_{n+1}, auront pour $x = b$ des valeurs différentes de zéro, et de signes contraires, car si l'on supposait T_{n-1} ou T_{n+1} nul en même temps que T_n, on voit que toutes les fonctions jusqu'à T_r inclusivement seraient nulles à la fois, ce qui est impossible, puisqu'on a $T_r = 1$. Le signe de T^n pour $x = b - u$, quel qu'il soit, étant placé entre les signes de T_{n-1} et de T_{n+1} qui sont contraires, ces trois signes consécutifs formeront une variation et n'en formeront qu'une, et il en sera de même pour $x = b + u$. Il résulte de là que le nombre des variations n'est pas changé dans la suite des signes de T, T_1, . ., T_r, quand une fonction intermédiaire vient à s'évanouir, à moins que la première fonction T ne s'annulle en même temps, auquel cas la suite des signes perd une variation, comme on l'a vu plus haut.

En conséquence, si x croît depuis A jusqu'à B, *autant il y aura de valeurs de* x *entre* A *et* B *qui rendront* T *égal à zéro, autant la suite des signes des fonctions*

$T, T_1, T_2, .., T_r$ *pour* $x = B$ *contiendra de variations de moins que la suite de leurs signes pour* $x = A$.

On peut à l'aide de cette proposition, déterminer les racines réelles de l'équation $T = 0$, qui sont aussi celles de la proposée $V = 0$, sans être obligé de faire sur la fonction T et sa dérivée l'opération du plus grand commun diviseur; il suffit de l'avoir faite sur V et V_1.

L'équation $T = 0$ n'ayant que des racines inégales, il reste à savoir, après qu'on aura calculé l'une d'elles, combien de fois elle se trouvera dans la proposée $V = 0$. Désignons par c, comme précédemment, une racine de l'équation $T = 0$ qui entre p fois dans $V = 0$. T étant divisible par le facteur $x - c$ une fois seulement, posons

$$T = (x - c)\,\psi(x).$$

En nommant T′ la fonction dérivée de T, on a

$$T' = \psi(x) + (x - c)\,\psi'(x)$$

et conséquemment

$$\frac{T}{T'} = \frac{x - c}{1 + \dfrac{(x - c)\psi'(x)}{\psi(x)}}.$$

Si l'on divise cette valeur de $\frac{T}{T'}$ par celle de $\frac{T}{T_1}$ trouvée plus haut, formule (4), il vient

$$\frac{T_1}{T'} = \frac{p + \dfrac{(x - c)\,\varphi'(x)}{\varphi(x)}}{1 + \dfrac{(x - c)\psi'(x)}{\psi(x)}},$$

d'où l'on tire, en faisant $x = c$,

$$\frac{T_1}{T'} = p.$$

Ainsi, après avoir calculé une racine c de l'équation $T=0$, on la substituera dans les deux fonctions T_1 et T' et le quotient qu'on obtiendra en divisant le premier résultat par le second, exprimera combien de fois cette racine se trouvera dans l'équation $V=0$. Quand la racine c sera irrationnelle, on n'aura que des valeurs approchées de T_1 et de T', mais leur quotient devra différer très peu d'un nombre entier qui sera p. On connaît d'ailleurs d'autres moyens de déterminer le degré de multiplicité de chaque racine de l'équation $V=0$.

Il faut remarquer, enfin, qu'on peut se dispenser d'effectuer la division de $V, V_1, V_2, \ldots$, par V_r. En effet on a

$$V=TV_r, \quad V_1=T_1V_r, \quad V_2=T_2V_r, \ldots \quad V_r=T_rV_r.$$

Donc, si pour une valeur donnée de x, V_r a une valeur positive, V aura pour cette valeur de x le même signe que T, V_1 aura le même signe que T_1, V_2 le même signe que T_2 et ainsi de suite jusqu'à V qui a le même signe que $T_r=+1$. Mais si V_r a une valeur négative, les signes de $V, V_1, \ldots, V_r$ seront contraires à ceux de $T, T_1, \ldots, T_r$ respectivement. Ainsi, quel que soit le signe de V_r, la suite des signes de $V, V_1, V_2, \ldots V_r$, présentera les mêmes variations que la suite des signes de $T, T_1, T_2, \ldots, T_r$. De cette remarque et de la proposition qui précède, on conclut *que le nombre des racines réelles différentes de l'équation* $V=0$ *comprises entre* A *et* B, *abstraction faite du degré de multiplicité de chacune, est égal à l'excès du nombre des variations contenues dans la suite des signes des fonctions* $V, V_1, V_2, \ldots V_r$, *pour* $x=$ A *sur le nombre des variations contenues dans la suite de leurs signes pour* $x=$ B. Notre théorème est ainsi étendu au cas où l'équation proposée $V=0$ a des racines égales.

19.

On peut être curieux de savoir comment la suite des signes des fonctions V, V_1, V_2, ..., V_r doit se modifier, pour qu'elle puisse perdre une variation chaque fois que V s'évanouit.

On a vu, n^os 4 et 18, que si c est une racine, soit simple soit multiple, de l'équation $V = 0$, les deux fonctions V et V_1 doivent avoir des signes contraires pour $x = c - u$ et le même signe pour $x = c + u$. De même, si l'on désigne par c' la racine simple ou multiple de l'équation $V = 0$, qui surpasse c immédiatement, de sorte qu'entre c et c', il n'y ait pas d'autre racine, V_1 aura pour $x = c' - u$ un signe contraire à celui de V. Or, V a constamment le même signe pour toutes les valeurs de x comprises entre c et c'; et comme V_1 a le même signe que V pour $x = c + u$ et un signe contraire à celui de V pour $x = c' - u$, on voit que V_1 a deux valeurs de signes contraires pour $x = c + u$ et pour $x = c' - u$; donc, tandis que x croît depuis $c + u$ jusqu'à $c' - u$, V_1 doit changer de signe une fois, ou un nombre impair de fois (1).

Soit γ la valeur unique de x ou la plus petite valeur de x, entre c et c', pour laquelle V_1 change de signe; V et V_1 auront pour $x = \gamma - u$ le même signe commun

(1) On sait que cette propriété, qui est le fondement des méthodes proposées par *Rolle* et *de Gua* pour la résolution des équations, n'est pas bornée aux fonctions entières. On la démontre aisément pour une fonction quelconque $f(x)$ d'une variable x, en observant que si la fonction dérivée $f'(x)$ est constamment positive ou négative pour toutes les valeurs de la variable x comprises entre deux limites données, la fonction $f(x)$ doit croître ou décroître continuellement dans leur intervalle; d'où il suit qu'elle ne peut pas s'évanouir pour deux valeurs de x comprises entre ces limites.

qu'elles ont pour $x = c + u$. Pour $x = \gamma + u$, V aura ce même signe; mais V_1 aura le signe contraire. V_2 aura un signe contraire à celui de V pour les trois valeurs $\gamma - u$, γ et $\gamma + u$ (n° 5). Si, par exemple, V est positif pour $x = c + u$, on aura le tableau suivant :

	V	V_1	V_2
pour $x = \gamma - u$	+	+	—
$x = \gamma$	+	0	—
$x = \gamma + u$	+	—	—.

Ainsi, avant que x atteignît la valeur c qui annulle V, les signes de V et de V_1 formaient une variation qui est changée en une permanence après que x a dépassé cette valeur c; cette permanence subsiste jusqu'à ce que V_1 change de signe, puis elle est de nouveau remplacée par une variation après le changement de signe de V_1 : mais en même temps il y a une variation formée par les signes de V_1 et de V_2, qui se change en permanence; de sorte que le nombre des variations dans la suite totale des signes n'est ni augmenté ni diminué.

Si V_1 change de signe une seconde fois pour une nouvelle valeur de x comprise entre c et c', la variation que forment les signes de V et de V_1 avant que x atteigne cette valeur, sera de nouveau remplacée par une permanence; et cependant, à cause de V_2, le nombre des variations restera le même dans la suite des signes. Comme V_1 ne peut ainsi changer de signe qu'un nombre impair de fois, après son dernier changement, les signes de V et de V_1 formeront une variation qui subsistera jusqu'à ce que x atteigne la valeur c' qui annulle V. On n'a point à considérer ici le cas où V_1 s'évanouit sans changer de signe.

20.

V_1 étant la fonction dérivée de V, nous savons que si V est nul pour $x = c$, V a un signe contraire à celui de V_1 pour $x = c - u$ et le même signe que V_1 pour $x = c + u$. C'est ce qu'on peut exprimer plus brièvement en disant que le quotient $\frac{V}{V_1}$ passe toujours du négatif au positif quand V s'évanouit.

Supposons maintenant que V_1 ne soit plus la fonction dérivée de V, mais que ce soit un polynome quelconque d'un degré inférieur à celui de V et qui n'ait aucun facteur réel commun avec V. On pourra se servir de ce polynome V_1, pour en former d'autres V_2, V_3, etc., de degrés décroissans, par des divisions successives, comme on s'est servi n° 1, du polynome dérivé.

Considérons ce nouveau système de fonctions V, V_1, V_2,..., V_r, qui vérifient aussi les équations (1). Quand x, en croissant, atteint et dépasse une valeur c qui annulle V, il peut arriver que le quotient $\frac{V}{V_1}$ passe du négatif au positif, ou du positif au négatif, ou enfin qu'il ne change pas de signe. Dans le premier cas, la suite des signes des fonctions V, V_1, V_2,.., V_r perd sur sa gauche une variation; dans le second, elle acquiert au contraire une variation; dans le troisième, le nombre de ses variations n'est pas changé. D'ailleurs (n° 5) l'évanouissement d'une fonction intermédiaire entre V et V_r ne peut pas altérer le nombre des variations. De là il est aisé de conclure la théorème suivant qui remplace celui du n° 2, lorsque la fonction V_1 n'est pas la dérivée de V :

Le nombre des racines de l'équation $V = 0$ comprises entre les deux nombres A et B, pour lesquelles le quo-

tient $\frac{V}{V_1}$ passe du négatif au positif, moins le nombre des racines de la même équation comprises entre A et B, pour lesquelles $\frac{V}{V_1}$ passe du positif au négatif, est égal au nombre des variations qui se trouvent dans la suite des signes des fonctions V, V_1, V_2,.., V_r, pour $x = A$, moins le nombre de leurs variations pour $x = B$.

Le nombre des racines de l'équation $V = 0$ comprises entre A et B, ne peut donc pas être moindre que la différence entre ces deux nombres de variations; mais il puet être égal à cette différence, ou la surpasser d'un nombre pair quelconque. Pour qu'il lui soit précisément égal, il faut que V_1 soit la fonction dérivée de V ou bien une fonction qui ait toujours le même signe que cette dérivée, ou un signe contraire au sien, pour chaque valeur réelle de x comprise entre A et B qui annulle V. Comme on ne connaît pas *à priori* une telle fonction, on est obligé de prendre pour V_1 la fonction dérivée de V, si l'on veut déterminer avec certitude toutes les racines réelles de l'équation $V = 0$.

21.

Lorsque V_1 est la fonction dérivée de V, le système des fonctions auxiliaires V_1, V_2, V_3, etc., qu'on déduit les unes des autres par le calcul du plus grand commun diviseur entre V et V_1 n'est pas le seul qu'on puisse employer pour la recherche des racines réelles de l'équation $V = 0$. Nous allons montrer qu'on peut en former une infinité d'autres qui jouissent des mêmes propriétés.

Multiplions la fonction dérivée V_1 par le binome $px+q$, où p et q sont des indéterminées, et retranchons V du

produit : nous aurons pour résultat un polynome du degré m : divisons-le par une fonction du second degré de la forme $ax^2 + bx + c$, a, b, c étant des nombres tout connus, tels que cette formule soit constamment positive pour toute valeur réelle de x, ou que du moins elle ne s'évanouisse que pour une seule valeur de x qui n'annulle pas V_1, et qu'elle soit positive pour toute autre valeur. La division du polynome $V_1(px+q) - V$ par $ax^2 + bx + c$, nous donnera un quotient fonction de x du degré $m - 2$ que nous désignerons par V_2, contenant p et q à la première puissance dans tous ses termes, et un reste du premier degré de la forme $Kx + L$, dont les coefficiens K, L contiendront aussi les indéterminées p et q au premier degré. Égalons ces quantités K, L à zéro, nous en tirerons des valeurs de p et de q qui seront ordinairement finies et déterminées ; substituons ces valeurs dans le quotient V_2, il deviendra un polynome tout connu. La fonction V_2 déterminée par ce calcul est donc liée avec V et V_1 par l'équation

$$V_1(px+q) - V = V_2(ax^2 + bx + c),$$

ou

$$V = V_1(px + q) - V_2(ax^2 + bx + c). \quad (6)$$

Si le coefficient de x^{m-2} dans V_2 ne se trouve pas nul, on formera de la même manière une fonction V_3 du degré $m-3$, en divisant le polynome $V_2(rx + s) - V_1$ par un nouveau diviseur du second degré $ex^2 + fx + g$, qui soit aussi positif pour toutes les valeurs réelles de x et ne puisse s'évanouir que pour une seule valeur de x qui n'annullera pas V_2. On déterminera r et s de manière que

le reste de cette division soit nul, et l'on substituera leurs valeurs dans le quotient V_3. On aura ainsi,

$$V_1 = V_2(rx + s) - V_3(ex^2 + fx + g). \qquad (6)$$

Si V_2 était du degré $m - 3$, on remplacerait le binome $rx + s$ par un trinome $rx^2 + sx + t$; on diviserait $V_2(rx^2 + sx + t) - V_1$ par $ex^2 + fx + g$, et l'on déterminerait r, s, t, de manière que le quotient V_3 fût au plus du degré $m - 4$; alors V_3 satisferait à l'équation

$$V_1 = V_2(rx^2 + sx + t) - V_3(ex^2 + fx + g). \qquad (6)$$

On calculera de la même manière des fonctions V_4, V_5, etc.

Si l'équation $V = 0$ n'a pas de racines égales, on arrivera à une dernière fonction V_r qui ne contiendra plus x; car si l'on arrivait à une fonction V_r contenant encore x, et que la suivante V_{r+1} fût identiquement nulle, V_r devrait, en vertu des équations (6), diviser à la fois toutes les fonctions précédentes, et enfin V_1 et V, ce qui est contre l'hypothèse.

Cela posé, le théorème énoncé n° 2 pour les fonctions V, V_1, V_2, etc., que nous avons définies n° 1, et qui vérifient les équations (1), a lieu également pour les nouvelles fonctions dont nous venons d'expliquer la formation : car on peut appliquer à ce nouveau système de fonctions $V, V_1, .., V_r$ toute la démonstration développée dans les n°s 3, 4 et 5. Ainsi, V_1 étant toujours la fonction dérivée de V, la suite des signes de ces fonctions perdra une variation chaque fois que V s'évanouira. Mais le nombre des variations restera le même, quand une des fonctions inter-

médiaires V_1, V_2, .. s'évanouira, parce qu'alors les deux fonctions adjacentes auront des valeurs différentes de zéro et de signes contraires : ce que l'on conclut facilement des équations (6) et des hypothèses que nous avons admises.

Le théorème aura lieu encore pour ce nouveau système de fonctions V, V_1,..., V_r, dans le cas même où l'équation $V = 0$ aura des racines égales, pourvu qu'aucun des trinomes $ax^2 + bx + c$, $ex^2 + fx + g$, etc., ne divise V.

Comme le diviseur du second degré $ax + bx^2 + c$, qui sert à former la fonction V_2, peut être pris à volonté, pourvu qu'il remplisse les conditions énoncées plus haut, on pourra obtenir une infinité de fonctions qui seront représentées par V_2. De même, avec V_1 et l'une de ces fonctions V_2, on pourra composer une infinité de fonctions V_3, et ainsi de suite. Il est donc possible de former une infinité de systèmes de fonctions auxiliaires, propres à la résolution de l'équation $V = 0$.

Le système que nous avons considéré particulièrement dans ce Mémoire, et qui est défini par les équations (1), est compris parmi ceux que nous venons d'indiquer. On peut le déduire des équations générales (6), en réduisant les trinomes $ax^2 + bx + c$, $ex^2 + fx + g$, etc., à l'unité ou à de simples nombres positifs.

Il existe encore un autre moyen particulier de former les fonctions auxiliaires, aussi simple que celui qui a été exposé n° 1. Quand on a deux fonctions consécutives, V_{n-1} et V_n, on peut former la suivante V_{n+1}, en divisant V_{n-1} par V_n, après avoir ordonné ces polynomes suivant les puissances croissantes de x, au lieu de les ordonner suivant les puissances décroissantes, comme on a coutume de le faire. La division donnera un quo-

tient de la forme $p + qx$, et un reste divisible par x^2; en changeant les signes de tous les termes de ce reste, et le divisant par x^2, on aura la fonction V_{n+1}, qui est ainsi liée avec V_{n-1} et V_n par la relation

$$V_{n-1} = V_n(p + qx) - V_{n+1}\,x^2,$$

Cette relation est comprise dans les équations générales (6), lorsqu'on réduit les trinomes $ax^2 + bx + c$, $ex^3 + fx + g$,... au seul terme x^3.

Ainsi, pour obtenir V_{n+1}, on peut effectuer la division de V_{n-1} par V_{n+1} de deux manières différentes, en ordonnant ces polynomes suivant les puissances décroissantes de x, ou suivant les puissances croissantes. La combinaison de ces deux procédés donne plusieurs systèmes de fonctions auxiliaires également propres à la résolution de l'équation $V = 0$; et de là résultent aussi plusieurs systèmes de quantités dépendantes des coefficiens de cette équation, dont les signes font connaître le nombre de ses racines réelles.

Il y aurait encore d'autres moyens de former des fonctions auxiliaires. Mais de plus longs détails sur ce sujet seraient superflus.

RECHERCHES

SUR

QUELQUES CHANGEMENS

OBSERVÉS DANS

LES ANIMAUX DOMESTIQUES

TRANSPORTÉS DE L'ANCIEN DANS LE NOUVEAU CONTINENT.

(LU A L'ACADÉMIE DES SCIENCES LE 29 SEPTEMBRE 1828.)

RECHERCHES

SUR

QUELQUES CHANGEMENS

OBSERVÉS DANS

LES ANIMAUX DOMESTIQUES

TRANSPORTÉS DE L'ANCIEN DANS LE NOUVEAU CONTINENT;

PAR M. ROULIN,
Docteur en Médecine.

Pendant un séjour de six années en Colombie, j'ai recueilli, sur quelques points de l'histoire naturelle, mais plus particulièrement sur ce qui concerne les mammifères et les oiseaux, un certain nombre d'observations que je me propose de soumettre successivement au jugement de l'Académie.

Des grands mammifères que l'on trouve maintenant en ce pays, les plus nombreux sont ceux qui ont été transportés de l'ancien continent. Comme ce sont en même temps les plus utiles, on s'est beaucoup occupé de leur existence dans ces contrées sous le point de vue économique; mais sous le point de vue scientifique, on semble les avoir complètement oubliés. Peut-être suppose-t-on les avoir étudiés assez en Europe, pour n'avoir plus besoin de s'en occuper en Amérique.

Cependant l'introduction dans un nouveau monde d'animaux qui se substituent en quelque sorte aux espèces indigènes, forme une époque dont l'histoire mérite certainement d'être étudiée. Leur établissement n'a-t-il été accompagné d'aucune circonstance, d'aucun phénomène remarquable ? Une fois naturalisés dans le pays, sont-ils restés ce qu'ils étaient en Europe; ou s'ils ont subi quelque changement durable, cette transformation peut-elle jeter du jour sur celle qu'ils ont éprouvée autrefois en passant de l'état sauvage à l'état domestique? Voilà plusieurs points qui méritent d'être éclaircis, mais qui ne pourront l'être d'une manière complète, que lorsqu'on aura réuni des observations faites en différens points de ce vaste pays. Je présente aujourd'hui celles que j'ai été à portée de recueillir dans la Nouvelle-Grenade et dans une partie du Vénézuela, du 3e au 10e degré de lat. N, et du 70e au 80e degré de longitude occidentale.

Cette portion de pays, sans être très étendue, offre un champ des plus favorables pour de semblables observations. La grande Cordilière des Andes, qui la traverse d'un bout à l'autre en s'y divisant en trois chaînes principales, porte sur ses flancs, dans ses vallées et sur ses larges plateaux, des habitations qui, selon la hauteur à laquelle elles sont placées, jouissent de climats fort différens. Le voyageur peut ainsi, quelquefois dans l'espace d'une journée, comparer entre eux des animaux appartenant à une même espèce, et dont les uns vivent dans une température moyenne de 10° centigrades, les autres dans une de 25° ou même plus.

Les mammifères qui ont été transportés de l'ancien continent dans le nouveau sont : le porc, le cheval, l'âne, la brebis, la chèvre, la vache, le chien et le chat.

Les porcs furent amenés en Amérique par Colomb, et établis dans l'île de Saint-Domingue, l'année même qui suivit la découverte de cette île, au mois de novembre 1493. Dans les années suivantes, ils furent portés successivement en tous les lieux où les Espagnols songèrent à se fixer. Les premiers qui parurent sur la plaine de Bogota y étaient venus par un chemin bien indirect. Ils n'avaient pas, comme il serait bien naturel de le croire, remonté la Madeleine à la suite de Quesada, le premier conquérant du pays; ils venaient du Pérou avec les soldats de Benalcazar, un des lieutenans de Pizarre. Ces soldats, qui depuis un an marchaient à la recherche de l'El Dorado et ne pouvaient prévoir où ils s'arrêteraient, conservaient toujours cependant l'idée de former un établissement fixe, et ils conduisaient depuis Quito des porcs mâles et femelles pour faire race dans leur future colonie (1). Au reste, cette persévérance n'était rien, comparée à celle dont avait fait preuve une troisième expédition arrivée presque au même instant dans le même pays. Les compagnons de Federman, après avoir, pendant cinq ans, souffert les plus cruelles misères dans les plaines situées à l'orient de la Le Porc.

(1) Il est nécessaire de rappeler ici que la conquête du Pérou était alors toute récente, et que rien d'important ne s'était fait avant la prise d'Atahualpa, qui eut lieu le 3 mai 1533. Benalcazar, qui était arrivé de Panama juste à temps pour assister à ce grand événement, fut aussitôt après envoyé vers la province de Quito, où un des principaux généraux de l'Inca se maintenait à la tête d'une armée considérable. La soumission de la province n'était pas complète à la fin de 1534; cependant, en 1535, Benalcazar fonda la ville de Guayaquil, et en 1536, celle de Carthago dans la vallée du Cauca. Obligé de retourner à Quito pour apaiser un soulèvement, il reprit, en 1538, sa marche vers le sud, fonda en passant la ville de Popayan; et, après avoir traversé la Cordilière moyenne, il marchait vers Guatavita, la demeure du prince doré (*el Dorado*), lorsqu'il fut rencontré par les gens de la troupe de Quesada. Cette activité, cet esprit organisateur, n'étaient pas des qualités particulières à Benalcazar, et on les trouve à un très haut degré chez presque tous les chefs espagnols qui figurent dans la conquête de l'Amérique.

Cordilière, venaient d'apparaître sur le plateau de Bogota, presque nus, exténués de faim et de fatigue, et apportant néanmoins des poules et des coqs dont ils s'étaient chargés à leur départ de Vénézuela.

Les porcs, étant moins difficiles à transporter que les autres mammifères domestiques, les devancèrent presque en tous lieux, et, dans l'espace d'un demi-siècle, ils se répandirent du 25e degré de latitude N. au 40e de latitude S. Nulle part ils ne semblèrent souffrir du changement de climat, et dès le commencement, ils se reproduisirent avec la même facilité qu'en Europe. Ils s'étaient tellement multipliés à Saint-Domingue, qu'il fallut travailler à en diminuer le nombre, du moment où l'on eut commencé à introduire dans cette île la culture de la canne à sucre; car, quelque bien gardées que pussent être les pièces de cannes, ils finissaient toujours par s'y introduire et ils y faisaient les plus grands ravages.

Avant cette destruction, et pendant que les troupeaux de porcs erraient en liberté autour des habitations, il s'en écartait toujours quelques individus qui s'enfonçaient dans les bois où ils devenaient bientôt sauvages. La même chose arriva dans les autres îles où les Espagnols s'établirent; et nous savons par Oviédo que, moins de trente ans après la découverte de l'Amérique, il existait des cochons marrons à Cuba, à Porto-Rico, à la Jamaïque, etc. « On n'en trouve point sur le continent, poursuit notre auteur, parce que là ils rencontrent des bêtes féroces qui les détruisent dès qu'ils ne sont plus sous la protection de l'homme. » La remarque peut être vraie pour les parties de la côte ferme qu'Oviédo a connues, mais elle ne l'est plus pour les provinces de l'intérieur. J'ai rencontré en effet de ces porcs marrons dans les grandes plaines ou *Llanos* qui s'étendent à l'est de la Cordilière des Andes, notamment sur la

rive gauche du Méta, entre le village de *Guanapalo* et la ville de *Pore*. Cependant les animaux carnassiers ne manquaient pas dans ce pays, puisque le majordome d'une ferme de bétail (*hato*) qui avait été formée dans les environs quelque temps auparavant, avait tué la première année soixante-deux couguards et onze jaguars, dont un dans l'intérieur même de sa maison. Il est vrai que les animaux dont ces grands *feles* font leur proie sont encore beaucoup plus nombreux; de sorte que même parmi les espèces les moins favorisées il échappe toujours quelques individus.

Pour donner une idée de la quantité d'animaux sauvages qui se trouvent dans les parages où j'ai trouvé les cochons marrons, il suffira de dire que, m'étant arrêté pendant la grande chaleur du jour à l'ombre d'un tamarin qui occupait le centre d'une immense plaine, j'ai eu en vue dans un même instant treize cerfs et cinq cabiais. Dans l'espace de trois heures j'en comptai près de quarante.

Les cochons marrons que j'aperçus dans cette journée étaient trop éloignés pour que je pusse bien distinguer leur forme. L'œil exercé de mon guide pouvait la reconnaître à cette distance; mais moi je les avais pris pour des cabiais. Le soir même j'eus occasion de goûter de leur chair, que je trouvai maigre et décidément inférieure à celle des cochons domestiques. Les pâtres chez qui je la mangeai en faisaient pourtant un régal, parce que, du moins, cela variait l'uniformité fatigante de leur régime, qui, pendant six mois de l'année, se compose presque exclusivement de viande de vache, sans pain et sans légumes. Ils poursuivent les cochons marrons à cheval et les atteignent aisément; car, bien que ces animaux fournissent d'abord une course rapide, ils sont bientôt hors d'haleine; et si même, après les avoir joints, on continue à les pousser, pour peu que le temps soit très chaud, on les fait tomber

asphyxiés. Les cochons domestiques, plus chargés de graisse, sont encore plus sensibles à l'action de la chaleur; et quand on les fait marcher par un temps chaud, même sans les presser, il en meurt toujours par suffocation. Aussi les troupeaux qu'on amène à Bogota, où il se mange beaucoup de chair de porc, n'arrivent-ils d'ordinaire que par les temps de pluie.

La plupart des porcs qui se consomment dans la Nouvelle-Grenade, viennent des vallées chaudes où on les élève en grande quantité, parce que leur nourriture y coûte peu. Dans certaines saisons même, elle se compose presque entièrement de fruits sauvages, et surtout de ceux de différentes espèces de palmiers.

Errant tout le jour dans les bois, ces animaux ont perdu presque toutes les marques de la servitude : les oreilles se sont redressées, la tête s'est élargie, relevée à la partie supérieure ; la couleur est redevenue constante; elle est entièrement noire. Les jeunes individus, sur une robe un peu moins obscure, portent en lignes fauves la livrée comme les marcassins.

Tels sont, en général, les porcs qu'on amène à Bogota des vallées de Tocayma, Cunday, Melgar, etc. Leur poil est rare; à cela près, ils présentent tout-à-fait l'aspect d'un sanglier de même âge (1 an à 18 mois).

Le sanglier, au reste, peut subir par l'effet de l'esclavage une altération qui le rapproche en ce point des porcs de la Nouvelle-Grenade; c'est ce que j'ai eu tout récemment l'occasion d'observer en France, dans une ferme des environs de Fougères, où l'on élevait sept à huit de ces animaux. Un de ces sangliers, âgé d'environ deux ans, était depuis le commencement du printemps nourri à l'étable, parce qu'on voulait l'engraisser avant de le tuer. Quoiqu'il ne fût pas prisonnier en ce lieu, la nourriture qu'il y trou-

vait constamment, suffisait depuis deux mois pour l'y retenir. Plongé dans cette atmosphère humide et chaude, il avait perdu une grande partie de son poil, et dans cet état il ressemblait, à s'y méprendre, aux cochons que j'ai décrits, sauf que deux rides longitudinales sur les côtés du museau, en se prononçant plus fortement, donnaient à son aspect plus de férocité. D'un autre côté, le porc qui habite les *Paramos*, c'est-à-dire les montagnes qui sont à plus de 2,500 mètres d'élévation, éprouve une modification en sens inverse, et prend beaucoup de l'aspect du sanglier de nos forêts. Son poil devient très épais, souvent un peu crépu, et présente même en-dessous, chez quelques individus, une espèce de laine. Au reste, le cochon que l'on trouve en ces lieux est petit, rabougri, par suite du défaut d'une nourriture suffisante, et par l'action continue d'un froid qui cependant n'est pas excessif.

Dans quelques parties chaudes, le cochon n'est pas noir comme celui que je viens de décrire, mais roux comme le pécari dans son jeune âge. A Melgar même et dans les autres lieux que j'ai cités, le porc n'est pas toujours entièrement noir; il s'en trouve qu'on nomme *sanglés* (cinchados), parce qu'ils ont sous le ventre une large bande blanche qui va communément se réunir sur le dos, tantôt en se rétrécissant, et tantôt en conservant la même largeur.

Les jeunes individus, dans cette variété, portent la livrée tout comme dans la variété noire.

Les seuls porcs qu'on voie en Colombie, semblables à ceux de France, ont été importés depuis une vingtaine d'années seulement; ils ne viennent pourtant pas d'Europe, mais des États-Unis d'Amérique. Il est bon, au reste, d'observer que dans les environs de New-Yorck, où cette race existait depuis long-temps, elle avait un climat très sem-

blable au nôtre, et était, comme chez nous, l'objet de soins constans de la part de l'homme.

On remarquait la même différence parmi les cochons sauvages qui, vers la fin du dix-septième siècle, se trouvaient encore en assez grande abondance dans les îles françaises, d'où ils ne tardèrent pas au reste à disparaître, grâce à l'esprit destructif de nos colons. « Les cochons marrons qu'on trouve dans nos îles, dit le P. Labat, sont de deux sortes, et il est facile de les distinguer. Ceux qui viennent de race espagnole, c'est-à-dire de ces premiers que les Espagnols y mirent dans le commencement de leurs découvertes, sont courts et ramassés ; ils ont la tête grosse et le grouin court. Leurs défenses sont fort longues... Ils se défendent vigoureusement et avec fureur contre les chasseurs et les chiens, et ils sont extrêmement dangereux quand ils sont blessés. Leur poil est long, rude et tout noir... Avant que j'eusse été en Espagne, je ne savais d'où était venue la race de ces cochons; mais j'ai reconnu, étant à Cadix et aux environs, que les premiers qu'on avait apportés en Amérique avaient été pris en ce pays, parce que ceux qu'on y voit encore aujourd'hui leur ressemblent parfaitement. La seconde espèce, ajoute notre auteur, vient des cochons domestiques qui se sont échappés des parcs où on les nourrissait. Ils ne diffèrent en rien de ceux de France, d'où leurs ancêtres ont été apportés; et il ne paraît pas que ces deux races se soient mêlées. On les désigne tous indifféremment sous le même nom. »

A l'époque où le P. Dutertre visita les Antilles, les Français y étaient établis depuis trop peu de temps pour que les porcs qu'ils avaient amenés eussent eu le temps de devenir sauvages; mais ceux qui provenaient des Espagnols se trouvaient en grand nombre à Saint-Christophe, à la Martinique, à la Guadeloupe, et ils étaient précisé-

ment comme les décrit le P. Labat. Un passage de Buffon sur le même sujet, quoique n'étant guère que la répétition de ce qu'avaient dit nos deux religieux, a été durement critiqué par d'Azara, dont le travers en cette occasion comme en bien d'autres est de vouloir étendre à toute l'Amérique ce qu'il a observé au Paraguay. Dans ce pays tous les cochons domestiques sont blancs, de même que ceux que l'auteur avait vus, en Europe, dans sa province d'Aragon; il en conclut que si les cochons marrons des Antilles sont noirs, c'est qu'ils ne proviennent point de ceux qu'apportèrent les Espagnols; qu'enfin ce ne sont point des porcs véritables, mais de grands pécaris. S'il avait pu remonter aux sources, il aurait vu que le P. Dutertre n'avait pu commettre pareille erreur; 1° parce que le pécari ne se trouve point aux Antilles; 2° parce que le bon moine connaissait fort bien ces derniers animaux qui, de son temps, étaient quelquefois apportés de la côte de Cumana à Saint-Christophe par les barques venant de l'île de Tabago.

L'établissement du gros bétail en Amérique date, comme celui des porcs, du second voyage de Colomb. A Saint-Domingue les bêtes à corne se multiplièrent rapidement, et cette île put bientôt en fournir aux diverses parties du continent à mesure qu'on en fit la conquête. Malgré ces exportations, vingt-sept ans après la découverte de l'île, les troupeaux de quatre mille têtes, à ce que nous apprend Oviédo, y étaient assez communs et il y en avait même qui allaient jusqu'à huit mille. Vers 1530, le prix de ces animaux était tellement tombé, qu'on en tuait un grand nombre seulement pour en avoir la peau. En 1587, l'exportation des cuirs de cette île seule fut, au rapport de d'Acosta, de trente-cinq mille quatre cent quarante-quatre, et dans la même année, on en exporta soixante-quatre mille trois

La Vache.

cent cinquante des ports de la Nouvelle-Espagne. C'était la 65e année après la prise de Mexico, événement avant lequel les Espagnols qui vinrent en ce pays n'avaient pu s'occuper d'autre chose que de guerre.

Tant que le bétail fut en petit nombre, et groupé autour des habitations, il réussit également bien partout; mais aussitôt qu'il se fut multiplié, on s'aperçut qu'en certains lieux, il ne pouvait se passer du secours de l'homme. On reconnut qu'une certaine quantité de sel dans ses alimens lui était absolument nécessaire, et que s'il ne le trouvait pas dans les plantes, les eaux ou dans certaines terres d'un goût saumâtre communes en plusieurs points de l'Amérique, il fallait le lui fournir directement; faute de quoi il devenait chétif, beaucoup de femelles cessaient d'être fécondes et le troupeau dépérissait rapidement.

Dans les lieux mêmes où le bétail peut exister sans ce secours, on trouve pour les grands troupeaux de l'avantage à en distribuer, à temps fixes, aux animaux; c'est un moyen de les attirer vers le lieu où l'on a coutume de les visiter; leur avidité pour cette substance est telle que lorsqu'on leur en a donné deux ou trois fois dans la même place, on les y voit accourir sitôt qu'ils entendent le cornet que sonnent les pâtres en faisant la battue.

Si l'on néglige de réunir de temps en temps le troupeau, et que le pays d'ailleurs lui fournisse la quantité de sel nécessaire à son existence, il ne lui faut qu'un petit nombre d'années pour devenir entièrement sauvage. Cela est arrivé ainsi, à ma connaissance, en deux endroits; l'un en la province de San Martino, dans une propriété des jésuites, à l'époque de l'expulsion de ces religieux; l'autre dans la province de Mariquita, au *Paramo* de Santa Isabella, lors de l'abandon de certaines mines d'or de lavage. Dans ce dernier lieu, les animaux ne sont pas restés dans les pa-

rages où l'homme les avait placés; ils sont remontés dans la Cordilière jusqu'à la région des graminées, et vivent dans une température presque constante de 9 à 10° centigrades. Les paysans des villages de Mendez, Piedras, etc., situés dans la plaine, vont quelquefois les y chasser. Ils cherchent à s'en emparer en tendant des nœuds coulans et poussant les petits troupeaux vers les lieux où les piéges sont préparés.

Quand ils sont une fois parvenus à se rendre maîtres d'un de ces animaux, il leur est souvent impossible de le faire sortir vivant de la montagne, non à cause de sa résistance qui, après un certain temps, finit par diminuer, mais parce que souvent l'animal, après avoir reconnu l'inutilité de ses efforts, est saisi d'un tremblement général, tombe bientôt sans qu'il soit possible de le faire relever et meurt dans un petit nombre d'heures. Dans ce cas, on ne le laisse guère finir naturellement, on le tue; mais le manque de sel, l'éloignement des lieux habités et l'âpreté des chemins est cause qu'à l'exception de la viande que l'on consomme sur les lieux, on n'en tire presque aucun parti. Ces inconvéniens contribuent à rendre la chasse assez rare; outre que les chasseurs ont toujours la crainte d'être surpris par la neige qui tombe quelquefois en ces lieux, et qui, quand elle dure plusieurs jours, fait périr ces hommes habitués à des climats constamment chauds.

Quand on réussit à tirer un de ces animaux de la montagne, il n'est pas très difficile de l'apprivoiser, en le tenant près de la ferme, lui donnant fréquemment du sel, et l'habituant à voir constamment des hommes. Je n'ai jamais eu l'occasion d'en voir de vivans; j'ai goûté de la chair d'une vache qui avait été tuée la veille de mon arrivée, elle ne me sembla différer en rien de la chair de

vache domestique. La peau était remarquablement épaisse, du reste de grandeur ordinaire; le poil était long, serré et mal couché.

Dans la province de San Martino, j'ai vu les taureaux marrons paître dans les *Llanos*, au milieu du bétail domestique; ces animaux passent la matinée dans les bois qui couvrent le pied de la Cordilière et ne sortent que vers deux heures de l'après-midi pour paître dans la savane. Aussitôt qu'ils aperçoivent un homme, ils s'empressent de regagner la forêt en galopant. En courant, ils portent la tête élevée au lieu de l'enfoncer entre les jambes, comme le font ceux qui vivent dans les parages où les herbes sont moins hautes.

Avant la guerre de la révolution, quand le bétail domestique était plus nombreux, les habitans des *Llanos* ne poursuivaient pas ces individus sauvages qu'on a beaucoup plus de peine à joindre. On ne réussit guère, en effet, à les approcher pour leur jeter le *lazo*, si on ne trouve moyen de les pousser dans quelque cul-de-sac, comme celui que font deux bras de rivière qui se réunissent sous un angle très aigu. Quand on en a pris un, on le tue promptement; car il serait difficile, au milieu de ces immenses plaines, de l'empêcher de retourner à ses habitudes d'indépendance.

La peau du bétail marron des *Llanos* ne m'a paru différer en rien de celle du bétail domestique que l'on trouve dans les mêmes parages. Elle est toujours beaucoup moins pesante que celle du bétail élevé sur le plateau de Bogota, et celui-ci le cède, sous ce rapport, comme sous celui de l'épaisseur du poil, aux individus sauvages du *Paramo* de Santa Isabella.

J'ai vu, dans les parties les plus chaudes de la province de Mariquita et de Neyba, certaines bêtes à cornes dont le

poil est extrêmement rare et fin. On leur donne par antiphrase le nom de *pelones*. Cette variété se reproduit par la génération; mais on ne cherche pas à en favoriser la multiplication, car, comme une partie du bétail qu'on élève en ces lieux, est destinée à la consommation des villes de la Cordilière, et qu'avant de les tuer on les tient quelques mois à engraisser dans des pâturages situés en climat tempéré, ces pelones, trop sensibles au froid, ne sont pas propres à être exportés. Les autres même souffrent à leur arrivée dans ces lieux; et, quoiqu'ils y trouvent une nourriture beaucoup plus riche que celle à laquelle ils étaient accoutumés, ils maigrissent d'abord; ce n'est qu'après avoir éprouvé une abondante salivation qu'ils commencent à profiter. Les pâturages où l'on a mis ces bêtes à *débaver* ne peuvent de plusieurs mois servir à un autre usage; et tous les agriculteurs s'accordent à dire que, si l'on place trop tôt des bœufs nés dans le canton, ils y contractent une maladie de même nature que celle qui accompagne l'acclimatation des autres, mais seulement beaucoup plus grave.

Il naît aussi parfois, dans les régions chaudes, des individus dont la peau est entièrement nue. On les connaît sous le nom de *calongos*, nom qui appartient plus particulièrement à une race de chiens sans poil, originaires de Calongo ou Cacongo, sur la côte de Guinée, et que nous appelons assez mal à propos *chiens turcs*. Ces animaux étant plus faibles, plus délicats, on a coutume de les détruire avant qu'ils soient propres à la reproduction.

Il ne naît jamais de ces *calongos* dans les parties froides.

En Europe, où le lait entre pour beaucoup dans le produit qu'on retire du gros bétail, on trait généralement la vache depuis le moment où elle devient féconde jusqu'à celui où elle cesse de l'être. Cette pratique, constamment

répétée sur tous les individus pendant une longue série de générations, a fini par produire dans l'espèce des altérations durables. Les mamelles ont acquis une ampleur plus qu'ordinaire, et le lait continue d'y affluer, alors même que le nourrisson est enlevé. En Colombie, un nouveau système rural, l'abondance du bétail par rapport au nombre des habitans, sa dispersion dans des pâturages d'une trop vaste étendue, et une foule de circonstances, enfin, qu'il n'est pas de mon sujet de rapporter, ont interrompu de semblables habitudes. Eh bien, il n'a fallu qu'un petit nombre de générations pour que l'organisation, libre de contraintes, remontât vers son type normal. Aujourd'hui donc, si l'on destine une vache à donner du lait, le premier soin est de lui conserver son veau. Il faut que tout le jour son nourrisson soit avec elle et puisse la téter; on les sépare seulement le soir, pour profiter du lait qui s'amasse dans la nuit. Le veau vient-il à mourir, le lait tarit tout aussitôt.

L'Ane. L'âne, dans les provinces où j'ai eu occasion de l'observer, paraît n'avoir subi presque aucune altération dans sa forme, ni dans ses habitudes. Il est commun à Bogota, où on l'emploie au transport des matériaux à bâtir. On l'y soigne mal, on le laisse exposé aux intempéries de l'air, sans lui donner une nourriture suffisante; aussi est-il petit et chétif, couvert d'un poil très long et mal peigné. Les difformités sont fréquentes, non-seulement chez les adultes, qu'on commence à charger de trop bonne heure, mais même chez les jeunes, au moment de la naissance; dans ce cas elles proviennent sans doute des mauvais traitemens qu'essuient les mères pendant le temps de la gestation.

Dans les parties basses et chaudes, où l'on a besoin d'ânes étalons pour obtenir des mulets, on les traite un

peu moins mal, et même il est rare qu'on les fasse travailler. Une nourriture plus abondante, un climat plus favorable concourent encore à prévenir la dégradation de l'espèce; aussi l'âne dans ces lieux est-il en général plus grand, plus fort et d'un plus beau poil que dans les régions froides.

Quand un âne étalon et un cheval entier se trouvent avec quelques jumens dans un pâturage d'une étendue bornée, c'est entre eux une guerre perpétuelle. Malgré l'infériorité de forces, c'est l'âne qui revient le plus souvent à la charge. Il ne cherche guère à se défendre contre les morsures du cheval, autrement qu'en écartant la tête et le cou, où celui-ci s'attaque d'ordinaire; il ne répond point à ses ruades par d'autres ruades; il ne s'applique qu'à une chose, c'est à le saisir aux parties de la génération, et assez souvent, après plusieurs jours de persévérance, il réussit à le prendre au dépourvu et le châtre d'un seul coup de dent. Voilà, du moins, ce que m'ont assuré plusieurs habitans de la campagne, dont quelques-uns disaient avoir été témoins du fait.

Dans aucune des provinces que j'ai visitées, l'âne n'était revenu à l'état sauvage.

Le Cheval.

Il n'en est pas de même du cheval; il en existe de marrons dans plusieurs parties de la Colombie, et j'en ai vu de petits troupeaux dans les plaines de San Martino, entre les sources du Méta, le Rio-Negro et l'Umadea. Leur nombre étant peu considérable et l'espace dans lequel ils sont confinés étant beaucoup plus resserré et plus fréquenté par les hommes, que les plaines du Paraguay, ils n'ont pas pris toutes les habitudes qui ont été si bien décrites par M. d'Azara. Ainsi, je ne les ai pas vus en grandes troupes formées de petits pelotons. J'ai vu seulement des pelotons isolés qui se composaient d'un vieux mâle, de cinq à six ju-

mens et de quelques petits poulains. Loin de s'approcher des caravanes pour débaucher les chevaux domestiques, ils fuient aussitôt qu'ils aperçoivent un homme et ne s'arrêtent point tant qu'ils sont en vue. Les mouvemens de ces animaux sont beaux, surtout ceux du chef de la troupe; mais leurs formes, sans être pesantes, manquent généralement d'élégance.

Dans les *Hatos* des *Llanos*, les chevaux sont presque entièrement abandonnés à eux-mêmes; on les rassemble seulement de temps en temps pour les empêcher de devenir tout-à-fait sauvages, leur ôter les larves d'œstres et marquer les poulains avec un fer chaud. Par suite de cette vie indépendante, un caractère appartenant à l'espèce non réduite, la constance de couleur commence à se remontrer: le bai-châtain est non-seulement la couleur dominante, mais presque l'unique couleur. Au reste, je soupçonne que quelque chose de semblable pourrait bien être arrivé en Espagne, pour ceux de ces animaux qu'on laisse errer dans les montagnes (*cavallos cerreros*); car, dans les proverbes, le cheval est souvent désigné sous le nom du *bai* (*el bayo*), comme l'âne est appelé *grison* (*rucio*)

Dans les petits *Hatos* qu'on trouve sur les plateaux de la Cordilière, les effets de la domesticité se font davantage sentir. Les couleurs des chevaux y sont plus variées, il y a plus de différence dans leur taille, c'est-à-dire, qu'on en trouve beaucoup de plus petits et quelques-uns un peu plus grands; du reste, on n'en voit guère qui dépassent la taille moyenne. Leur poil, tant qu'ils vivent constamment dans les champs, est assez touffu et assez long; mais il leur suffit de quelques mois d'écurie pour reprendre un poil brillant et court. Au reste, la race de ces chevaux est successivement renouvelée par des étalons que l'on tire des climats chauds, surtout de la vallée du

Cauca. Il m'a semblé que dans certaines possessions où l'on avait négligé ce soin, les chevaux étaient devenus sensiblement plus petits, quoique d'ailleurs les pâturages fussent renommés pour leur bonté; le poil de ces animaux s'était accru au point de les rendre difformes; mais sous le rapport des qualités utiles ils avaient peu perdu, ceux mêmes d'un certain canton étaient cités pour leur vitesse.

Quand on amène un cheval des *Llanos* de San Martino, ou de Casanare, sur le plateau de Bogota, on est obligé de le tenir à l'écurie jusqu'à ce qu'il soit acclimaté. Si on le lâche d'abord dans les champs, il maigrit, se couvre de gale et souvent meurt en peu de mois.

Le pas que l'on préfère dans les chevaux de selle est l'amble et le pas relevé. On les y dresse de bonne heure, et tant qu'on les monte on a le plus grand soin de ne jamais leur permettre de prendre un autre pas. Il arrive fréquemment qu'après un certain temps les jambes de ces chevaux s'engorgent, surtout quand l'écurie où on les tient est pavée; alors, s'ils sont d'ailleurs d'une belle forme, on les lâche dans les *Hatos* comme étalons. Il résulte de là une race chez laquelle l'amble est pour les adultes l'allure naturelle. On donne à ces chevaux le nom d'*aguilillas*.

On voit souvent, dans la Nouvelle-Grenade, un cheval hongre servant de chef de file à un troupeau de mules; c'est un moyen qu'emploient les conducteurs pour empêcher leurs bêtes de se disperser, car toutes prennent bientôt pour ce cheval un tel attachement, qu'elles ne peuvent souffrir d'en être long-temps séparées. Si on les oblige à rester en arrière, elles témoignent la plus vive impatience, et du moment qu'elles sont libres, elles hâtent le pas, quelque fatiguées qu'elles puissent être. Dès qu'elles ont rejoint la troupe, elles courent au *madrino* (c'est le nom par lequel

on désigne ce cheval), le flairent aux parties génitales, et témoignent de mille manières la joie qu'elles éprouvent d'être réunies à lui. Le madrino ne montre pas pour elles le même attachement.

J'ai fait, à l'occasion des mulets américains, une remarque qui me semble s'appliquer également à ceux de notre pays; c'est qu'un caractère qui appartient à plus de la moitié des genres dont se compose cette famille, est chez ces métis plus marqué que dans les deux espèces du croisement desquelles ils proviennent; les rayures sont chez eux beaucoup plus apparentes et plus nombreuses que chez l'âne, surtout aux jarrets de derrière. Cela indiquerait-il que cette livrée aurait été autrefois plus prononcée dans l'une et l'autre espèce, et qu'elle se serait en partie effacée sous l'influence de la domesticité? C'est ce que je ne répugnerais pas à croire, sans avoir d'ailleurs aucune preuve à donner à l'appui.

Le Chien. Le chien, comme on le sait, a été pour les Espagnols, dans leurs expéditions militaires au Nouveau-Monde, un vaillant auxiliaire, et cela depuis le commencement; car c'est Colomb lui-même qui a donné l'exemple de s'en servir. A sa première affaire avec les Indiens, sa troupe se composait, comme nous l'apprennent ses propres Mémoires, de 200 fantassins, 20 cavaliers et 20 limiers. Les chiens furent ensuite employés dans la conquête des différentes parties de la terre-ferme, surtout au Mexique, dans la Nouvelle-Grenade, et dans quelques autres points où la résistance des Indiens fut prolongée. Leur race s'est conservée sans altération apparente sur le plateau de Santa-Fé, où l'on s'en sert pour la chasse du cerf. Ils y déploient une ardeur extrême et y usent encore du même mode d'attaque qui les rendait jadis si redoutables aux indigènes. Ce mode consiste à saisir l'animal au bas-ventre

et à le renverser par une brusque secousse, en profitant du moment où son corps porte seulement sur les jambes de devant; le poids de l'animal renversé est souvent sextuple de celui du chien.

Sans avoir reçu aucune éducation, le chien de race pure apporte à cette chasse des dispositions qui le font préférer au meilleur chien courant amené d'Europe; ainsi il n'attaque jamais de front un cerf au milieu de sa course, et même quand celui-ci, ne l'apercevant pas, vient à lui directement, il se met à l'écart pour l'assaillir en flanc. Un autre chien n'use point de semblables précautions et souvent est renversé mort sur la place, les vertèbres du cou étant luxées par la violence du choc.

Chez les pauvres habitans des bords de la Magdeleine, ce chien s'est abâtardi, en partie par le mélange, en partie par le défaut d'une nourriture suffisante; toutefois, chez cette race dégénérée, un nouvel instinct s'est développé, et semble être devenu héréditaire. La chasse à laquelle on l'applique depuis long-temps presque exclusivement est celle du pécari à mâchoire blanche; l'adresse du chien consiste à modérer son ardeur, à ne s'attacher à aucun animal en particulier, mais à tenir toute la troupe en échec. Or, parmi ces chiens, on en voit maintenant qui la première fois qu'on les mène au bois savent déjà comment attaquer: un chien d'une autre espèce se lance tout d'abord, est environné, et, quelle que soit sa force, il est dévoré dans un instant.

Il ne faut pas croire, au reste, que tous les chiens de terre chaude soient également bons pour la chasse; la plupart même ne sont propres à rien du tout, et cependant il n'y a pas de cabane isolée où l'on n'en trouve des demi-douzaines. Comme on les nourrit mal, ils sont maigres et paraissent toujours affamés; aussi volent-ils tout ce qu'ils

trouvent. On ne peut laisser à leur portée aucune chair, aucun cuir, pas même la courroie du fouet dont on se sert pour les corriger. A défaut de substances animales, ils dérobent des fruits; ainsi les bananes et les poires d'avocat, que l'on met quelquefois à mûrir dans l'intérieur des maisons, doivent être placées assez haut pour qu'ils ne puissent y atteindre en sautant. Il faut user de semblables précautions pour les patates douces et pour le maïs tendre, surtout si l'épi a été dépouillé de ses enveloppes. On prétend même que quelques chiens mangent le grain lorsqu'il est encore sur pied; mais les dégâts dont on les accuse pourraient bien être causés par les chacals qui ont indubitablement cette habitude, comme j'ai pu moi-même le reconnaître.

La taille de ces chiens est d'un tiers environ moindre que celle de nos chiens de bergers, auxquels ils ressemblent d'ailleurs par les formes générales du corps; ils ont cependant la tête moins effilée. Quelques-uns ont les oreilles droites, mais la plupart les ont à demi tombantes. Leur couleur ordinaire est à peu près celle des doguins, mais sans noir au museau. Ces chiens sont tous très hargneux, ce qui n'empêche pas qu'ils soient généralement assez poltrons.

Quoique forcés de pourvoir eux-mêmes en grande partie à leur nourriture, ces animaux ne deviennent guère sauvages; je ne crois pas même qu'il s'en trouve à cet état dans la Nouvelle-Grenade. J'ai vu cependant, en certains lieux où les jaguars n'étaient pas trop incommodes, des chiennes disparaître lorsqu'elles étaient sur le point de mettre bas, et se faire dans quelque buisson un peu écarté un gîte où elles nourrissaient leurs petits; mais elles les ramenaient plus tard au logis, après y avoir fait elles-mêmes dans l'intervalle quelques courtes visites.

On a dit des chiens ce qu'Oviédo disait des cochons : que quoiqu'on en eût abandonné sur le continent, aussi bien que dans les îles de l'Amérique, ils ne s'étaient propagés à l'état sauvage que dans ces dernières, où il n'y a point d'animaux féroces d'une taille supérieure à la leur. La remarque n'est pas plus juste pour cette espèce que pour l'autre, car il existe dans certaines parties de l'Amérique méridionale, notamment dans les plaines ou *pampas* de Buénos-Ayres, des troupes nombreuses de chiens à l'état sauvage.

Il y a cependant entre ces chiens marrons du continent et ceux des îles une différence remarquable; c'est que les derniers ont perdu la voix, tandis que les autres n'ont pas cessé d'aboyer, comme je l'ai appris de plusieurs personnes qui ont eu occasion de les observer souvent. Cette différence se conçoit aisément quand on songe que les chiens sauvages de Buénos-Ayres reçoivent journellement dans leurs troupes des individus élevés dans les fermes ou abandonnés par les voyageurs; tandis que ceux des îles, complètement isolés, oublient bientôt un langage que leur espèce a acquis dans la société de l'homme et pour servir à nos besoins.

On a trouvé dans plusieurs des îles de l'Amérique, aux grandes Antilles et dans les îles voisines du Chili, de ces chiens originaires d'Europe, qui en recouvrant l'indépendance avaient perdu la voix. Suivant quelques auteurs, ce changement se serait opéré si rapidement, que Colomb à son second voyage à Saint-Domingue l'aurait déjà observé chez les chiens qu'il y avait laissés l'année précédente.

Il y a ici une erreur manifeste, et qui tient sans doute à ce qu'on aura appliqué aux chiens amenés d'Europe quelques passages relatifs aux chiens ou plutôt *chacals* américains, qui, à l'époque de l'arrivée des Espagnols, se

trouvaient dans plusieurs des Antilles, mais seulement à l'état domestique.

Il me semble très difficile de déterminer l'époque à laquelle le mutisme est devenu général parmi les chiens marrons de Saint-Domingue, et les premiers historiens ne m'ont fourni sur ce sujet aucun renseignement. Ainsi Oviédo en 1526 et 1535, Gomara en 1543, et d'Acosta en 1590 parlent, en plusieurs passages, de ces animaux qui s'étaient multipliés rapidement et causaient parmi les troupeaux de tels ravages, qu'il avait fallu mettre leur tête à prix; mais rien de ce qu'ils en disent ne porte à croire que ces chiens eussent alors perdu la faculté d'aboyer: or, comme ils avaient eu soin de signaler des changemens analogues survenus chez d'autres animaux domestiques, notamment chez le chat et le coq, ainsi que nous le verrons plus tard, leur silence dans ce cas prouve ou que le changement n'avait pas eu lieu, ou qu'il n'était pas encore connu. Le même raisonnement semblerait applicable aux historiens américains du dix-septième siècle, tels que Herrera, Laet, etc., si l'on ne savait que ces écrivains, pour tout ce qui touche à l'histoire naturelle, n'ont fait que répéter ce qui avait été dit avant eux. D'autres raisons, d'ailleurs, portent à croire qu'à l'époque où le dernier publia son *Novus orbis*, en 1633, les chiens marrons étaient déjà privés de voix. A la vérité, le P. Dutertre, qui visita l'Amérique vers 1640, parle de manière à faire croire que parmi ces marrons quelques-uns au moins *jappaient* encore. Mais il faut remarquer que rien ne prouve qu'il ait entendu parler d'un aboiement bien caractérisé, qu'il paraît d'ailleurs faire allusion à la Guadeloupe plutôt qu'à Saint-Domingue, et que, dans ce cas, ces chiens auraient pu être amenés non par les Espagnols, mais par les chasseurs français, c'est-à-dire, depuis

trop peu de temps pour que les habitudes de ces animaux fussent déjà puissamment modifiées par l'état sauvage.

Il faut remarquer, toutefois, que deux voyageurs qui ont été à Saint-Domingue postérieurement au P. Dutertre, Oexmelin en 1666, et Labat en 1701, ne disent rien du mutisme des chiens de cette île, quoiqu'ils entrent dans d'assez grands détails sur leurs formes et leurs habitudes; mais le dernier, dont le témoignage a une grande valeur toutes les fois qu'il parle d'après ses propres observations, n'avait pas vu les chiens des bois, et se contente de rappeler ce qu'on lui en a dit; tandis que l'autre, qui prétend les avoir vus chasser, mêle à son récit des circonstances tellement improbables, qu'il y a peu de fond à faire sur sa parole.

Nous avons des données moins incertaines sur les chiens marrons des îles du Chili, et nous pouvons du moins comprendre entre des limites assez resserrées le temps qu'il leur a fallu pour perdre la voix. Lorsque les flibustiers, dans la seconde moitié du dix-septième siècle, commencèrent à visiter la mer du Sud, ils vinrent souvent se ravitailler à l'île de Juan-Fernandez, où ils trouvaient abondance de chèvres sauvages provenant de celles qui y avaient été apportées par les Espagnols vers 1760. Deux hommes, qu'ils abandonnèrent successivement dans cette île déserte, y trouvèrent à vivre aisément du produit de leur chasse; l'un était un Indien mosquito, laissé par Sharp en 1681, et repris par Dampier en 1684; l'autre un Anglais, A. Selkirk, abandonné en 1704, et retrouvé en 1709 par Wood Rogers. Ce dernier, dans l'espace de quatre ans et quatre mois, avait tué plus de cinq cents chèvres. Il avait aussi trouvé des chats de race européenne et en avait apprivoisé quelques-uns; mais, pour des chiens, il n'en vit jamais un seul dans toute l'île. Ce furent les Espagnols qui in-

troduisirent peu de temps après ces animaux, dans le but de détruire les chèvres, et d'enlever ainsi une ressource aux corsaires qui désolaient leurs côtes. C'était dans la même idée que quelques années auparavant ils avaient détruit le bétail marron dans le nord-ouest de l'île Saint-Domingue; idée malheureuse, puisqu'elle fut cause qu'ils perdirent cette partie de l'île, où les boucaniers, qui ne trouvaient plus à vivre de la chasse, se firent planteurs et formèrent des établissemens durables. A Juan-Fernandez le but fut un peu mieux rempli, et les pirates ne trouvèrent plus à s'y approvisionner aussi aisément. Les chèvres, à la vérité, ne furent pas entièrement détruites, mais elles devinrent beaucoup moins nombreuses, et surtout moins faciles à atteindre. En 1741, lorsque l'amiral Anson aborda à cette île, il n'en trouva pas plus de deux cents qui vivaient réfugiées au milieu de rochers presque inaccessibles, formant des troupeaux isolés de trente à quarante individus chacun. Les chiens, au contraire, s'étaient déjà prodigieusement multipliés; car, lorsque les chèvres eurent commencé à leur manquer, ils avaient trouvé dans les veaux marins une proie facile et presque inépuisable. Ces chiens appartenaient à différentes espèces; ce qui seul eût suffi pour indiquer que leur introduction n'était pas d'ancienne date. « Ils venaient quelquefois, dit Walter, le chapelain de lord Anson, nous rendre visite pendant la nuit et dérober nos provisions; et il arriva même une ou deux fois que, trouvant un des nôtres à l'écart, ils l'attaquèrent; mais, comme il vint du secours à temps, on les mit en fuite avant qu'ils eussent eu le temps de faire aucun mal. » On les vit une fois donner la chasse à un troupeau de chèvres sauvages; et il est assez singulier que dans cette circonstance on n'ait pas remarqué qu'ils n'aboyaient point, comme le constata

deux ans plus tard un officier de la marine espagnole, don Antonio Ulloa.

Ulloa, qui avait été envoyé par le roi d'Espagne au Pérou pour concourir avec les académiciens français à la mesure d'un degré du méridien, aborda, vers le commencement de 1743 à l'île de Juan-Fernandez et eut l'occasion de bien observer ces chiens. Ce qu'il en dit s'accorde en somme avec ce que rapporte Walter; mais il nous apprend, de plus, comment ils se comportaient à l'égard des veaux marins. « Leur premier soin, dit-il, est de saisir l'animal à la gorge et de l'étrangler, ce qui est l'affaire d'un instant; puis, après lui avoir coupé avec les dents la peau tout à l'entour du cou, ils le dépouillent jusqu'à la queue, en introduisant leurs pattes entre cuir et chair comme le ferait un écorcheur. Ce n'est qu'après avoir terminé cette opération qu'ils commencent à manger. Nous remarquâmes, ajoute-t-il un peu plus loin, dans les chiens de cette île une particularité bien étrange, c'est qu'on ne les entendit jamais aboyer; et quoiqu'on en prît quelques-uns qui furent conduits à bord, ils n'aboyèrent pas davantage, jusqu'à ce qu'étant réunis à des chiens domestiques, ils commencèrent à le faire à l'imitation de ceux-ci; mais ils s'y prenaient maladroitement (*por un termino impropio*), et comme s'ils apprenaient, pour se conformer à l'usage, une chose à laquelle ils étaient restés jusque-là tout-à-fait étrangers. »

Ces chiens, dont les pères avaient su aboyer, apprirent donc à le faire quand ils se trouvèrent en compagnie de chiens domestiques. L'éducation eût été plus difficile et plus longue pour des animaux appartenant à une race habituellement muette; ainsi deux chiens de la rivière de Mackensie, amenés en Angleterre, n'eurent jamais que

leur hurlement ordinaire, mais un petit qui leur naquit en Europe apprit à aboyer.

Le Chat. Le chat paraît n'avoir éprouvé aucune difficulté à se naturaliser en Amérique, et il y est aujourd'hui aussi répandu que dans nos pays. J'en ai trouvé beaucoup parmi les Indiens de l'Orénoque qui paraissent en faire grand cas et ne manquent jamais de les emporter avec eux dans leurs migrations annuelles. Dans les provinces que j'ai parcourues, ils ne s'étaient jamais propagés à l'état sauvage. Selkirk cependant, comme il a été dit plus haut, prétend en avoir vu de tels à l'île de Juan-Fernandez, et les Français, dit-on, en trouvèrent aussi à Saint-Christophe lorsqu'ils vinrent s'y établir. Ces derniers étaient, suivant le P. Dutertre, tachetés de blanc, de noir et de roux. Je ne sais s'il donne ces détails d'après sa propre observation, ou si c'est une simple supposition fondée sur ce que les chats de cette couleur portent chez nous le nom de *chats d'Espagne*, et que ceux de Saint-Christophe avaient été apportés par les Espagnols. Tout ce que je puis dire, c'est que dans la Nouvelle-Grenade cette variété n'est pas plus commune qu'en France.

Le chat n'a subi en Amérique aucun changement appréciable, sauf celui de n'avoir dans l'année aucun temps plus particulièrement marqué pour la reproduction, et de ne pas faire entendre, lorsqu'il est en amour, ces miaulemens incommodes par lequel, dans nos pays, il annonce ses désirs ou sa jalousie. Ces modifications s'étaient opérées très rapidement, puisqu'on les trouve déjà indiquées dans l'ouvrage de Gomara, publié en 1554. La première paraît dépendre de la constance du climat et s'observe également chez les animaux dont j'ai déjà parlé. Il faut remarquer cependant qu'il y a exception pour d'autres espèces comme pour la chèvre et la brebis: ainsi, bien

qu'il naisse toute l'année des chevreaux et des agneaux, il y a deux époques où le nombre des naissances augmente considérablement, c'est vers Noël et la Pentecôte.

Le mouton, qui a été amené d'Espagne, n'est point de l'espèce *Merinos*, mais de celle qu'on dit *de lana burda y basta*. Il est très commun sur la Cordilière, depuis 1000 jusqu'à 2500^{m} de hauteur. Nulle part il ne semble chercher à échapper à la protection de l'homme; aussi n'observe-t-on aucun changement dans ses mœurs ni dans ses formes. Il y a cependant quelque diminution dans sa taille. Le Mouton.

Entre les limites que j'ai indiquées, le mouton se propage facilement et sans presque exiger aucun soin, mais il n'en est pas de même dans les pays chauds. Il paraît que dans les plaines du Meta il est très difficile d'en élever, puisque, bien que leur peau y soit très recherchée pour faire une sorte de chabraque, et qu'on en donne au moins le même prix que d'une peau de bœuf, on ne voit aucune brebis depuis le fleuve jusqu'au pied de la Cordilière: dans la vallée qui sépare la chaîne orientale de la moyenne, on en voit, il est vrai, en quelques lieux, mais ils sont toujours en petit nombre, les femelles y sont peu fécondes et les agneaux difficiles à élever.

Au reste, leur existence en ces lieux est digne de fixer l'attention, en ce qu'elle donne lieu à un phénomène extrêmement curieux.

La laine chez les agneaux croît à peu près de la même manière que chez ceux des climats tempérés; lorsqu'elle a atteint une certaine épaisseur, si on la coupe elle repousse telle qu'elle était d'abord, et tout se succède dans l'ordre accoutumé. Mais si on laisse dépasser le temps favorable pour dépouiller l'animal de sa toison, sa laine s'épaissit et se feutre, elle finit par se détacher par plaques qui laissent

au-dessous d'elles, non une laine naissante, non une peau nue et dans un état maladif, mais un poil court, brillant et bien couché, très semblable à celui qu'a la chèvre dans les mêmes climats.

Dans les places où ce poil a paru il ne renaît jamais de laine.

La Chèvre. La chèvre, quoique sa figure soit tout-à-fait celle d'un animal de montagne, s'accommode beaucoup mieux des vallées basses et brûlantes que des parties élevées de la Cordilière.

Dans les climats qui lui conviennent elle multiplie beaucoup, chaque portée étant habituellement de 2 petits, souvent de 3, mais jamais de 6 comme on s'est plu à le répéter. Sa taille est petite, mais sa forme sous tous les autres rapports a beaucoup gagné; son corps est plus svelte, sa tête est plus élégante, mieux placée et ordinairement moins chargée de cornes. L'agilité de cet animal et son goût pour grimper et sauter sont aussi singulièrement augmentés. Je me suis souvent diverti à voir sur la place publique d'un village des chèvres sauter à plus de 4 pieds de hauteur, sur la cimaise des pilastres de l'église. La saillie au point où posaient leurs pieds n'était pas de 3 pouces; cependant, dans cette position difficile à conserver, elles restaient des heures entières, sans autre but apparent que celui de se chauffer au soleil qui éclairait pourtant le bas du mur aussi bien que le haut.

Ces chèvres ont un poil court, bien couché et brillant, et quoiqu'on en voie de toutes les nuances, cependant la couleur la plus commune est le fauve avec une raie brune sur le dos et des marques noires symétriques sur le masque.

Le signe le plus évident de domesticité dans notre chèvre d'Europe, l'ampleur des mamelles a presque complètement disparu dans la chèvre américaine.

Je n'ai point compté entre les quadrupèdes apportés du Nouveau-Monde le chameau, parce que l'espèce ne s'y est point conservée: on en a pourtant amené à différentes reprises des Canaries, mais toujours à l'époque de grands troubles politiques; peut-être dans des temps plus tranquilles aurait-on obtenu de les faire s'y propager. On y est parvenu pour d'autres animaux qui pendant long-temps refusèrent de se reproduire en certains lieux, et aujourd'hui y sont aussi féconds que partout ailleurs : c'est ce que je vais faire voir en parlant des oiseaux domestiques.

Ceux qui ont été apportés aux Indes Occidentales sont la poule, l'oie, le canard, le paon, le pigeon et la pintade.

Le Pigeon. Chez ces deux dernières espèces je n'ai pu constater aucun changement; les pigeons présentent toutes les variétés qu'on remarque en Europe dans les pigeons de colombier; ceux de volière ne paraissent pas y avoir été apportés. La Pintade. Quant aux pintades, elles m'ont paru sujettes à présenter dans la couleur de leur robe plus de différences que celles que j'ai vues en France; d'ailleurs elles sont au moins aussi criardes, et tellement incommodes à cause de cela, que, malgré la délicatesse de leur chair, beaucoup de gens ne veulent point en élever.

Le Paon. Le paon est aussi absolument le même qu'en France. Il est assez rare en Colombie, mais cela vient de ce qu'on attache peu d'importance à le propager, car la femelle pond à peu près le même nombre d'œufs que chez nous, et les petits s'élèvent sans beaucoup de peine. Il n'en était pas ainsi dans les premiers temps, et Gomara nous apprend qu'alors avec beaucoup plus de soin on obtenait moins de succès.

L'Oie. L'oie, qui a été introduite depuis une vingtaine d'années sur le plateau de Bogota, a présenté les mêmes diffi-

cultés. Les pontes d'abord étaient rares, composées d'un petit nombre d'œufs, dont un quart à peine venait à éclore, et plus de la moitié des jeunes oisons mourait dans le premier mois; ceux qui échappèrent formèrent une seconde génération plus acclimatée déjà que la première; et aujourd'hui, l'espèce, sans être encore aussi féconde qu'elle l'est en Europe, tend évidemment à arriver au même point.

La Poule. Pour les poules, la même chose, au rapport de Garcilasso, arriva à Cusco et dans toute sa vallée, et l'on fut plus de trente ans sans y pouvoir obtenir de poulets, quoique à Yucay et Muyna, à quatre lieues seulement de la ville, on en eût en abondance.

Aujourd'hui la race primitivement introduite est partout féconde; mais la race anglaise, qu'on a amenée depuis un petit nombre d'années, pour obtenir des coqs de combat, n'est pas encore arrivée à ce point de fécondité, et dans les premières années même on s'estimait heureux d'avoir deux ou trois poulets pour toute une couvée.

Quand on observe dans les climats chauds des poulets de l'une et de l'autre race, on remarque entre eux des différences curieuses. Le poulet créole, dont les pères ont vécu pendant des siècles dans une température qui ne descend guère au-dessous de 20° centigrades, naît avec un peu de duvet qu'il perd même bientôt, et reste complètement nu, à l'exception des plumes de l'aile qui croissent comme à l'ordinaire. Le poulet de race anglaise, au contraire, naît couvert d'un duvet bien serré, duvet qui ne disparaît qu'à mesure qu'il est remplacé par les plumes; le petit animal est encore vêtu comme pour vivre dans le pays d'où ses pères ont été apportés depuis peu d'années.

Gomara prétend que les coqs transportés à l'île de Saint-Domingue, perdaient l'habitude de chanter au milieu de

la nuit. Dans la Nouvelle-Grenade j'en ai entendu souvent chanter à cette heure ; ainsi le changement n'est pas général : je n'en connais même, à vrai dire, aucun qui soit commun à toute la race transplantée, puisque la nudité des jeunes poulets créoles se remarque seulement dans les climats très chauds. Deux variétés assez répandues et qui se propagent par voie de génération, sont celles des poules à pieds jaunes et des poules nègres. Les premières sont considérées en plusieurs endroits comme provenant d'une espèce indigène ; mais c'est une opinion que toutes mes recherches me portent à regarder comme dénuée de fondement.

Quant aux poules nègres, qu'on appelle, à Bogota, poules de Nicaragua, leur mélanisme se montre moins dans la couleur de la peau que dans celle de la crête, du périoste, des membranes séreuses et de la couche cellulaire qui entoure les muscles. Comme cette couleur les rend moins propres à être présentées sur la table, on ne s'attache probablement pas à les propager, et cependant elles sont assez communes. Cela me porterait à croire qu'outre les individus qui héritent de leurs parens cette couleur noire, il en naît constamment d'autres qui présentent la même difformité, quoique provenant de père et de mère à l'état normal. Au reste, il est à remarquer que dans toute l'Amérique tropicale, le mélanisme et l'albinisme à différens degrés se montrent fréquemment chez les animaux à sang chaud, et que ces deux espèces de monstruosité sont au nombre de celles qui se transmettent le mieux par voie de génération. Peut-être la même remarque serait-elle applicable dans toute sa généralité à un pays situé aux antipodes de celui dont je m'occupe. Elle est au moins exacte pour les poules, et Marsden nous apprend qu'à Java on en trouve beaucoup affectées

de mélanisme. Quant à l'albinisme, beaucoup de voyageurs nous apprennent que dans les îles de la Sonde il s'observe assez fréquemment dans l'espèce humaine.

Conclusions. Les faits exposés dans ce Mémoire ont été recueillis sans que j'eusse d'avance l'idée de les rattacher à aucun système; mais, en les envisageant ensuite dans leur ensemble, je me suis cru fondé à en déduire les conséquences suivantes :

1° Lorsqu'on transporte dans un climat nouveau certains animaux, ce ne sont pas les individus seulement, ce sont les races qui ont besoin de s'acclimater;

2° Lorsque cette acclimatation a lieu, il s'opère communément dans ces races certains changemens durables qui mettent leur organisation en harmonie avec les climats où ils sont destinés à vivre;

3° Les habitudes d'indépendance amènent aussi leurs changemens qui, en général, paraissent tendre à faire remonter les espèces domestiques vers les espèces sauvages qui en sont la souche.

MÉMOIRE

SUR

L'ASPARAMIDE

(*ASPARAGINE DE M. ROBIQUET*)

ET SUR

L'ACIDE ASPARAMIQUE,

PAR MM. BOUTRON-CHARLARD ET PELOUZE.

LU A L'ACADÉMIE DES SCIENCES, LE 11 MARS 1833.

L'*Asparagine*, principe immédiat neutre, découverte en 1805, par M. Robiquet, dans les jeunes pousses d'asperge, rencontrée depuis dans toutes les variétés de pommes de terre, dans les racines de réglisse, de grande consoude et de guimauve, mériterait par sa seule présence dans ces végétaux toute l'attention des chimistes, quand sa composition particulière, dans laquelle il entre une grande quantité d'azote, la beauté et la netteté de ses formes, sa transformation en un corps nouveau sous l'influence des bases et des acides, ne viendraient pas encore accroître l'intérêt qui se rattache à son étude.

Depuis l'analyse des asperges par M. Robiquet, et les mémoires qu'il a publiés à cette occasion, l'Asparagine n'était devenue l'objet d'aucune recherche, quand M. Bacon,

pharmacien à Caen, crut avoir trouvé dans la racine de guimauve en 1827, une nouvelle base organique combinée à l'acide malique, et à laquelle, en raison des propriétés nouvelles dont il la croyait pourvue, il proposa de donner le nom d'*althéine*. Le travail de M. Bacon fut repris peu après par MM. Plisson et Henry fils, qui ne tardèrent pas à faire voir que l'althéine, l'Asparagine et l'Agédoïte étaient trois matières parfaitement identiques; et, profitant de cette circonstance, ils publièrent sur l'Asparagine une monographie fort étendue, dans laquelle ils passèrent en revue ses principales propriétés et les réactions que lui faisaient subir un grand nombre d'agens chimiques. Les choses en étaient là, lorsque parut le sixième volume du *Traité de Chimie* de Berzélius, qui, en rappelant tout ce qui avait été fait sur cette matière, faisait connaître les nouveaux résultats obtenus par Wittstock, résultats qui se trouvaient opposés sur certains points à ceux des chimistes français.

Curieux de pénétrer les causes qui pouvaient amener de semblables divergences, nous résolûmes de répéter la plupart des expériences, et d'ajouter, s'il était possible, quelques faits nouveaux à ceux déjà connus. Notre premier soin fut donc de chercher à nous procurer de l'Asparagine très pure, et en assez grande quantité pour pouvoir multiplier nos essais; et comme la racine de guimauve est de toutes les substances végétales qui renferment cette matière, celle qui paraît en contenir le plus, c'est de cette racine que nous avons retiré l'Asparagine qui a servi à nos expériences.

Afin d'éloigner toute idée que l'Asparagine ait pu subir la moindre altération, nous avons cherché à l'obtenir par un procédé simple, facile, et en quelque sorte naturel. Celui de MM. Plisson et Henry fils nous ayant paru pré-

férable à celui de Wittstock, nous avons cru devoir l'adopter, en substituant toutefois l'eau froide à l'eau tiède prescrite par ces chimistes. La pureté du produit que nous avons obtenu a pleinement justifié la préférence que nous lui avons accordée. Nous décrirons succinctement le procédé que nous avons suivi. Nous avons pris 5 kil. de racine de guimauve blanche dite albâtre; après l'avoir coupée en petits morceaux d'environ deux centimètres de longueur, nous l'avons contusée de manière à rompre les fibres, et nous avons versé dessus 20 kil. d'eau à la température de 6 à 7° + 0°. Après 48 heures de macération, on a jeté sur un canevas, et l'on a remis la guimauve à macérer dans une nouvelle quantité d'eau. Les deux colatures réunies ont été évaporées à environ moitié de leur volume et passées à plusieurs reprises au travers d'un drap de laine afin de les obtenir claires, puis évaporées de nouveau au bain-marie jusqu'en consistance de sirop très peu cuit. Cet extrait liquide, versé dans une capsule de porcelaine, et abandonné pendant quatre ou cinq jours à la température atmosphérique, laisse déposer des cristaux grenus d'un assez gros volume. Séparés des liqueurs surnageantes par décantation et lavés à l'eau froide, ces cristaux sont à peine colorés en jaune. Purifiés par une nouvelle cristallisation, ils deviennent alors d'une blancheur parfaite.

Ce procédé par l'eau froide, qui, comme on voit, est fort simple, est celui qui nous a le mieux réussi. Si, au contraire, on fait bouillir la racine, on dissout une grande quantité de mucilage qui, à mesure qu'il se détruit par l'ébullition, entraîne probablement la décomposition d'une partie de l'Asparagine. Du moins tout fait présumer qu'il en est ainsi, car plusieurs fois nous avons trouvé de l'aspartate d'ammoniaque dans des extraits de guimauve

préparés par décoction, et desquels il ne nous était pas possible de retirer d'Asparagine. Nous croyons, en outre, devoir engager à ne pas évaporer les liqueurs jusqu'en consistance d'extrait, parce qu'alors les cristaux, gênés dans leur naissance par la viscosité du véhicule, ne prennent pas une forme hexagonale prononcée et deviennent moins faciles à être séparés du liquide.

Avant de nous occuper de la composition élémentaire de l'Asparagine et des résultats auxquels elle nous a conduits, nous croyons utile de faire mention de deux expériences que nous avons faites et qui sont en contradiction manifeste avec celles annoncées par Wittstock. Ce chimiste, en effet, dans son travail sur l'Asparagine, croit pouvoir affirmer que cette substance n'existe pas toute formée dans la guimauve, et qu'elle est au contraire le produit de la réaction de l'eau sur cette racine. Il se croit autorisé à émettre cette opinion, parce que quand on traite, dit-il, la racine de guimauve par l'alcool à plusieurs reprises, par un nouveau traitement aqueux, elle ne donne pas d'Asparagine. Cette expérience était assez curieuse pour que nous cherchassions à la vérifier. Nous avons donc traité 500 grammes de racine de guimauve par deux litres d'alcool rectifié bouillant, et à deux reprises différentes. La racine soumise à la presse a été mise à macérer dans 4 litres d'eau pure; l'eau renouvelée après 36 heures, et les liqueurs réunies, passées et évaporées à une douce chaleur, ont donné après 3 jours, 3 grammes 5 décigrammes d'Asparagine en tout semblable à celle obtenue avec la racine de guimauve non traitée préalablement par l'alcool. Cette expérience a été répétée plusieurs fois avec le même résultat. Elle n'offre donc rien d'analogue à ce que l'un de nous a observé conjointement avec M. Robiquet dans le traitement des amandes amères; aussi sommes-nous por-

tés à conclure que l'opinion de Wittstock n'est nullement fondée.

Ce chimiste dit encore avoir reconnu que l'extrait aqueux de la racine de guimauve devient de plus en plus acide par l'évaparation, et donne des quantités d'Asparagine de plus en plus grandes. Mais si l'on sature l'acide libre avec de l'eau de chaux à mesure qu'il se forme, en sorte que l'extrait aqueux reste à peu près neutre pendant tout le temps de l'évaporation, on n'obtient point d'Asparagine, ou l'on n'en obtient que des traces insignifiantes.

Ne voyant aucune raison pour que la faible quantité d'acide qui se développe dans l'extrait de guimauve détermine la production de l'Asparagine, nous avons scrupuleusement examiné l'état des liqueurs depuis la première heure de macération jusqu'à l'évaporation complète, et nous avons été étonnés de voir qu'elles aient été constamment sans action sur le tournesol. L'idée nous vint alors de plonger un papier rougi dans la liqueur; ce papier après quelques secondes fut ramené au bleu. Notre étonnement cessa lorsque nous nous souvînmes que depuis quelques années on emploie la chaux pour blanchir les racines de guimauve, du commerce. Quoi qu'il en soit, il paraît que le développement de l'acidité dans les macérés ou l'extrait de guimauve n'est pas nécessaire à la formation de l'Asparagine, puisque nous en avons constamment retiré des liqueurs neutres ou même légèrement alcalines.

Quant au sucre de canne annoncé par Wittstock, nous n'avons pu l'obtenir cristallisé; mais, en mettant à profit la belle application que M. Biot a faite de la polarisation circulaire à l'analyse des sucres, nous avons soumis à l'action de la lumière, conjointement avec ce physicien, le sucre que nous avons obtenu de la guimauve en trai-

tant cette racine par l'alcool à 38° bouillant, et nous avons vu que sa nature était effectivement identique avec celle du sucre de canne.

ANALYSE DE L'ASPARAGINE.

La composition de l'Asparagine et de l'acide aspartique a été déterminée par le procédé de M. Liebig, et pour éviter toute erreur provenant d'une absorption d'humidité atmosphérique, nous avons desséché nos mélanges d'oxide de cuivre et de matière à analyser au moyen de la petite pompe de M. Gay-Lussac, en observant les précautions qu'il a indiquées.

1° 2 grammes d'Asparagine cristallisée, desséchée à 120°, ont perdu 0,252 d'eau.

2° 1,67 ont perdu 0,134.

D'où l'on a :

Asparagine anhydre	87,418
Eau	12,582
	100,000

			Acide carbonique.	Eau.
I.	0^{g}500	Asparagine séchée ont donné	0^{g},702	8,280
II.	0,500	*id.*	0,711	0,280
III.	0,810	*id.*	1,134	0,478

I.	0,500	ont donné à 0° et à 0^{m},760		azote	90 c. c.
II.	1,115	*id.*	*id.*	*id.*	198 c. c.
III.	8,802	*id.*	*id.*	*id.*	140 c. c.

Une quantité indéterminée d'Asparagine brûlée dans le vide par l'oxide de cuivre a fourni un mélange gazeux dans lequel l'azote et l'acide carbonique ont été trouvés dans le rapport de 1 : 4 très sensiblement (première expérience :: 1 : 3,95; 2° :: 1 : 3,90).

Les nombres ci-dessus donnent en 100 parties la composition suivante pour l'Asparagine anhydre :

	1°	2°	3°
Carbone.	38,82	39,31	38,90
Hydrogène.	6,21	6,36	6,54
Azote.	22,80	22,49	22,11
Oxigène.	32,17	31,84	32,65
	100,00	100,00	100,00

En calculant en atomes, on a

8 atomes	de carbone.	611,504	39,060
16	hydrogène. . . .	98,836	6,377
4	azote.	354,072	22,610
5	oxigène	500,000	31,953
		1564,412	100,000

La formule de l'Asparagine séchée à + 120° est donc

$$C^8\ H^{16}\ Az^4\ O^5.$$

Lorsqu'elle est cristallisée, elle renferme 12,58 pour 100 d'eau, quantité correspondant exactement à 2 atomes.

ANALYSE DE L'ACIDE ASPARTIQUE.

L'acide aspartique qui a servi à nos expériences a été obtenu en faisant bouillir de l'eau de baryte en excès avec de l'Asparagine, jusqu'à ce que le dégagement d'ammoniaque ait cessé depuis quelque temps, et précipitant exactement la baryte par l'acide sulfurique, lorsque la liqueur est encore chaude. L'acide étant extrêmement peu soluble à froid, se précipite en presque totalité sous forme de petits cristaux soyeux et nacrés, d'une saveur acidule qui se rapproche beaucoup de celle de l'acide mucique. Ce procédé est plus commode et plus expéditif que celui de

M. Plisson, qui consiste à faire bouillir l'Asparagine avec de la litharge, et à décomposer l'aspartate de plomb par un courant d'hydrogène sulfuré; l'insolubilité de l'oxide et de l'aspartate de plomb augmente considérablement la durée de l'opération.

L'acide aspartique ne renferme pas d'eau de cristallisation, car, exposé à 120°, il n'a rien perdu de son poids.

		Acide carbonique.	Eau.
I.	0,500 ont donné	0,700	0,240
II.	1,610	0,848	0,305
III.	0,755	1,070	0,385

I.	0,500	à 0^{l}	et à 0^{m},760	azote	45 c. c.
II.	1,205	*id.*	*id.*		107
III.	1,000	*id.*	*id.*		86

Nous avons, comme pour l'Asparagine, déterminé le rapport de l'azote à l'acide carbonique : nous l'avons trouvé :: 1 : 8 (première expérience, :: 1 : 7,85; deuxième expérience, :: 1 : 7,94).

L'acide aspartique est composé, d'après les analyses ci-dessus rapportées, de

	1°	2°	3°
Carbone	38,71	38,43	39,18
Hydrogène	5,32	5,52	5,65
Azote	11,40	11,25	11,15
Oxigène	44,59	44,80	44,02
	100,00	100,00	100,00

En atomes :

8 at.	de carbone	611,504	38,80
14	hydrogène	87,357	5,54
2	azote	177,036	11,23
7	oxigène	700,000	44,43
		1575,897	100,00

La capacité de saturation et le poids de l'atome de l'acide aspartique ont été déduits de ses combinaisons neutres avec les oxides de plomb et d'argent.

1,307 d'aspartate neutre de plomb séché à 120° ont donné 0,638 d'oxide et 0,669 d'acide.

Dans 0,860 d'aspartate neutre d'argent on a trouvé 0,430 d'oxide et la même quantité, c'est-à-dire 0,430 d'acide.

D'où l'on tire les nombres 1462 et 1451 pour le poids de l'atome de l'acide aspartique.

1 gramme de sel de plomb a fourni 0,772 d'acide carbonique et 0,242 d'eau.

La même quantité a donné à 0^t à $0^m,760$,48 c. c. de gaz azote.

Ce qui établit la composition suivante pour l'acide aspartique tel qu'il existe dans les aspartates :

Carbone	41,70
Hydrogène.	5,25
Azote	11,90
Oxigène	41,15
	100,80

En adoptant pour cet acide la formule $C^8 H^{12} Az^2 O^6$, on obtient les nombres suivans, qui sont très rapprochés de ceux qu'indique l'expérience :

Carbone.	41,78
Hydrogène	5,11
Azote.	12,09
Oxigène.	41,02
	100,00

Et pour le poids de l'atome le chiffre 1463,41, au lieu de la moyenne 1456 trouvée par expérience.

L'acide aspartique contient donc 1 atome d'eau qui ne le quitte que lorsqu'il se combine avec les bases, car on a vu que sa formule, qui, lorsqu'on l'analyse isolé, est $C^8 H^{14} Az^2 O^7$, devient $C^8 H^{12} Az^2 O^6$ quand on le prend dans les sels.

Sa capacité de saturation est égale au sixième de l'oxigène qu'il contient, c'est-à-dire à 6,836.

Dans les sous-sels, l'acide est combiné avec deux fois autant de base que dans les sels neutres.

M. Berzélius fait observer, dans le tome VI de son *Traité de Chimie*, que si l'Asparagine était décomposable en ammoniaque et en acide aspartique seulement, ce dernier devrait contenir tout le carbone qui se trouve dans l'Asparagine, et par conséquent, sous le même poids, une quantité plus considérable de ce corps. Cette observation, qui nous fit chercher long-temps, mais en vain, dans les réactions de l'Asparagine une matière autre que l'ammoniaque et l'acide aspartique, ne cessa de nous arrêter que lorsque nous eûmes terminé nos analyses. Nous ne fûmes plus étonnés alors de rencontrer toujours les mêmes quantités de charbon que MM. Henry fils et Plisson, et nous nous aperçûmes bientôt que si le dégagement d'ammoniaque qui se produit pendant la conversion de l'Asparagine en acide aspartique devait augmenter le poids de charbon de ce dernier, il y avait en même temps fixation dans le même acide d'une certaine quantité d'eau qui venait rétablir sensiblement l'équilibre.

En effet, 1 atome d'Asparagine anhydre pesant 1565,40 donne 1 atome d'acide aspartique hydraté pesant 1575,89, et dans le même temps que, sous l'influence des alcalis ou des acides, 1 atome d'ammoniaque = 212,47 se dégage, 2 atomes d'eau = 224,96 se fixent sur l'acide; ce qui explique pourquoi ce dernier à l'état hydraté contient,

et doit contenir, en effet, un peu moins de carbone que l'Asparagine elle-même.

Ce résultat, qu'il était permis de déduire de l'examen comparatif seul des analyses de l'Asparagine et de l'acide aspartique, a d'ailleurs été vérifié par l'expérience.

2 grammes d'Asparagine anhydre bouillis avec de l'eau de baryte et décomposés par l'acide sulfurique ont donné 2,010 d'acide aspartique.

L'examen comparatif des analyses de l'Asparagine et de l'acide aspartique conduit à ce résultat curieux, que la première n'est autre chose que de l'aspartate d'ammoniaque, moins une certaine quantité d'eau, c'est-à-dire qu'elle offre l'exemple d'un produit naturel tout-à-fait analogue à l'oxamide.

On peut, en effet, représenter la transformation de l'Asparagine en aspartate d'ammoniaque, à l'aide de l'équation suivante :

$$\underset{\text{Asparagine.}}{C^8 H^{16} Az^4 O^5} + \underset{\text{Eau.}}{H^2 O} = \underset{\text{Aspartate d'ammoniaque.}}{H^6 Az^2 C^8 H^{12} Az^2 O^6},$$

c'est-à-dire qu'en réagissant sur 1 atome d'eau, 1 atome d'Asparagine produit 1 atome d'aspartate d'ammoniaque, de même que 1 atome d'oxamide produit 1 atome d'oxalate d'ammoniaque, et 1 atome de benzamide, 1 atome de benzoate d'ammoniaque.

Pour avoir, s'il était possible, une certitude encore plus complète de l'analogie de l'Asparagine avec l'oxamide, nous l'avons soumise à l'action de l'eau distillée, à une pression de 2 à 3 atmosphères, en nous servant à cet effet d'un simple tube en verre bien solidement bouché à la lampe par ses deux extrémités.

Au bout de quelques heures le tube refroidi a été ou-

vert dans une cuve à mercure. Il n'en est sorti aucun fluide élastique, et le mercure est remonté dans le tube d'une quantité tellement petite, que nous ne craignons pas d'en attribuer la cause à la dilatation que l'air du tube avait éprouvée pendant la soudure.

La solution aqueuse d'Asparagine, qui d'abord n'était précipitée par aucun sel métallique, dégageait alors *à froid* d'abondantes vapeurs ammoniacales par son contact avec les alcalis, précipitait les sels d'argent et de plomb et présentait tous les caractères de l'aspartate d'ammoniaque.

Cette expérience est bien propre, ce nous semble, à confirmer la manière dont nous envisageons l'Asparagine.

L'urée, d'après les expériences de M. Dumas, se comporte d'une manière analogue à l'oxamide, lorsqu'on la soumet à l'action des mêmes agens, et se convertit en ammoniaque et en acide carbonique.

Sa composition, que les beaux travaux de Wöhler ont irrévocablement fixée, se prête fort bien à ces transformations.

Plaçant cette substance à côté de l'oxamide, de la benzamide et de l'Asparagine, on a le tableau suivant de la composition de ces quatre substances et de leur transformation en sels ammoniacaux sous l'influence de l'eau.

$$\underset{\text{Oxamide.}}{Az^2\,C^2\,H^4\,O^2} + \underset{\text{Eau.}}{H^2\,O} = \underset{\text{Oxalate d'ammoniaque.}}{H^6\,Az^2\,C^2\,O^3}.$$

$$\underset{\text{Benzamide.}}{Az^2\,C^{14}\,H^{14}\,O^2} + \underset{\text{Eau.}}{H^2O} = \underset{\text{Benzoate d'ammoniaque.}}{H^6\,Az^2\,C^{14}\,H^{10}\,O^3}.$$

$$\underset{\text{Urée.}}{Az^2\,C\,H^4\,O} + \underset{\text{Eau.}}{H^2\,O} = \underset{\text{Carbonate d'ammoniaque.}}{H^6\,Az^2\,C\,O^2}.$$

$$\underset{\text{Asparagine.}}{Az^4\,C^8\,H^{16}\,O^5} + \underset{\text{Eau.}}{H^2\,O} = \underset{\text{Aspartate d'ammoniaque.}}{H^6\,Az^2\,C^8\,H^{12}\,Az^2\,O^6}.$$

Ainsi, ce que M. Dumas avait prévu et annoncé se trouve réalisé aujourd'hui. L'oxamide, dont la découverte lui est due, est devenue le type d'une famille qui, sans doute, s'accroîtra encore beaucoup par la suite lorsqu'on aura examiné avec plus d'attention l'action des acides et des alcalis sur les substances azotées.

Déjà l'on sait que l'amygdaline et la sinapisine, traitées par une dissolution bouillante de potasse, laissent dégager de l'ammoniaque, quoique d'ailleurs on ignore quels sont les autres produits qui se forment pendant cette réaction.

L'allantoïne, l'oxide cystique, rentreront peut-être aussi dans cette classe de composés. La caféine dégage de l'ammoniaque quand on la fait bouillir avec de la baryte. Cette substance, remarquable surtout par la grande quantité d'azote qu'elle contient, a été analysée récemment par MM. Pfaff, Liebig et Wöhler, qui lui ont trouvé la formule $C^4\ H^5\ Az^2\ O$. En supposant que sous les mêmes influences que l'Asparagine, elle se comporte d'une manière analogue, elle pourrait se transformer uniquement, comme cette dernière, en ammoniaque et en acide aspartique.

En effet,

$$C^4 H^5 Az^2 O + 2\,(H^2 O) = \frac{H^6 Az^2 C^8 H^{12} Az^2 O^6}{2},$$

c'est-à-dire que 1 atome de caféine, en fixant les élémens de 2 atomes d'eau, pourrait se convertir en 1 demi-atome d'aspartate d'ammoniaque.

Toutefois, n'ayant pu nous procurer qu'une quantité extrêmement petite de caféine, nous n'avons encore constaté que le dégagement d'ammoniaque dont nous avons parlé, et il serait bien possible que les choses se pas-

sassent autrement que nous le supposons. Nous nous proposons de revenir sur cette question, et, quant à présent, nous nous bornerons à signaler le rapprochement dont il est question plus haut entre l'Asparagine et la caféine, et à rappeler que ces deux principes immédiats et l'aspartate d'ammoniaque ne diffèrent, quant à leur composition, que par l'eau que ces matières contiennent en plus ou en moins. Nous sommes loin, au reste, d'attacher à ces idées plus d'importance qu'elles n'en méritent réellement. Cependant, en ce qui regarde particulièrement l'Asparagine, nos expériences, comme nos analyses, s'accordent toutes à la placer auprès de l'oxamide de M. Dumas et de la benzamide de MM. Wöhler et Liebig, et nous proposons, à cause de cette analogie, de transformer son nom en celui d'*asparamide*, et celui d'acide aspartique en acide *asparmique*.

Il est remarquable que l'Asparagine cristallisée contient exactement la quantité d'eau qui serait nécessaire pour se transformer en aspartate d'ammoniaque, en admettant que ce sel retienne 1 atome d'eau comme tous les sels ammoniacaux de cette classe; car $C^8 H^{16} Az^4 O^5 + 2(H^2O)$, qui représente 1 atome d'Asparagine hydratée, représente également 1 atome d'aspartate d'ammoniaque, ou $H^6 Az^2 C^8 H^{12} Az^2 O^6 + H^2 O$.

L'acide aspartique a une grande tendance à se combiner avec un excès de base. L'aspartate de cuivre, formé dans le sein même d'une liqueur acide, est bi-basique. La chaux et la baryte forment aussi des sous-sels qui sont insolubles et cristallisables.

L'action de la magnésie caustique sur l'Asparagine ne présente rien de différent de celle de la baryte. Il y a dans ce cas dégagement d'ammoniaque et formation d'aspartate de magnésie qui se présente par évaporation sous forme

d'une masse blanche, incristallisable, d'un aspect gommeux. Nous avons inutilement cherché ce sel dans la racine de guimauve, où Wittstock dit l'avoir rencontré.

Nous ne décrirons pas plus en détail les propriétés de l'Asparagine, de l'acide aspartique et de ses sels, cette étude ayant été faite avec soin par MM. Henry et Plisson. Nous dirons seulement qu'aucune des personnes auxquelles nous avons fait goûter l'acide aspartique et les aspartates, ne leur ont trouvé le goût de jus de viande que M. Plisson avait signalé en quelque sorte comme un caractère particulier à ces matières.

MÉMOIRE

SUR L'ACTION MUTUELLE

DE

L'ACIDE PHOSPHORIQUE

ET DE L'ALCOOL;

PAR M. J. PELOUZE.

Les phénomènes remarquables qui accompagnent l'action de l'acide sulfurique sur l'alcool, et les nombreux produits qui résultent de cette action, ont été l'objet d'investigations tellement profondes, qu'on peut aujourd'hui comparer cette classe de phénomènes à tout ce que la Chimie inorganique présente de plus net et de plus précis. Toutefois les différens chimistes qui se sont occupés de l'éther ayant presque exclusivement employé l'acide sulfurique dans leurs expériences, il était important pour l'histoire générale de l'éthérification de ne pas s'arrêter à cette seule étude et d'examiner avec soin jusqu'où irait l'analogie d'action des autres acides minéraux dans leur contact avec l'alcool.

Les acides de cette classe, susceptibles d'éthérifier l'alcool, sont au nombre de quatre : ce sont les acides sulfurique, phosphorique, arsénique et fluo-borique.

Les premiers essais faits dans le but de transformer

l'alcool en éther par le moyen de l'acide phosphorique, ont été tentés sans succès par Scheele, Lavoisier et les académiciens de Dijon. Quelques années plus tard, Boudet jeune, pharmacien de Paris, publia dans le tome XI des *Annales de Chimie* un Mémoire dans lequel il annonça une action réelle entre cet acide et l'alcool, et la manifestation de la plupart des phénomènes qui accompagnent l'éthérification; mais le produit qu'il obtint étant mêlé d'une très grande quantité d'alcool, cette circonstance l'empêcha sans doute d'en reconnaître la nature, et il ne lui assigna pas les caractères d'un véritable éther.

Enfin, dans le courant de l'année 1807, parut une dissertation extrêmement remarquable de M. Boulay père, sur les éthers. Ce chimiste prouva d'une manière incontestable que les acides phosphorique et arsénique étaient susceptibles de transformer l'alcool en un éther jouissant de toutes les propriétés de celui obtenu avec l'acide sulfurique.

Fourcroy et Vauquelin, chargés par l'Académie des Sciences d'examiner le travail de M. Boulay, en confirmèrent tous les résultats, et admirent, comme lui, une identité parfaite entre ces deux corps.

Après la publication des remarques si singulières de Dabit relativement à un nouvel acide et à des sels nouveaux produits pendant l'éthérification, l'attention des chimistes ayant été vivement tournée vers cette nouvelle série de phénomènes, M. Lassaigne voulut s'assurer si les acides phosphorique et arsénique ne lui fourniraient pas quelques composés analogues à l'acide sulfovinique et aux sulfovinates. Il fit réagir de l'acide phosphorique sur l'alcool, satura la liqueur avec de la chaux, l'évapora ensuite et obtint un sel qui, par la calcination, fournissait de l'eau, de l'huile douce de vin, des gaz d'une odeur d'éther acétique, du charbon et du phosphate de chaux.

Le même sel, décomposé par l'action combinée de l'acide nitrique et de la chaleur, donna à M. Lassaigne un résidu blanc, insoluble dans l'eau, et jouissant de toutes les propriétés du phosphate de chaux. Ce chimiste ne poussa pas plus loin ses recherches, qui étaient au reste suffisantes pour assimiler, comme il le fit, l'action de l'acide phosphorique sur l'alcool à celle de l'acide sulfurique. D'ailleurs, à l'époque où il les entreprit, les travaux si remarquables d'Hennell et de Sérullas, et ceux également importans de MM. Dumas et Boulay fils, n'étaient pas encore connus, et ce n'était certes pas avec un corps éthérifiant aussi difficilement l'alcool que le fait l'acide phosphorique, que M. Lassaigne pouvait espérer jeter quelque jour sur l'histoire alors si obscure de l'éthérification.

Les choses en étaient là, lorsque j'entrepris le travail que j'ai l'honneur de soumettre à l'Académie.

Je commençai d'abord par répéter les expériences de de M. Boulay, et j'obtins, comme lui, des quantités notables d'éther en faisant réagir les acides phosphorique et arsénique sur l'alcool.

Je m'assurai ensuite qu'un mélange d'acide phosphorique et d'alcool concentrés, agité avec un excès d'eau de baryte, bouilli et filtré, précipitait abondamment par l'acide sulfurique. J'étudiai de plus près cette action, et je fus assez heureux pour isoler un nouvel acide et de nouveaux sels, que j'appellerai *acide phosphovinique* et *phosphovinates* pour me conformer à la nomenclature généralement adoptée pour l'acide sulfovinique et les sulfovinates.

L'action de l'acide phosphorique sur l'alcool varie avec le degré de concentration de ces deux corps, leurs quantités respectives et la température à laquelle on soumet leur mélange.

Lorsque l'acide a une densité égale ou inférieure à 1,2, il ne fait éprouver aucun genre d'altération à l'alcool, quel que soit d'ailleurs le degré de concentration de ce dernier.

Quand, au contraire, l'acide est très concentré, que sa consistance est celle d'un sirop épais et qu'on le chauffe dans cet état avec la cinquième partie de son poids d'alcool, une vive effervescence se manifeste, il se produit une grande quantité d'hydrogène per-carboné, de l'huile douce de vin; la liqueur brunit fortement et laisse déposer du charbon sous forme de légers flocons noirs.

Si l'acide phosphorique et l'alcool, tous deux concentrés, sont mêlés en quantités égales ou à peu près égales en poids, un thermomètre plongé dans leur mélange s'élève bientôt jusqu'à 80 degrés. La liqueur soumise à une douce ébullition, répand une odeur éthérée très agréable, reste parfaitement incolore, et fournit, lorsqu'on la sature par le carbonate de baryte, une quantité notable de phosphovinate.

Il y a donc, comme on peut l'apercevoir déjà, une grande similitude d'action entre les acides phosphorique et sulfurique dans leur contact avec l'alcool, car non-seulement ces deux acides l'éthérifient ou ne l'éthérifient pas, suivant qu'ils sont concentrés ou affaiblis, mais encore la production de l'éther est intimement liée dans les deux cas à celle d'un acide particulier. Je reviendrai sur ce dernier point à la fin de mon Mémoire, et je passe directement à la préparation et aux propriétés de l'acide phosphovinique et des phosphovinates.

On fait un mélange de 100 grammes d'alcool à 95 degrés centésimaux et de 100 grammes d'acide phosphorique dont la consistance doit être celle d'un sirop très épais; on entretient ce mélange pendant quelques mi-

nutes à une température de 60 à 80 degrés; au bout de vingt-quatre heures, on l'étend de sept à huit fois son volume d'eau, on le neutralise par du carbonate de baryte réduit en poudre aussi fine que possible; on porte ensuite la liqueur à l'ébullition pour volatiliser l'excès d'alcool, on la laisse refroidir jusqu'à environ 70 degrés et l'on filtre. On obtient par le refroidissement un très beau sel blanc qui se dépose ordinairement sous forme de lames hexagonales. C'est du phosphovinate de baryte.

Ce sel, une fois obtenu, peut servir facilement à la préparation des autres phosphovinates et de l'acide phosphovinique.

Voici quelles sont ses propriétés :

Il est blanc, sans odeur, d'une saveur désagréable, salée et amère en même temps, comme celle de tous les sels barytiques solubles. Exposé au contact de l'air, il s'y effleurit, mais avec une extrême lenteur. Il est insoluble dans l'alcool et l'éther, qui le précipitent immédiatement de sa dissolution aqueuse.

Sa solubilité dans l'eau est remarquable en ce qu'elle ne croît pas, comme celle de presque tous les autres corps, avec la température. Elle est à son *maximum* vers 40°. Au-dessus aussi bien qu'au-dessous de ce terme, elle en laisse précipiter. Voici d'ailleurs le tableau de cette solubilité :

100 parties d'eau en dissolvent à	0°	3,40 parties.
100	5°	3,30
100	20°	6,72
100	40°	9,36
100	50°	7,96
100	55°	8,89
100	60°	8,08
100	80°	4,49
100	100°	2,80

Le sel qui se précipite à 100° de sa dissolution aqueuse n'est pas anhydre. Il contient la même quantité d'eau que celui qui a cristallisé à la température ordinaire.

La courbe de solubilité de ce sel est représentée ci-dessous.

En prenant pour *abscisses* les températures, pour *ordonnées* les quantités de sel dissous, on est arrivé à la représentation graphique des courbes de solubilité du phosphovinate de baryte hydraté et anhydre. L'irrégularité de ces courbes n'a pas permis de substituer aux recherches directes de l'expérience l'usage d'une équation simple qui permît de déduire immédiatement d'une température connue la solubilité correspondante.

Soumis à l'action de la chaleur, le phosphovinate de baryte perd son eau de cristallisation qui constitue les 30 centièmes de son poids, et prend l'aspect brillant de la nacre de perle. Il ne commence à se décomposer que peu au-dessous du rouge obscur, et donne alors de l'eau, des gaz hydrogènes carbonés, des traces à peine sensibles d'alcool et d'éther, et un résidu consistant en un mélange de phosphate neutre de baryte et de charbon très divisé. Il y a absence complète d'huile douce de vin et d'hydrogène phosphoré.

Le phosphovinate de baryte cristallise sous différentes formes qui sont toutes dérivées d'un prisme très court, à bases rhomboïdales.

Si le phosphovinate de baryte était un sel neutre comme le sulfovinate, il fournirait par la calcination, soit du

phosphore, soit du gaz hydrogène phosphoré, parce qu'alors il s'établirait une réaction entre les élémens de l'alcool et l'excès d'acide du sel devenu bi-phosphate de baryte; mais il n'en est pas ainsi à cause de la nature basique du sel dans lequel il ne se trouve qu'une quantité de baryte exactement nécessaire pour produire un phosphate neutre avec la totalité de l'acide phosphorique. L'eau versée sur le résidu noir n'en extrait aucune matière soluble; elle n'affecte en aucune manière les papiers réactifs, et l'on ne remarque aucun dégagement d'hydrogène phosphoré, ce qui constate l'absence du phosphure de barium dans le résidu.

L'acide nitrique mis en contact à froid avec le phosphovinate de baryte le rend opalin. Il y a formation d'acide phosphorique et de nitrate de baryte, qu'on peut facilement isoler au moyen de l'alcool, dans lequel ce sel est insoluble.

Le même phosphovinate, desséché et chauffé avec du carbonate de potasse, ne donne pas d'alcool, comme le fait le sulfovinate de la même base, d'après MM. Wöhler et Liebig. Le mélange ne se détruit et ne commence à noircir qu'un peu avant le rouge obscur, sans que la présence du carbonate de potasse entre pour quelque chose dans le phénomène.

Les sels suivans : chlorure de manganèse, protochlorure et perchlorure de fer, chlorure de nickel, chlorure de platine, chlorure de cuivre, d'or, ne sont pas précipités de leur dissolution aqueuse par le phosphovinate de baryte; mais ils forment au contraire des précipités plus ou moins abondans dans les sels d'étain au *minimum*, dans les sels mercuriels, les sels d'argent, de plomb et de chaux.

Tous les phosphovinates ainsi préparés par double décomposition se dissolvent dans les acides affaiblis.

Ceux qui sont solubles, tels que ceux de potasse, de soude, d'ammoniaque et de magnésie, s'obtiennent très fa-

cilement en décomposant par le phosphovinate de baryte les sulfates de ces diverses bases.

Le sulfovinate de potasse cristallise avec beaucoup de peine et trop confusément pour qu'il soit possible de déterminer les formes qu'il affecte. Il est très déliquescent et fusible dans son eau de cristallisation.

J'en dirai autant de celui de soude.

Celui de chaux contient 4 atomes d'eau de cristallisation. Il est très peu soluble et se précipite sous forme de petites lamelles extrêmement brillantes et micacées, lorsqu'on verse du phosphovinate de baryte dans du nitrate ou du muriate de chaux. Il se dissout facilement dans l'eau acidulée par le vinaigre ou par l'acide phosphovinique.

Le phosphovinate de strontiane cristallise difficilement. Comme celui de baryte, il est beaucoup moins soluble dans l'eau bouillante que dans l'eau tiède. Il contient de l'eau de cristallisation dont la quantité n'a pas été déterminée. L'alcool le précipite de sa dissolution aqueuse.

Le phosphovinate d'argent ressemble beaucoup, quant à son aspect et à son peu de solubilité, à celui de chaux, et s'obtient facilement par double décomposition avec le nitrate d'argent et le phosphovinate de baryte. Il contient de l'eau de cristallisation.

Celui de plomb est le plus insoluble de tous et se précipite à l'état anhydre.

De tous ces sels, je n'en ai soumis que deux à l'analyse; savoir, celui de baryte et celui de plomb.

5^{g},908 de phosphovinate de baryte cristallisé, desséchés à 120°, ont été réduits à 4,126.

1,775 ont perdu (2^{e} expérience) 0,550 d'eau.

La moyenne donne	30,575	eau
	69,425	sel sec
	100,000	

5^{gr},000 de sel sec, décomposés par l'acide nitrique et calcinés au rouge dans un creuset de platine, ont fourni 4,140 de phosphate de baryte.

D'une autre part, 5 autres grammes du même phosphovinate desséché, dissous dans l'eau et précipités par l'acide sulfurique, ont donné 4,308 de sulfate de baryte.

Les nombres 4,140 et 4,308 étant entre eux, jusqu'à la dernière décimale, comme le poids de 1 atome de phosphate neutre de baryte est à celui de 2 atomes de sulfate de la même base, il s'ensuit que dans le phosphovinate de baryte l'acide phosphorique et la baryte se trouvent en proportions exactement convenables pour produire un phosphate neutre.

L'analyse de la matière organique du sel a été faite avec l'excellent appareil du docteur Liebig. Elle est d'une exécution infiniment plus facile que celle du sulfovinate de baryte, qui se mêle mal avec l'oxide de cuivre, forme pâte avec lui, et donne toujours, quoi qu'on fasse, de l'acide sulfureux. J'ai répété ces analyses un grand nombre de fois, et toujours j'ai obtenu des résultats satisfaisans.

	Sel sec.	Acide carbonique.	Eau.
1°	1,956	0,639	0,390
2°	3,000	0,002	0,619
3°	3,244	1,085	0,673

La moyenne donne 9,166 de carbone et 2,266 d'hydrogène pour 100 de phosphovinate.

Ce sel est donc formé de :

82,800	phosphate neutre de baryte
9,166	carbone
2,266	hydrogène
5,768	oxigène
100,000	

Ces nombres traduits en atomes donnent

$$2Ba\,O$$
$$P\dot{h}^2O^5$$
$$H^{12,35}$$
$$C^{4,06}$$
$$O^{1,95}$$

et se rapprochent, autant qu'on peut le désirer, de la formule

$$2BaO + P\dot{h}^2O^5 + 12H + 4C + 2O.$$

$(H^4C^2 + H^2O)$ représentant l'atome d'alcool, le phosphovinate de baryte pourra être considéré comme un sel sesqui-basique, dans lequel 1 atome d'acide phosphorique sera saturé par 2 atomes de baryte et par 2 atomes d'alcool.

Quant à son eau de cristallisation, il en contient 12 atomes, d'après les deux expériences rapportées plus haut.

Le phosphovinate de baryte sec a donc la formule suivante,

$$2BaO + 2(H^4C^2 + H^2O) + P\dot{h}^2O^5,$$

et le même sel hydraté =

$$2BaO + 2(H^4C^2 + H^2O) + P\dot{h}^2O^5 + 12H^2O.$$

L'analyse du phosphovinate de plomb a été exécutée par les mêmes procédés.

	3 gr.	ont donné :	phosphate neutre de plomb = 3,314
1°	4 gr.	*id.*	acide carbon. = 1,135. Eau = 0,665
2°	4 gr.	*id.*	acide carbon. = 1,118. Eau = 0,648

Ces expériences conduisent à la composition suivante :

$$2PbO + 2(H^4C^2 + H^2O) + Ph^2O^5.$$

Ainsi les phosphovinates sont des sels doubles dans lesquels 2 atomes de base inorganique et 2 atomes d'alcool sont combinés avec l'atome d'acide phosphorique.

2 atomes d'alcool équivalant à 1 atome d'un oxide inorganique, l'acide phosphorique doit en exiger le double, c'est-à-dire 4 atomes pour former un sel neutre; d'où il suit qu'en supposant que l'alcool entre comme base dans les phosphovinates et y joue le rôle de corps électro-positif, ces sels devront être considérés comme sesqui-basiques, et l'acide qu'ils renferment comme un bi-phosphate d'alcool dont la formule est :

$$2(H^4C^2 + H^2O) + Ph^2O^5.$$

Cet acide s'obtient par un procédé analogue à celui de l'acide sulfovinique.

On dissout le phosphovinate de baryte dans l'eau et l'on y verse peu à peu de l'acide sulfurique étendu, jusqu'à ce qu'il ne se produise plus de précipité. On filtre et l'on évapore la liqueur d'abord à feu nu, puis dans le vide à côté d'un vase rempli d'acide sulfurique. On obtient un liquide qui, amené à la consistance d'une huile épaisse, refuse de se concentrer davantage, mais toutefois ne se décompose pas à la température ordinaire dans le vide, comme le fait l'acide sulfovinique.

On peut également se procurer cet acide en décomposant le phosphovinate de plomb par l'hydrogène sulfuré.

C'est un corps d'une saveur mordicante et très acide, sans odeur, sans couleur, d'une consistance oléagineuse,

rougissant fortement la couleur bleue du tournesol, soluble en toutes proportions dans l'eau, l'alcool et l'éther, susceptible de résister parfaitement à une ébullition prolongée lorsqu'il est dissous dans plusieurs fois son volume d'eau, se décomposant au contraire à cette même température, lorsqu'il est à son *maximum* de concentration, donnant d'abord un mélange d'éther et d'alcool, puis des hydrogènes carbonés, des traces d'huile douce de vin et un résidu d'acide phosphorique mêlé de charbon.

Il ne m'a pas été possible d'obtenir à l'état solide une assez grande quantité d'acide phosphovinique pour le soumettre à l'analyse. Il se forme toutefois des cristaux dans celui qui est très concentré, et l'on en voit se précipiter sous forme de petits cristaux très brillans au soleil. Un froid de 22° n'en augmente pas le nombre.

L'acide phosphovinique coagule l'albumine, soit qu'il provienne de la réaction de l'acide phosphorique ordinaire sur l'alcool, soit qu'il ait été produit par l'acide phosphorique préalablement calciné au rouge. Je n'ai pu remarquer la plus légère différence, soit dans les propriétés, soit dans la composition de l'acide phosphovinique et des phosphovinates préparés avec les acides phosphorique et paraphosphorique. L'acide phosphorique retiré des sels que je pensais d'abord être des paraphosphovinates, neutralisé par la potasse et traité par le nitrate d'argent, m'a constamment donné un précipité jaune; ce qui me porte à croire que l'acide paraphosphorique n'est pas susceptible de former des sels doubles avec les bases inorganiques et l'alcool, et qu'en réagissant sur ce dernier corps, sa propriété isomérique l'abandonne. Cependant la chose est trop délicate pour que j'ose regarder cette opinion comme l'expression de la vérité.

L'acide phosphovinique étendu d'eau et mis en contact

à froid avec du zinc et du fer, donne lieu à un dégagement abondant de gaz hydrogène et à la formation d'un phosphovinate de protoxide de fer ou de zinc. Il dégage l'acide carbonique de tous les carbonates et forme avec leurs oxides des sels dont la plupart sont solubles.

L'acide sulfurique et l'eau de baryte ne troublent pas sa dissolution aqueuse.

Curieux de savoir si l'acide phosphovinique se produit en aussi grande quantité à froid qu'à chaud, et combien il s'en forme pour un poids déterminé d'acide phosphorique, j'ai fait les expériences suivantes, dont l'idée m'a été suggérée par la lecture du beau Mémoire d'Hennell sur l'éther sulfurique.

10 grammes d'acide phosphorique très concentré ont été dissous dans l'eau, 10 autres grammes l'ont été dans un poids égal d'alcool à 95° centésimaux, et le mélange a été abandonné à lui-même dans un bain de glace pendant 24 heures. Enfin 10 grammes du même acide ont été soumis pendant quelques minutes à l'ébullition avec leur poids du même alcool.

La 1re	liqueur a donné	21g,8	de phosphate de baryte
La 2e	*id.*	15,0	*id.*
La 3e	*id.*	14,8	*id.*

Ces expériences prouvent qu'en réagissant sur l'alcool, le quart environ de l'acide phosphorique employé se convertit en acide phosphovinique, et que cette transformation qui a lieu à froid n'est pas sensiblement modifiée par l'ébullition du mélange. Elles prouvent également que la décomposition de l'acide phosphovinique est beaucoup plus difficile à opérer que celle de l'acide sulfovinique.

C'est à cette circonstance qu'on doit rapporter la pro-

duction si peu abondante d'éther, lorsqu'on fait réagir l'acide phosphorique sur l'alcool, et non pas, comme on le croyait, à l'inertie de l'acide phosphorique sur ce liquide, puisque, même à la température de la glace fondante, le contact de ces deux corps détermine la formation d'une grande quantité d'acide phosphovinique.

Quelques-uns des faits relatés dans ce Mémoire doivent apporter, si je ne m'abuse, une modification dans la théorie de l'éthérification, telle que l'ont donnée Hennell et Sérullas. Ils sont également en opposition, au moins pour quelques points, avec les vues, d'ailleurs si ingénieuses, de MM. Dumas et Boulay fils, relativement au rôle que joue le gaz oléfiant dans les composés dont il fait partie.

D'après ces deux derniers chimistes, le gaz hydrogène bi-carboné doit être considéré comme possédant véritablement le caractère alcalin, et ses combinaisons doivent être assimilées à celles de l'ammoniaque, avec laquelle son analogie est, pour ainsi dire, parfaite.

Voici d'ailleurs comment ils s'expriment dans leur Mémoire (1) :

« Le sel que nous avons obtenu en traitant l'éther » oxalique par l'ammoniaque, contient 2 vol. d'ammo- » niaque et 2 vol. de gaz hydrogène bi-carboné, qu'il fau- » drait pour compléter l'oxalate neutre d'ammoniaque. » L'hydrogène bi-carboné a donc la même capacité de sa- » turation que l'ammoniaque.

» Dans l'éther hydro-chlorique et hydriodique, 1 vol. » de gaz acide est saturé par 1 vol. de gaz hydrogène bi- » carboné, de même que dans les hydro-chlorate et hy- » driodate neutres d'ammoniaque, l'acide et le base se

(1) *Annales de Chimie et de Physique*, T. XXXVII, p. 42.

» trouvent combinés volume à volume. La capacité de » saturation est encore ici la même.

» Un atome des acides hyponitreux, acétique, ben- » zoïque, oxalique, sature 4 volumes d'ammoniaque. » Or, dans les éthers formés par ces acides, 1 atome de » chacun d'eux sature aussi exactement 4 volumes d'hy- » drogène per-carboné. La capacité de saturation se re- » trouve encore dans cette circonstance.

» Enfin dans les sulfovinates, 1 at. d'acide sulfurique » est exactement saturé par 4 vol. d'hydrogène per-car- » boné, comme il le serait par 4 vol. d'ammoniaque.

» L'ammoniaque et l'hydrogène carboné, en se combi- » nant avec les hydracides, forment des combinaisons » anhydres, et avec les oxacides des sels hydratés ou des » éthers hydratés, c'est-à-dire des combinaisons d'hydro- » gène bi-carboné, d'acide et d'eau, dans lesquels la satu- » ration de l'acide est complète. »

Une discussion aussi approfondie et aussi sévèrement déduite d'un grand nombre de faits ne pouvait manquer d'entraîner la conviction des chimistes, car jamais analogie plus parfaite n'avait été démontrée entre deux corps quelconques; mais quatre ans après la publication du Mémoire de MM. Dumas et Boulay, parut une analyse du sulfovinate de baryte par MM. Wöhler et Liebig (1); analyse dont le résultat conduisit les auteurs à considérer ce sel, non pas comme un sulfate double de baryte et d'éther, mais bien comme un sulfate double de baryte et d'alcool, dont la formule est :

$$2SO^3 + BaO + 2(H^4C^2 + H^2O).$$

(1) *Annales de Chimie et de Physique*, T. XLVII, p. 421.

Partant, l'acide sulfovinique devait être

$$2SO^3 + 2(H^4C^2 + H^2O),$$

c'est-à-dire un bi-sulfate d'alcool.

Cependant la facilité extrême avec laquelle se décomposent les sulfovinates, l'incertitude qui devait toujours rester sur leur état de dessiccation, ne permettaient pas encore d'asseoir irrévocablement une opinion sur la véritable nature des sulfovinates et sur le rôle que joue leur acide dans les phénomènes de l'éthérification.

La grande stabilité des phosphovinates, la haute température à laquelle on peut les soumettre sans les décomposer (ils résistent parfaitement là où le bois, l'amidon, l'acide tartrique brûlent), ne permettent pas de conserver le moindre doute sur la parfaite dessiccation de ces sels; et comme l'analyse présente toujours le gaz hydrogène per-carboné et l'eau dans les rapports qui constituent précisément l'alcool, que deux d'entre eux, celui de plomb et celui de baryte, chauffés à plus de 200° dans le vide ne perdent rien de leur poids et donnent encore après l'application de cette température élevée, les élémens de l'alcool, il devient extrêmement probable, pour ne pas dire certain, que l'alcool existe tout formé dans ces sels.

Si cela est, l'analogie entre le gaz ammoniac et le gaz oléfiant cesse d'être aussi complète qu'elle paraissait l'être d'abord, puisque, pour conserver cette analogie, il faudrait admettre, chose peu vraisemblable, que la même base, l'hydrogène bi-carboné, sature les acides de trois manières différentes : tantôt à l'état anhydre, comme dans les éthers formés par les hydracides; tantôt avec la proportion d'eau qui constitue l'éther sulfurique, comme dans les éthers végétaux; tantôt enfin avec le double de

cette eau dans les sulfovinates et les phosphovinates. Toutefois, l'observation de MM. Dumas et Boulay, que 1 atome d'acide sulfurique, et en général 1 atome d'un acide quelconque (j'en excepte les acides phosphorique et arsénique, dont la saturation suit une loi différente de celle des autres acides) est exactement neutralisé par 4 volumes de gaz oléfiant et par 4 volumes de gaz ammoniac. Cette observation, dis-je, qui est celle à laquelle les chimistes que j'ai cités ont attaché le plus d'importance, loin d'être infirmée par l'analyse des phosphovinates, en a acquis au contraire un nouveau degré de certitude.

Quoi qu'il en soit, relativement à la véritable nature des phosphovinates (et toute discussion à cet égard se réduit à un simple jeu de mots; la seule chose incontestable, c'est qu'un phosphovinate se compose d'un métal, de phosphore, d'oxigène, d'hydrogène et de carbone dans les proportions qui constituent un phosphate neutre et de l'alcool); il s'ensuit naturellement que la théorie de l'éthérification, telle qu'elle est admise aujourd'hui, ne peut être soutenue sans une notable modification.

Cette théorie consiste, comme on sait, à admettre que l'action de l'acide sulfurique sur l'alcool donne lieu à un composé de ce corps et des élémens de l'éther, et que par l'ébullition l'éther quitte l'acide avec lequel il était combiné, devient libre et se dégage. Mais si, d'une part, l'acide sulfovinique est un bi-sulfate d'alcool, comme l'indique l'analyse de MM. Liebig et Wöhler; si, d'une autre part, l'acide phosphovinique a réellement la composition que je lui ai trouvée, il est clair que ces deux acides, avant de produire de l'éther, doivent subir une modification telle, que la moitié de l'eau et de l'alcool qu'ils

renferment se porte sur l'acide sulfurique et sur l'acide phosphorique, tandis qu'ainsi privé de cette eau, l'alcool passe à l'état d'éther.

Si l'acide phosphorique éthérifie moins bien que l'acide sulfurique, ce n'est pas qu'il se combine plus difficilement que ce dernier avec l'alcool, car on a vu la combinaison s'opérer à froid; mais cela tient à ce que l'acide phosphovinique résiste beaucoup plus à la décomposition que l'acide sulfovinique.

On pourrait objecter contre cette théorie que le contact de l'acide sulfurique avec l'éther donne naissance à de l'acide sulfovinique; mais en y réfléchissant, on s'apercevrait bien vite du peu de fondement de cette objection et de la facilité avec laquelle on pourrait la lever.

Les éthers végétaux sont des composés d'éther sulfurique et d'acide, comme le font voir clairement les expériences de MM. Dumas et Boulay. Quand on les met en contact avec des alcalis, on obtient non pas de l'éther, mais bien de l'alcool. Il faut admettre que la même chose se passe ici, c'est-à-dire que l'acide cède son eau à l'éther pour produire de l'alcool qui se combine ensuite avec l'acide sulfurique ou avec l'acide phosphorique; car cela a lieu également avec ce dernier.

En faveur de cette manière de voir, je citerai la difficulté beaucoup plus grande qu'on éprouve à obtenir les acides sulfovinique et phosphovinique avec l'éther qu'avec l'alcool. C'est sans doute que dans ce dernier cas, la combinaison pouvant se faire immédiatement, n'a pas d'entraves à éprouver, tandis qu'avec l'éther il y a une force à vaincre.

Les choses devraient se passer inversement si l'éther même faisait partie de ces acides.

En résumé, les expériences consignées dans ce Mémoire conduisent aux conclusions suivantes :

1° L'acide phosphorique, en réagissant sur l'alcool, donne naissance à un nouveau composé, l'acide phosphovinique, formé de 1 atome d'acide phosphorique et de 2 atomes d'alcool.

2° Cet acide forme avec les différens oxides des sels très stables devant être considérés comme des phosphates sesquibasiques dans lesquels l'alcool entre comme partie constituante, et qui sont formés de 1 atome de phosphate neutre métallique et de 2 atomes d'alcool.

3° La théorie de l'éthérification doit être modifiée de la manière suivante :

Les acides sulfurique et phosphorique en contact avec l'alcool, se combinent directement avec lui, forment un bi-sulfate ou un bi-phosphate d'alcool, qui, soumis à l'action de la chaleur, se décompose en eau, en acide sulfurique ou phosphorique, et en éther.

MÉMOIRE

SUR

LA PARTIE DES COEFFICIENS DES GRANDES INÉGALITÉS DE JUPITER ET DE SATURNE,

QUI DÉPENDENT DU CARRÉ DES FORCES PERTURBATRICES.

MÉMOIRE

SUR

LA PARTIE DES COEFFICIENS

DES GRANDES INÉGALITÉS

DE JUPITER ET DE SATURNE,

QUI DÉPENDENT DU CARRÉ DES FORCES PERTURBATRICES;

PAR M. G. DE PONTÉCOULANT.

(Lu à la séance du 16 février 1829.)

Halley, par la comparaison des observations anciennes aux modernes, reconnut le premier ces singulières irrégularités qui existent dans les mouvemens de Jupiter et de Saturne, et en vertu desquelles le moyen mouvement de la première de ces planètes semble s'accélérer, tandis que celui de la seconde se ralentit. Dès que ce résultat fut connu des géomètres, ils s'empressèrent d'en rechercher la cause; mais la nature l'avait enveloppée d'un voile tellement épais, qu'ils s'épuisèrent long-temps en efforts infructueux pour le soulever. L'Académie des Sciences de

Paris, convaincue de l'importance de cette question dans la théorie du système du monde, en proposa, à trois époques différentes, la solution pour sujet d'un prix, et deux fois Euler, déployant toutes les ressources de son analyse, se présenta pour le disputer. Il n'entre pas dans le sujet que nous traitons, de rendre un compte détaillé des Mémoires que ce grand géomètre présenta au concours en cette occasion, et qui furent tous deux couronnés; nous dirons seulement que quoiqu'ils ne répondissent pas entièrement à la question proposée, ils n'en sont pas moins éminemment remarquables et doivent être mis au rang des plus belles productions de son génie. Ils contiennent les premières recherches que l'on ait faites sur les perturbations des mouvemens planétaires, et l'on y trouve le germe de tous les beaux procédés d'analyse qui font aujourd'hui la base de cette théorie, et qu'Euler abandonna à ses successeurs le soin de développer.

Cependant, malgré tant de brillans travaux, la cause des grandes irrégularités de Jupiter et de Saturne restait encore inconnue, lorsque Laplace en fit à son tour l'objet de ses méditations. Les rapides progrès qu'avait faits la théorie des perturbations planétaires, rendaient alors la recherche de cette cause beaucoup moins pénible; il était surtout difficile qu'elle échappât à ce profond géomètre d'après la direction particulière qu'avait prise son esprit et qui le portait à établir des rapports particuliers entre les mouvemens divers des corps célestes; sorte d'investigation qui fut pour lui une source de brillantes découvertes et qui avait déjà si heureusement réussi à Képler. Une juste prévision, ou peut-être une simple analogie, car il ne faut pas trop exalter non plus les facultés de ces hommes privilégiés par la nature, pour ne pas décourager le reste de l'espèce humaine, lui fit découvrir que les

coefficiens des inégalités de Jupiter et de Saturne donnés par l'observation, satisfaisaient à très peu près à l'équation très simple qui existe entre les variations séculaires des divers élémens de leurs orbites; c'est-à-dire que la somme de ces inégalités multipliées respectivement par la masse et par la racine carrée du grand axe de la planète à laquelle elles se rapportent, est égale à zéro. Il suit de là naturellement que lorsque le mouvement de Jupiter s'accélère, le mouvement de Saturne doit se ralentir, conformément à l'observation de Halley, et réciproquement, lorsque ces inégalités causent une accélération dans le mouvement de Saturne, il en doit résulter un ralentissement dans celui de Jupiter, ce qui s'accorde avec le résultat contraire à celui de Halley, auquel était parvenu Lambert, par la comparaison des observations du siècle dernier à celles de Ticho-Brahé. Une fois sur la voie par cette découverte, il ne restait plus qu'un pas à faire pour atteindre le but, et il était réservé à Laplace de le franchir. En effet, certain que les deux grandes irrégularités de Jupiter et de Saturne ne pouvaient avoir pour cause que leur action mutuelle, assuré d'ailleurs que les moyens mouvemens de ces deux planètes sont invariables, c'est-à-dire qu'ils ne contiennent aucune inégalité indépendante de leur configuration réciproque, il ne pouvait plus douter que le ralentissement et l'accélération observés dans les mouvemens de Jupiter et de Saturne, ne résultassent d'inégalités simplement périodiques, mais d'une période très longue, et qui devenaient sensibles par quelque rapport particulier entre leurs moyens mouvemens. Ils approchent en effet beaucoup d'être commensurables, et cinq fois le moyen mouvement de Saturne est à très peu près égal à deux fois le moyen mouvement de Jupiter. Laplace en conclut que si l'on considère les termes de la fonction per-

turbatrice qui ont pour argument la différence de ces deux quantités multipliée par le temps, il en résultera par la double intégration dans l'expression des variations des moyens mouvemens de Jupiter et de Saturne, des termes qui auront pour diviseurs le carré du très petit coefficient du temps dans l'argument dont ils dépendent, de sorte que ces termes, quoique de l'ordre du cube des excentricités et des inclinaisons, ce qui les avait fait jusque là négliger, pourront acquérir, par cette circonstance, des valeurs considérables.

Ainsi conduit par une suite de raisonnemens rigoureux à l'une des plus brillantes découvertes de l'astronomie théorique, et bien assuré d'avoir enfin trouvé la véritable cause des singulières anomalies observées dans les mouvemens de Jupiter et de Saturne, Laplace s'occupa de calculer les coefficiens de ces inégalités et de déterminer la durée de leur période. Il reconnut par la théorie que cette période, qui est la même à peu près pour les deux planètes, est de 929 ans; que leurs coefficiens sont affectés de signes contraires, en sorte que le moyen mouvement de Jupiter se ralentit quand celui de Saturne s'accélère, et réciproquement, conformément aux résultats que l'observation nous présente : à l'époque actuelle, c'est le mouvement de Jupiter qui se ralentit et celui de Saturne qui s'accélère. Quant à la détermination numérique de ces coefficiens, elle n'offre point de difficultés quand on n'a égard qu'à la première puissance des forces perturbatrices, et au cube des excentricités et des inclinaisons, c'est-à-dire aux parties les plus considérables qui concourent à les former. Mais Laplace reconnut que, dans ce cas particulier, il faut pousser plus loin les approximations, et qu'il est nécessaire de considérer les termes du cinquième ordre par rapport aux excentricités et aux inclinaisons, et ceux

même qui dépendant du carré des forces perturbatrices, sont du troisième ordre relativement à ces deux élémens. Ces deux nouvelles approximations donnent lieu à des opérations très compliquées, à cause du grand nombre de termes qu'elles comprennent; cependant tout ce qui se rapporte à la première puissance des forces perturbatrices est présenté avec soin dans la *Mécanique céleste*, et les opérations numériques exécutées par Burckhardt, ne paraissent avoir besoin que de légères corrections qui n'altèrent pas sensiblement les résultats. Quant à la partie de ces recherches qui se rapporte aux termes du second ordre relativement aux masses, et qui fera spécialement l'objet de ce Mémoire, Laplace se borne à considérer parmi les termes de cet ordre qui dépendent du cube des excentricités et des inclinaisons, et qui acquièrent de très petits diviseurs par l'intégration, ceux qui lui paraissent devoir être les plus sensibles, et il néglige tous les autres. Pour faciliter encore cette opération, il étend aux termes du second ordre, par rapport aux masses, le rapport très simple qui existe entre les termes du premier ordre et au moyen duquel on peut déduire, presque sans calcul, le coefficient de la grande inégalité de Jupiter du coefficient de l'inégalité correspondante de Saturne.

Laplace avait un tact merveilleux pour saisir au milieu de toutes ces inégalités dont la multiplicité forme la principale difficulté de la théorie des mouvemens planétaires, celles qui doivent acquérir des valeurs sensibles et celles qui resteront toujours inappréciables, et l'on verra que dans cette question même où il paraît assez embarrassant de découvrir *à priori* quelles sont parmi des inégalités d'un même ordre et résultant de causes absolument semblables, celles que, pour faciliter le calcul, il est permis de négliger, il ne s'est pas beaucoup écarté de la vérité.

Quelques doutes s'étant élevés dans l'esprit de plusieurs géomètres (1), 1°. sur l'exactitude des termes calculés par l'auteur de la *Mécanique céleste;* 2°. sur la grandeur des termes qu'il s'était permis de négliger; 3°. enfin sur l'extension qu'il avait cru pouvoir donner au rapport qui existe entre les grandes inégalités de Jupiter et de Saturne, lorsqu'on n'a égard qu'à la première puissance des forces perturbatrices, rapport qu'il avait supposé également applicable aux parties de ces inégalités relatives à la seconde puissance de ces forces; il devenait important d'examiner avec attention ces divers points, et l'Académie de Berlin jugea la question assez intéressante pour en faire le sujet du prix qu'elle devait décerner en 1830. Je ne crus pas devoir hésiter à entreprendre les calculs longs et pénibles que cet examen exigeait. J'ai déterminé avec un soin scrupuleux toutes les inégalités du second ordre, relatives à l'argument de la grande inégalité qui affectent les longitudes vraies de Jupiter et de Saturne, et qui m'ont paru pouvoir acquérir une valeur appréciable; car ces inégalités étant, comme on le verra, en nombre infini, il faut nécessairement se borner aux plus considérables. J'ai reconnu ainsi, que les inégalités calculées par Laplace dans la *Mécanique céleste* sont en effet les plus sensibles, mais j'ai reconnu en même temps que ces inégalités avaient été prises avec des signes contraires, et il est remarquable que cette erreur, en effet, était la seule qui pût échapper aux vérifications que Laplace faisait subir aux résultats des opérations numériques dont il avait confié le détail

(1) M. Plana, *Mémoires de la Société astronomique de Londres*, pour 1826. — Voir deux *Mémoires* du même auteur, lus à l'Académie de Turin, en 1828 et 1829. — *Mémoire* de M. Poisson, *Connaissance des Tems* pour 1831.

à MM. Bouvard et Burckhardt. Il faudra donc changer les signes des valeurs numériques relatives à ces inégalités rapportées pages 130 et 140 du 3e vol. de la *Mécanique céleste;* on verra aussi que parmi les inégalités nouvelles que nous avons déterminées il en est plusieurs qu'il n'était pas permis de négliger.

Quant à la relation qui doit exister entre les inégalités dépendantes du carré de la force perturbatrice de deux planètes m et m' soumises à leur action mutuelle, Laplace a reconnu lui-même qu'il avait à tort étendu à ces quantités le rapport qui existe entre les inégalités du premier ordre (1), et en considérant avec plus d'attention les formules de cette théorie, il fut conduit à la véritable relation qui lie entre elles les inégalités du second ordre, et qui permet de les déduire les unes des autres, ce qui abrége les calculs, ou de vérifier leurs valeurs quand on les a déterminées séparément, avantage précieux dans des opérations numériques aussi longues et aussi compliquées. Au reste, ce nouveau rapport diffère peu de celui qu'avait d'abord employé l'auteur de la *Mécanique céleste*, et il n'a pu provenir de cette cause, par conséquent, dans les résultats de cet ouvrage que des erreurs insensibles.

Il se pourrait que les corrections que, d'après ce que nous venons de dire, il sera nécessaire de faire subir aux valeurs numériques rapportées dans la *Mécanique céleste*, introduisissent quelques différences notables dans les tables de Jupiter et de Saturne calculées par M. Bouvard, d'après la théorie de Laplace, et l'on a pensé même que les équations de condition qui leur servent de base, pourraient être assez altérées pour que les corrections des

(1) *Connaissance des Tems* pour 1829.

masses des deux planètes, qui entrent comme inconnues dans ces équations, fussent fort différentes de celles que cet astronome en a déduites, et donnassent, par exemple, à la masse de Jupiter, une valeur beaucoup plus approchée de celle qu'on a récemment déduite du calcul des perturbations des petites planètes, et des nouvelles observations des élongations de son quatrième satellite. Il est donc à désirer que le travail fondamental des tables de M. Bouvard soit repris en entier, l'accord des résultats déduits des phénomènes célestes qui paraissent avoir le moins d'analogie entre eux, étant la véritable pierre de touche de la théorie du système du monde. Par là disparaîtront certainement ces anomalies qui ont fait croire, bien à tort sans doute, à quelques géomètres, que le pouvoir attractif de Jupiter, qui est le même sur ses satellites, sur les petites planètes et sur les comètes, malgré la différence de leur nature, exerçait une action particulière sur la matière de Saturne. Enfin, nous obtiendrons ainsi dans tous les cas une valeur plus exacte de la masse de cette dernière planète, qu'on n'a pu encore déterminer que par les effets de son action sur Jupiter, à cause de la difficulté d'observer les élongations de ses satellites, et qui, par conséquent, est encore très imparfaitement connue. C'est l'espoir de donner plus de confiance à ceux qui voudront s'occuper de ces importantes recherches, qui nous a engagé à publier, avec les minutieux détails qu'il contient, le Mémoire suivant, dont nous avions déjà donné ailleurs les principaux résultats (1).

---

(1) *Connaissance des Tems* pour 1833.

TABLEAU I

Contenant les valeurs numériques et logarithmiques des principales quantités employées dans les calculs suivans.

Nous désignons par m, nt, a, e, ω, la masse, le moyen mouvement, le demi-grand axe, l'excentricité et la longitude du périhélie de Jupiter, et par les mêmes lettres accentuées, les quantités analogues qui se rapportent à Saturne. γ est la tangente de l'inclinaison mutuelle des deux orbites, et Π la longitude du nœud ascendant de l'orbite de m sur l'orbite de m' comptée de la même origine que la longitude $nt + \varepsilon$ de la planète m. Nous supposerons, d'après les Tables de Bouvard,

$$m = \frac{1}{1070,5},\ \log m = 6,9704133,\quad m' = \frac{1}{3512},\ \log m' = 6.4544455,$$

d'après les résultats de la *Mécanique céleste*, livre VI, pour l'époque de 1750 :

$n = 337212''.094$ décim.	$109256'',7$ sex.
$n' = 135790''.515$	$43996'',1$
$a = 5,20116636$	$\log a = 0,7161007$
$a' = 9.53787090$	$\log a' = 0.9794514$
$e = 0.0480767$	$\log e = 8.6819347$
$e' = 0.0562246$	$\log e' = 8.7499264$
$\gamma = \text{tang } 1°15'30''$ sex.	$\log \gamma = 8.3417429$
$\omega = 11°,5012$ décim.	$10°21'3'',3$ sex.
$\omega' = 97°,9466$	$88°\ 9'6'',7$
$\Pi = 139°,7142$	$125°29'8'',6.$

Les quantités suivantes sont tirées du 3e volume de la *Mécanique céleste* (pages 81 et 83), ou conclues des for-

mules données dans le n° 49 du livre II du même ouvrage.

$$\log \alpha = 9.7366493,$$

$$\log b_{\frac{1}{2}}^{(0)} = 0.3385032, \quad \log b_{\frac{1}{2}}^{(1)} = 9.7928402, \quad \log b_{\frac{1}{2}}^{(2)} = 9.4110097,$$

$$\log b_{\frac{1}{2}}^{(3)} = 9.0717902, \quad \log b_{\frac{1}{2}}^{(4)} = 8.7524495,$$

$$\log \alpha \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha} = 9.6444851, \quad \log \alpha \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha} = 9.9078356, \quad \log \alpha \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha} = 9.7800748,$$

$$\log \alpha \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha} = 9.5979148, \quad \log \alpha \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{d\alpha} = 9.3930207,$$

$$\log \alpha^2 \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha^2} = 9.9319720, \quad \log \alpha^2 \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha^2} = 9.8803134, \quad \log \alpha^2 \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha^2} = 0.0199726,$$

$$\log \alpha^2 \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha^2} = 0.0215186, \quad \log \alpha^2 \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{d\alpha^2} = 9.9497917,$$

$$\log \alpha^3 \frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha^3} = 0.2937608, \quad \log \alpha^3 \frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha^3} = 0.3198234, \quad \log \alpha^3 \frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha^3} = 0.3182440,$$

$$\log \alpha^3 \frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha^3} = 0.3989205, \quad \log \alpha^3 \frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{d\alpha^3} = 0.4418798,$$

$$\log \alpha^4 \frac{d^4 b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha^4} = 0.9001725,$$

$$\log b_{\frac{3}{2}}^{(1)} = 0.5031766, \quad \log b_{\frac{3}{2}}^{(2)} = 0.3185079,$$

$$\log \alpha \frac{db_{\frac{3}{2}}^{(1)}}{d\alpha} = 0.9196246, \quad \log \alpha \frac{db_{\frac{3}{2}}^{(2)}}{d\alpha} = 0.8642723,$$

$$\log \alpha^2 \frac{d^2 b_{\frac{3}{2}}^{(1)}}{d\alpha^2} = 1.4506426, \quad \log \alpha^2 \frac{d^2 b_{\frac{3}{2}}^{(2)}}{d\alpha^2} = 1.4426811.$$

Pour déduire de ces valeurs celles des quantités représentées dans la *Mécanique céleste*, par $A^{(0)}$, $A^{(1)}$, etc.,

$B^{(i)}$, $B^{(i)}$, etc., ainsi que les valeurs de leurs différences successives, on remarquera qu'on a, en général, i étant un nombre entier quelconque différent de l'unité

$$A^{(i)} = -\frac{1}{a'} b^{(i)}_{\frac{1}{2}}, \qquad B^{(i)} = \frac{1}{a'^3} b^{(i)}_{\frac{3}{2}},$$

$$a^m \frac{d^m A^{(i)}}{da^m} = -\frac{1}{a'} \cdot \alpha^m \frac{d^m b^{(i)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^m}, \quad a^m \frac{d^m B^{(i)}}{da^m} = \frac{1}{a'^3} \cdot \alpha^m \frac{d^m b^{(i)}_{\frac{3}{2}}}{d\alpha^m}.$$

Dans le cas particulier de $i = 1$, on a

$$A^{(i)} = \frac{a}{a'^2} - \frac{1}{a'} \cdot b^{(i)}_{\frac{1}{2}}, \quad a \frac{dA^{(i)}}{da} = \frac{1}{a'}\left(\alpha - \alpha \frac{db^{(i)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha}\right).$$

Les différences suivantes de $A^{(i)}$, ainsi que les valeurs de $B^{(i)}$, $\frac{dB^{(i)}}{da}$, etc., conservent la même forme que dans le cas où i est un nombre différent de l'unité.

Au moyen des valeurs précédentes, on conclura aisément les suivantes qui nous seront utiles dans la suite

$$5n' - 2n = 4528''.387 \text{ déc.} = 1467''.197 \text{ sexag.},$$

$$\log \frac{3\alpha nm'}{\sin 1''.(5n' - 2n)^2} = 0.6881121, \quad \log \frac{3n'm}{\sin 1''.(5n' - 2n)} = 1.0725999,$$

$$\log \frac{2m'^2\alpha^2 n^2}{\sin 1''.(5n' - 2n)^2} = 1.7415638, \quad \log \frac{4m'^2 n^2 \alpha^2}{\sin 1''.(5n' - 2n)^2} = 2.0425936,$$

$$\log \frac{10mm'nn'\alpha}{\sin 1''.(5n' - 2n)^2} = 2.8248205, \quad \log \frac{10m^2 n'^2}{\sin 1''.(5n' - 2n)^2} = 3.2091033.$$

§ I^er.

Formules qui déterminent les parties des moyens mouvemens de Jupiter et de Saturne dépendantes du carré des forces perturbatrices.

---

1. Soient a le demi-grand axe, et nt le moyen mouvement au bout du temps t de Jupiter dans son orbite elliptique, nommons ζ ce que devient ce moyen mouvement lorsqu'on a égard aux perturbations qu'éprouve Jupiter par l'action de Saturne, et soit R la fonction qui exprime l'effet de cette force perturbatrice. Désignons de même par a', n', ζ', et R′ ce que deviennent les quantités a, n, ζ, R, relativement à cette seconde planète troublée par la première. On aura

$$\left.\begin{aligned} \zeta &= 3an\int dt\int d\mathrm{R} \\ \zeta' &= 3a'n'\int dt\int d'\mathrm{R}'. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Les différentielles dR et d'R′ se rapportant uniquement, dans chaque cas, aux coordonnées de la planète troublée, et devant être prises, par conséquent, relativement au temps t introduit par la substitution des valeurs de ces coordonnées.

Si dans la détermination des valeurs de ζ et de ζ', on veut avoir égard au carré des forces perturbatrices, en désignant par la caractéristique δ les termes qui en dépendent dans chacune des quantités ζ, R, ζ', R′, on aura

$$\left.\begin{aligned} \delta\zeta &= 3an\int dt\int d.\delta\mathrm{R} + \tfrac{3}{4}\, a^2n\int dt\,(\int d\mathrm{R})^2 \\ \delta\zeta' &= 3a'n'\int dt\int d'.\delta\mathrm{R}' + \tfrac{3}{2}\, a'^2n'\int dt\,(\int d'\mathrm{R}')^2. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Les valeurs de R et de R′ peuvent être regardées comme des fonctions données des coordonnées de la planète troublée et de la planète perturbatrice, si l'on désigne donc par r, v, s, le rayon vecteur, la longitude et la latitude de Jupiter dans son orbite elliptique, par δr, δv, δs, les parties de ces trois coordonnées dues à l'action perturbatrice de Saturne, et par les mêmes lettres accentuées, les quantités analogues relatives à la seconde planète troublée par la première, on aura pour déterminer δR et δR′, les deux équations suivantes

$$\left.\begin{aligned}\delta R &= \frac{dR}{dr}.\delta r + \frac{dR}{dv}.\delta v + \frac{dR}{ds}.\delta s + \frac{dR}{dr'}.\delta r' + \frac{dR}{dv'}.\delta v' + \frac{dR}{ds'}.\delta s'.\\ \delta R' &= \frac{dR'}{dr}.\delta r + \frac{dR'}{dv}.\delta v + \frac{dR'}{ds}.\delta s + \frac{dR'}{dr'}.\delta r' + \frac{dR'}{dv'}.\delta v' + \frac{dR'}{ds'}.\delta s'.\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Si l'on substitue dans R et R′ à la place des coordonnées elliptiques de la planète troublée et de la planète perturbatrice, leurs valeurs en fonction du temps et des élémens de leurs orbites, ces deux quantités se trouveront exprimées de la même manière, et pour avoir leurs différentielles relativement aux coordonnées r, v, s, r', etc., on observera d'abord qu'aux quantités près du second ordre relativement aux forces perturbatrices, on a (*Méc. cél.*, n° 48, livre II[e])

$$r\left(\frac{dR}{dr}\right) = a\left(\frac{dR}{da}\right); \quad r'\left(\frac{dR}{dr'}\right) = a'\left(\frac{dR}{da'}\right).$$

Si l'on désigne à l'ordinaire par ε la longitude de l'époque, et par ω la longitude du périhélie de l'orbite de Jupiter, on aura la différentielle de la même fonction, relativement à v en la différentiant par rapport à ε, sans faire varier $\varepsilon - \omega$, parce que ce dernier angle est in-

troduit, soit par le rayon vecteur r, soit par la partie périodique de l'expression elliptique de v. (*Méc. cél.*, n° 48, livre II^e^.) Il en est de même de la différentielle de R relativement à v'.

On formerait de la même manière les différences de la fonction R′, soit relativement aux coordonnées r, v, de la planète m, soit aux coordonnées r', v', de la planète m'.

Enfin, pour éviter des calculs inutiles nous négligerons tout-à-fait dans δR et $\delta R'$ les termes $\frac{dR}{ds}\delta s$, $\frac{dR}{ds'}\delta s'$, etc., parce qu'ils seraient de l'ordre des produits des excentricités par le carré de l'inclinaison mutuelle des orbites, et que ces termes sont à peu près insensibles dans la théorie de Jupiter et Saturne.

2. Cela posé, nous nous proposons de considérer ici parmi les termes des valeurs de $\delta\zeta$ et de $\delta\zeta'$ ceux qui, dépendans de l'argument $5n't - 2nt$, ne sont que du troisième ordre, par rapport aux excentricités et aux inclinaisons, c'est-à-dire de l'ordre le moins élevé qu'ils puissent être à cet égard, et qui, après la double intégration, acquièrent pour diviseur $(5n' - 2n)^2$. Pour obtenir ces termes, faisons d'abord abstraction du dernier terme de chacune des formules (2), et observons que les valeurs des quantités δR et $\delta R'$ sont formées des produits d'une différence partielle des fonctions R et R′, et d'une inégalité de l'ordre des forces perturbatrices indiquée par la caractéristique δ. Il faudra donc combiner entre eux les différens termes de ces deux facteurs, de manière que la somme des exposans des excentricités et des inclinaisons dans ces termes, ne surpasse pas trois, et que la somme ou la différence dss argumens relatifs aux termes que l'on a considérés, soit égale à $5n't - 2nt$; c'est-à-dire, que si l'on désigne par μt l'argument du terme que l'on

veut employer dans l'un des facteurs, et par $\mu' t$ l'argument du terme que l'on considérera dans l'autre, et que pour fixer les idées on suppose que $n't$ soit toujours précédé du signe + dans μt et dans $\mu' t$, il faudra qu'on ait

$$\mu + \mu' = 5n' - 2n \quad \text{ou} \quad \mu - \mu' = 5n' - 2n.$$

Or, d'après les lois connues de la formation des fonctions R et R′, et des perturbations du rayon vecteur, de la longitude et de la latitude, il est aisé de voir que les valeurs de μ et de μ' qui satisferont à la première condition, seront

$\mu = 0$	et	$\mu' = 5n' - 2n,$
$\mu = n'$		$\mu' = 4n' - 2n,$
$\mu = 2n'$		$\mu' = 3n' - 2n,$
$\mu = 3n'$		$\mu' = 2n' - 2n,$
$\mu = n' - n$		$\mu' = 4n' - n,$
$\mu = 3n' - n$		$\mu' = 2n' - n.$

Ces combinaisons sont au nombre de six, mais elles en fourniront douze, parce qu'on peut changer dans chacune d'elles μ en μ', et réciproquement.

Quant aux valeurs de μ et de μ' qui satisfont à la seconde condition, elles sont en nombre infini, et l'on peut les comprendre sous ces quatre formes générales

$\mu = 5n' - 2n + i(n' - n)$	et	$\mu' = i(n' - n),$
$\mu = 5n' - 3n + i(n' - n)$		$\mu' = i(n' - n) - n,$
$\mu = 5n' - 4n + i(n' - n)$	et	$\mu' = i(n' - n) - 2n,$
$\mu = 5n' - 5n + i(n' - n)$		$\mu' = i(n' - n) - 3n.$

i étant un nombre entier et positif quelconque.

Ces combinaisons sont doubles comme les précédentes, parce qu'on peut permuter entre elles les lettres μ et μ'.

On voit d'après cela qu'il serait impossible de calculer rigoureusement les valeurs de $\delta\zeta$ et de $\delta\zeta'$, qui proviennent

de cette seconde espèce de termes, les inégalités qui en résulteront seront généralement exprimées par des suites infinies comme celles du rayon vecteur, de la longitude et de la latitude, et de même les différens termes de ces suites décroissant avec beaucoup de rapidité, il suffira de tenir compte de ceux qu'on jugera devoir être les plus considérables : c'est ce que nous avons fait ici.

Quant aux inégalités de $\delta\zeta$ et de $\delta\zeta'$, qui résultent des douze premières combinaisons, nous en présenterons le calcul avec détail, et l'on verra que parmi les termes que l'on avait jusqu'ici négligés, il y en a qui peuvent acquérir des valeurs sensibles, et dont la précision actuelle des tables astronomiques exigeait de tenir compte.

Considérons maintenant la seconde partie des formules (2). Il est évident que les seuls termes qui, après la double intégration, auront la très petite quantité $(5n' - 2n)^2$ pour diviseur, sont ceux qui, dans les intégrales $(fd\mathrm{R})^2$, $(fd'\mathrm{R}')^2$, sont déjà divisés par $5n' - 2n$; en nous bornant donc au calcul de ces termes, il faudra, pour les obtenir, combiner la partie constante des intégrales $fd\mathrm{R}$ et $fd'\mathrm{R}'$, avec la partie de ces intégrales qui dépend de l'argument $5n't - 2nt$. Ce calcul, comme on le verra, n'offre aucune difficulté, et en joignant les inégalités qui en résulteront aux précédentes, on aura les valeurs complètes des différentes parties des moyens mouvemens de Jupiter et de Saturne, dépendantes du carré des forces perturbatrices, des cubes des excentricités et des inclinaisons, et qui ont $(5n' - 2n)^2$ pour diviseur.

Voici le détail des opérations numériques que nous avons effectuées pour obtenir ces résultats.

Calcul des valeurs de $\delta\zeta$ et $\delta\zeta'$ qui résultent de la combinaison des argumens 0 *et* $5n't - 2nt$.

3. La première des formules (2) donne généralement

$$\delta\zeta = 3an \int dt \int d.\delta R + \frac{3a^2n}{2} \int dt \, (\int dR)^2. \qquad (A)$$

En supposant, pour abréger,

$$\delta R = \frac{dR}{dr}.\delta r + \frac{dR}{dv}.\delta v + \frac{dR}{ds}.\delta s + \frac{dR}{dr'}.\delta r' + \frac{dR}{dv'}.\delta v' + \frac{dR}{ds'}.\delta s'.$$

Occupons-nous d'abord du premier terme de la formule précédente.

En ne considérant dans le développement de R que les termes indépendans des excentricités, on a $R = \frac{m'}{2} A^{(0)}$, on aura donc dans ce cas

$$\delta R = \frac{m'}{2} \cdot \frac{dA^{(0)}}{da} . \delta r + \frac{m'}{2} \cdot \frac{dA^{(0)}}{da'} . \delta r'.$$

En différentiant cette valeur par rapport à δr, sans faire varier $\delta r'$, on trouve

$$\frac{d.\delta R}{dt} = \frac{m'}{2} \cdot \frac{dA^{(0)}}{da} \cdot \frac{d.\delta r}{dt}.$$

Si l'on considère simplement dans δr les termes du troisième ordre par rapport aux excentricités qui ont cette forme

$$\frac{\delta r}{a} = F \cos(5n't - 2nt - f) \quad (*).$$

(*) Nous omettons, pour abréger les formules, dans cette valeur et dans la suite de ce Mémoire, les constantes ε' ε, et dont la première accompagne tou-

L'expression précédente donnera

$$\frac{a'.d.\delta R}{dt} = -\frac{m'(5n'-2n)}{2}.aa'\frac{dA^{(0)}}{da}.F\sin(5n't-2nt-f);$$

et l'on aura le terme correspondant de $\delta\zeta$, en multipliant cette valeur par $-\frac{3an}{(5n'-2n)^2.\sin 1''}$.

Cela posé, on a, d'après les valeurs renfermées dans le tableau I,

$$\log(5n'-2n) = 3.1664886, \quad \log aa'\frac{dA^{(0)}}{da} = 9.6444846 - (*).$$

On trouve, *Mécanique céleste*, tome III^e^, page 132,

$$aF = -0.000304273\text{3}, \quad f = 12°8'48''.$$

En multipliant la première de ces valeurs par $\frac{3359.40}{3512}$, pour y introduire la correction résultante de la nouvelle masse adoptée pour Saturne, on aura

$$\log F = 5.7478703 -, \quad \sin f = 9.3230764, \quad \cos f = 9.9901666.$$

L'expression de $\frac{a'd.\delta R}{m'dt}$ réduite en nombres au moyen de ces valeurs, devient

$$\frac{a'd.\delta R}{m'.dt} = -0.017692.\sin(5n't-2nt) + 0.0038080\cos(5n't-2nt),$$

d'où il résulte, en multipliant par $-\frac{3anm'}{\sin 1''(5n'-2n)^2}$, ou

---

jours l'angle $n't$, et la seconde doit être ajoutée à l'angle nt : il sera facile de réparer cette omission en substituant dans tous les résultats $n't+\varepsilon'$ et $nt+\varepsilon$ à la place de $n't$ et de nt.

(*) Le signe —, placé derrière un logarithme, signifiera que le nombre auquel il appartient doit être pris négativement.

par le nombre, dont le logarithme est 0.6881121,

$$\delta\zeta = 0''.086278 \sin(5n't - 2nt) - 0''.018570 \cos(5n't - 2nt). \quad (1)$$

Supposons réciproquement

$$R = m'P \sin(5n't - 2nt) + m'P' \cos(5n't - 2nt).$$

Il faudra dans δR combiner avec cette valeur de R, celles qui proviennent des parties constantes de $\frac{\delta r}{a}$ et de $\frac{\delta r'}{a'}$; nommons F et F' ces parties, en sorte qu'on ait

$$\frac{\delta r}{a} = F, \quad \frac{\delta r'}{a'} = F',$$

on aura

$$\delta R = m'.\left(a\frac{dP}{da}.F + a'\frac{dP}{da'}.F'\right)\sin(5n't - 2nt) + m'.\left(a\frac{dP'}{da}F + a'\frac{dP'}{da'}F'\right)\cos(5n't - 2nt);$$

d'où, en différentiant par rapport à nt, en regardant $n't$ comme constant, on tire

$$\frac{a'd.\delta R}{dt} = -2m'n.\left(aa'\frac{dP}{da}.F + a'^2\frac{dP}{da'}.F'\right).\cos(5n't - 2nt) + 2m'n.\left(aa'\frac{dP'}{da}.F + a'^2\frac{dP'}{da'}.F'\right).\sin(5n't - 2nt).$$

Pour réduire cette expression en nombres, j'observe que l'on a (*Mécan. céleste*, tome III^e^, pages 121, 124 et 135)

$$\log aa'\frac{dP}{da} = 7.0351998 -, \qquad \log aa'\frac{dP'}{da'} = 7.5422903 -,$$
$$\log a'^2\frac{dP}{da'} = 6.9890724 +, \qquad \log a'^2\frac{dP'}{da'} = 7.6540509 +,$$
$$\delta r = -0.0000620586, \qquad \delta r' = +0.0039077763.$$

De ces deux dernières valeurs, en appliquant les cor-

rections des masses de Jupiter et de Saturne, on tire

$$\log F = 5.057404_2 -, \qquad \log F' - 6.611093_1 +,$$

d'où l'on conclura

$$\frac{a'd.\delta R}{dt} = + m'.0.41106\sin(5n't = 2nt) - m'.0.089730\cos(5n't - 2nt),$$

et par suite, en multipliant les deux termes par.... $-\frac{3an}{(5n'-2n)^2.\sin 1''}$,

$$\delta\zeta = - 2''.00454\sin(5n't - 2nt) + 0''.43757\cos(5n't - 2nt). \quad (2)$$

Considérons maintenant la seconde partie de la formule (A). Il est évident que les seuls termes qui, après la double intégration acquièrent la très petite quantité $(5n' - 2n)^2$ pour diviseur, sont ceux qui, dans l'intégrale $(\int dR)^2$, sont déjà divisés par $5n' - 2n$, en nous bornant donc à considérer ces termes, les seuls qu'il s'agisse ici de calculer, faisons comme précédemment

$$R = m'P\sin(5n't - 2nt) + m'P'\cos(5n't - 2nt),$$

d'où en différentiant par rapport à nt, et en intégrant ensuite

$$\int dR = m'g - \frac{2m'n}{5n'-2n}.[P\sin(5n't - 2nt) + P'\cos(5n't - 2nt)],$$

g étant une constante arbitraire.

En n'ayant donc égard qu'aux termes dépendans de l'argument $5n't - 2nt$, on aura

$$(\int dR)^2 = - \frac{4m'^2ng}{5n'-2n}.[P\sin(5n't - 2nt) + P'\cos(5n't - 2nt)],$$

et par suite

$$\delta\zeta = - \frac{6m'^2a^2n^2g}{(5n'-2n)^3}.[P'\sin(5n't - 2nt) - P\cos(5n't - 2nt)].$$

D'après les notations adoptées dans la *Mécanique céleste*, on a

$$g = -\frac{1}{3}\, a\, \frac{dA^{(0)}}{da}.$$

On trouve, tome III^e^, page 124 du même ouvrage,

$$\log a'P = 6.03863o6 + \qquad \log a'P' = 7.0099176 -.$$

On a d'ailleurs, par ce qui précède,

$$\log aa'\, \frac{dA^{(0)}}{da} = 9.6444846 -,$$

et l'on trouve, au moyen des valeurs de m', n, α, rapportées au tableau I,

$$\log \frac{2m'^2\alpha^3 n^2}{\sin 1''.(5n' - 2n)^2} = 1.7415638;$$

d'où l'on conclura

$$\delta\zeta = o''.024886 \sin(5n't - 2n't) + o''.0026587 \cos(5n't - 2nt). \quad (3)$$

Si l'on réunit les trois équations (1), (2), (3), on aura, pour la valeur de $\delta\zeta$, résultante de la combinaison des argumens o et $5n't - 2nt$,

$$\delta\zeta = -1''.893376 \sin(5n't - 2nt) + o''.42166 \cos(5n't - 2nt). \quad (a)$$

4. Déterminons la valeur de $\delta\zeta'$ correspondante à celle de $\delta\zeta$ que nous venons de calculer. L'expression de $\delta\zeta'$ est de cette forme

$$\delta\zeta' = 3a'n' \int dt \int d'.\delta' R' + \frac{3a'^2 n'}{2}.\int dt (\int d' R')^2. \quad (B)$$

En supposant pour abréger

$$\delta R = \frac{dR'}{dr}.\delta r + \frac{dR'}{dv}.\delta v + \frac{dR'}{ds}.\delta s + \frac{dR'}{dr'}\,\delta r' + \frac{dR'}{dv'}.\delta v' + \frac{dR'}{ds'}.\delta s'.$$

Nous nous occuperons d'abord du premier terme de la valeur de $\delta\zeta'$.

Si l'on ne considère dans la valeur de R′ que les termes indépendans des excentricités, on a $R' = \frac{m}{2} A^{(0)}$, on aura donc simplement alors

$$\delta R' = \frac{m}{2}.\frac{dA^{(0)}}{da}.\delta r + \frac{m}{2}.\frac{dA^{(0)}}{da'}.\delta r',$$

d'où en différentiant par rapport à $\delta r'$, on tire

$$\frac{a'.d'.\delta R'}{dt} = \frac{m}{2}.a'\frac{dA^{(0)}}{da'}.\frac{d.\delta r'}{dt}.$$

Supposons

$$\frac{\delta r'}{a'} = F' \cos(5n't - 2nt + f'),$$

on aura

$$\frac{a'.d'.\delta R'}{dt} = -\frac{m(5n' - 2n)}{2}.a'^2\frac{dA^{(0)}}{da'}.F' \sin(5n't - 2nt + f').$$

La valeur de $a'^2\frac{dA^{(0)}}{da'}$ est donnée par la formule

$$a'^2\frac{dA^{(0)}}{da'} = -a'A^{(0)} - aa'\frac{dA^{(0)}}{da},$$

d'où l'on conclut

$$a'^2\frac{dA^{(0)}}{da'} = +2.180235 + 0.441047 = 2.621282.$$

On trouve, *Mécanique céleste*, tome III^e^, page 142,

$$\delta r' = 0.00351994\overline{6}, \quad f' = 13^\circ\,1'\,5o''.$$

En multipliant la première de ces valeurs par $\frac{1067.09}{1070.5}$,

en vertu de la correction que l'on a fait subir à la masse de Jupiter, et en la divisant ensuite par a', on en tire

$$\log F' = 6.5657007,$$ on a d'ailleurs, $\sin f' \ldots 9.3530900$, $\cos f \ldots 9.9886700$.

Au moyen de ces valeurs, on trouve

$$\frac{a'd'.\delta R}{dt} = -0.68889\sin(5n't - 2nt) - 0.15943\cos(5n't - 2nt).$$

Si l'on substitue cette valeur dans la formule (B), ou ce qui revient au même, si l'on multiplie chaque terme par la fonction $\frac{-3mn'}{\sin 1''.(5n'-2n)^2}$, en observant qu'on a

$$\log \frac{3mn'}{\sin 1''.(5n'-2n)^2} = 1.0725999,$$

on trouvera

$$\delta\zeta' = +8''.14230\sin(5n't - 2nt) + 1''.88438\cos(5n't - 2nt). \quad (4)$$

Réciproquement, soit

$$R' = mP\sin(5n't - 2nt) + mP'\cos(5n't - 2nt);$$

et supposons, comme dans le n° 3,

$$\frac{\delta r}{a} = F; \quad \frac{\delta r'}{a'} = F',$$

on trouvera

$$\delta R' = m\left(a\frac{dP}{da}.F + a'\frac{dP}{da'}.F'\right)\sin(5n't - 2nt) + m\left(a\frac{dP'}{da}.F + a'\frac{dP'}{da'}.F'\right)\cos(5n't - 2nt).$$

En différentiant par rapport à $n't$ cette valeur, on aura

$$\frac{a'.d'.\delta R'}{dt} = 5mn'.\left(aa'\frac{dP}{da}.F + a'^2\frac{dP}{da'}.F'\right).\cos(5n't - 2nt), - 5mn'.\left(aa'\frac{dP'}{da}.F + a'^2\frac{dP'}{da'}.F'\right).\sin(5n't - 2nt).$$

Les quantités P, P′, F, F′, ayant ici les mêmes valeurs que celles que nous avons désignées par les mêmes lettres dans le n° 3, il est évident qu'on aura la valeur de $\frac{a'.d'.\delta R'}{dt}$, en multipliant par $-\frac{5mn'}{2m'n}$ celle de $\frac{a'.d.\delta R}{dt}$, trouvée au n° cité, on aura ainsi

$$\frac{a'.d'.\delta R'}{mdt} = -\,0.41382\sin(5n't - 2nt) + 0.090333\cos(5n't - 2nt);$$

d'où, en multipliant par $-\frac{3m^2n'}{\sin 1''.(5n'-2n)^2}$, on conclura

$$\delta\zeta' = 4''.89114\sin(5n't - 2nt) - 1''.06769\cos(5n't - 2nt). \quad (5)$$

Si l'on considère la seconde partie de la formule (B), et qu'on suppose

$$R' = mP\sin(5n't - 2nt) + mP'\cos(5n't - 2nt).$$

En différentiant par rapport à $n't$, et en intégrant ensuite, on aura

$$\int d'R' = mg' + \frac{5mn'}{5n'-2n}.[P\sin(5n't - 2nt) + P'\cos(5n't - 2nt)],$$

g' étant une constante arbitraire.

Par conséquent,

$$(\int d'R')^2 = \frac{10m^2n'g'}{5n'-2n}.[P\sin(5n't - 2nt) + P'\cos(5n't - 2nt)].$$

Cette valeur produit dans l'expression de $\delta\zeta'$ le terme suivant

$$\delta\zeta' = \frac{15m^2a'^2n'^2g'}{(5n'-2n)^2}.[P'\sin(5n't - 2nt) - P\cos(5n't - 2nt].$$

Les quantités désignées par P et P′, conservant les

mêmes valeurs relativement à Jupiter et à Saturne, en comparant l'expression précédente à celle de $\delta\zeta$, n° 3, on voit qu'on aura immédiatement $\delta\zeta'$, en multipliant les deux termes de $\delta\zeta$ par la fraction $-\frac{15m^2n'^2g'}{6m'^2\alpha^2n^2g}$, or, on a $g' = -\frac{1}{3}a'\frac{dA^{(0)}}{da'}$; on a d'ailleurs, par ce qui précède, $a'^2\frac{dA^{(0)}}{da'} = +2.621282$, d'où il est aisé de conclure

$$\log\frac{15m^2n'^2g'}{6m'^2\alpha^2n^2g} = 1.9405348,$$

et par suite

$$\delta\zeta' = +2''.17020\sin(5n't - 2nt) + 0''.23185\cos(5n't - 2nt). \quad (6)$$

En réunissant les trois équations (4), (5), (6), on aura, pour la valeur de $\delta\zeta'$, résultante de la combinaison des argumens, o et $5n't - 2nt$

$$\delta\zeta' = 15''.20364\sin(5n't - 2nt) + 1''.04854\cos(5n't - 2nt). \quad (a')$$

Calcul des termes de $\delta\zeta$ et de $\delta\zeta'$ qui résultent de la combinaison des argumens n't *et* 4n't — 2nt.

5. Le dernier terme de chacune des formules (2), ne saurait produire, dans les valeurs de $\delta\zeta$ et de $\delta\zeta'$, aucun terme de l'espèce de ceux que nous considérons lorsque l'on fait abstraction de la combinaison des argumens o et $5n't - 2nt$; il nous suffira donc de supposer désormais

$$\delta\zeta = 3an\int dt\int d.\delta R,$$
$$\delta\zeta' = 3a'n'\int dt\int d'.\delta R'.$$

Occupons-nous d'abord de la valeur de $\delta\zeta$. Si l'on considère dans le développement de R les termes dépendans

de l'argument $4n't - 2nt$, on aura

$$\begin{aligned} R = {} & M^{(0)}e'^2\cos(4n't - 2nt - 2\omega') + M^{(1)}ee'\cos(4n't - 2nt - \omega - \omega') \\ & + M^{(2)}e^2\cos(4n't - 2nt - 2\omega) + M^{(3)}\gamma^2\cos(4n't - 2nt - 2\Pi). \end{aligned}$$

La formule (3) donnera, en vertu de ces termes,

$$\begin{aligned} \delta R = {} & (\delta\nu - \delta\nu')\cdot[2M^{(0)}e'^2\sin(4n't - 2nt - 2\omega' + 3M^{(1)}ee'\sin(4n't - 2nt - \omega \quad \omega') \\ & + 4M^{(2)}e^2\sin(4n't - 2nt - 2\omega)], \\ & + (\delta\nu - 4\delta\nu')\cdot M^{(3)}\gamma^2\sin(4n't - 2nt - 2\Pi) \\ & + \delta r\cdot\left[\frac{dM^{(0)}}{da}e'^2\cos(4n't - 2nt - 2\omega') + \frac{dM^{(1)}}{da}ee'\cos(4n't - 2nt - \omega - \omega')\right. \\ & \left. + \frac{dM^{(2)}}{da}e^2\cos(4n't - 2nt - 2\omega) + \frac{dM^{(3)}}{da}\gamma^2\cos(4n't - 2nt - 2\Pi)\right] \\ & \delta r'\cdot\left[\frac{dM^{(0)}}{da'}\cdot e'^2\cos(4n't - 2nt - 2\omega') + \frac{dM^{(1)}}{da'}\cdot ee'\cos(4n't - 2nt - \omega - \omega')\right. \\ & \left. + \frac{dM^{(2)}}{da'}e^2\cos(4n't - 2nt - 2\omega) + \frac{dM^{(3)}}{da'}\gamma^2\cos(4n't - 2nt - 2\Pi)\right]. \end{aligned}$$

Si l'on différentie cette expression par rapport à nt, $\delta\nu$ et δr, en regardant $n't$, $\delta\nu'$ et $\delta r'$, comme constans, on trouvera

$$\begin{aligned} \frac{d.\delta R}{dt} = {} & 2n(\delta\nu' - \delta\nu).[2M^{(0)}e'^2\cos(4n't - 2nt - 2\omega') + 3M^{(1)}ee'\cos(4n't - 2nt - \omega - \omega') \\ & + 4M^{(2)}e^2\cos(4n't - 2nt - 2\omega)] \\ & + 2n(4\delta\nu' - \delta\nu)\cdot M^{(3)}\gamma^2\cos(4n't - 2nt - 2\Pi) \\ & + 2n\delta r\cdot\left[\frac{dM^{(0)}}{da}e'^2\sin(4n't - 2nt - 2\omega') + \frac{dM^{(1)}}{da}ee'\sin(4n't - 2nt - \omega - \omega')\right. \\ & \left. + \frac{dM^{(2)}}{da}e^2\sin(4n't - 2nt - 2\omega) + \frac{dM^{(3)}}{da}\gamma^2\sin(4'nt - 2nt - 2\Pi)\right] \\ & + 2n\delta r'\cdot\left[\frac{dM^{(0)}}{da'}e'^2\sin(4n't - 2nt - 2\omega') + \frac{dM^{(1)}}{da'}ee'\sin(4n't - 2nt - \omega - \omega')\right. \\ & \left. + \frac{dM^{(2)}}{da'}e^2\sin(4n't - 2nt - 2\omega) + \frac{dM^{(3)}}{da'}\gamma^2\sin(4n't - 2nt - 2\Pi)\right]. \\ & + \frac{d.\delta\nu}{dt}\cdot[2M^{(0)}e'^2\sin(4n't - 2nt - 2\omega') + 3M^{(1)}ee'\sin(4n't - 2nt - \omega - \omega') \\ & + 4M^{(2)}e^2\sin(4n't - 2nt - 2\omega) + M^{(3)}\gamma^2\sin(4n't - 2nt - 2\Pi)] \\ & + \frac{d.\delta r}{dt}\cdot\left[\frac{dM^{(0)}}{da}\cdot e'^2\cos(4n't - 2nt - 2\omega) + \frac{dM^{(1)}}{da}ee'\cos(4n't - 2nt - \omega - \omega')\right. \\ & \left. + \frac{dM^{(2)}}{da}e^2\cos(4n't - 2nt - 2\omega) + \frac{dM^{(3)}}{da}\gamma^2\cos(4n't - 2nt - 2\Pi)\right]. \end{aligned}$$

Conformément aux résultats rapportés dans la *Mécanique céleste*, supposons

$$\frac{\delta r}{a} = eF^{(0)}\cos(n't - \omega) + e'F^{(1)}\cos(n't - \omega'),$$
$$\delta v = eG^{(0)}\sin(n't - \omega) + e'G^{(1)}\sin(n't - \omega'),$$
$$\frac{\delta r'}{a'} = eF'^{(0)}\cos(nt - \omega),$$
$$\delta v' = 0,$$

d'où l'on tire

$$\frac{d.\delta r}{dt} = -n'.[eF^{(0)}\sin(n't - \omega) + e'F^{(1)}\sin(n't - \omega')],$$
$$\frac{d.\delta v}{dt} = n'.[eG^{(0)}\cos(n't - \omega) + e'G^{(1)}\cos(n't - \omega')].$$

Si l'on substitue ces valeurs dans l'expression de $\frac{d'\delta R}{dt}$, en faisant, pour abréger,

$$P^{(0)} = e'^2 e.\left[\frac{n' - 2n}{2}.(2a'M^{(0)}G^{(0)} + 3a'M^{(1)}G^{(1)} - aa'\frac{dM^{(0)}}{da}F^{(0)} - aa'\frac{dM^{(1)}}{da}.F^{(1)}) + na'^2\frac{dM^{(0)}}{da}F'^{(0)}\right],$$

$$P^{(1)} = e^2 e'.\left[\frac{n' - 2n}{2}.(3a'M^{(1)}G^{(0)} + 4a'M^{(2)}G^{(1)} - aa'\frac{dM^{(1)}}{da}F^{(0)} - aa'\frac{dM^{(2)}}{da}F^{(1)}) + na'^2\frac{dM^{(1)}}{da}F'^{(0)}\right],$$

$$P^{(2)} = e'^3.\left[\frac{n' - 2n}{2}.(2a'M^{(0)}G^{(1)} - aa'\frac{dM^{(0)}}{da}F^{(1)})\right],$$

$$P^{(3)} = e^3.\left[\frac{n' - 2n}{2}.(4a'M^{(2)}G^{(0)} - aa'\frac{dM^{(2)}}{da}F^{(0)}) + na'^2\frac{dM^{(2)}}{da'}F'^{(0)}\right],$$

$$P^{(4)} = e'\gamma^2.\left[\frac{n' - 2n}{2}.(a'M^{(3)}G^{(1)} - aa'\frac{dM^{(3)}}{da}F^{(1)})\right],$$

$$P^{(5)} = e\gamma^2.\left[\frac{n' - 2n}{2}.(a'M^{(3)}G^{(0)} - aa'\frac{dM^{(3)}}{da}F^{(0)}) + na'^2\frac{dM^{(3)}}{da'}.F'^{(0)}\right].$$

On aura

$$\begin{aligned}\frac{a'd.\partial R}{dt} = {} & P^{(0)}\sin(5n't - 2nt - 2\omega' - \omega)\\ & + P^{(1)}\sin(5n't - 2nt - 2\omega - \omega')\\ & + P^{(2)}\sin(5n't - 2nt - 3\omega')\\ & + P^{(3)}\sin(5n't - 2nt - 3\omega)\\ & + P^{(4)}\sin(5n't - 2nt - \omega' - 2\Pi)\\ & + P^{(5)}\sin(5n't - 2nt - \omega - 2\Pi);\end{aligned}$$

expression qu'on ramènera à la forme

$$\frac{a'd.\partial R}{dt} = A\sin(5n't - 2nt) - B\cos(5n't - 2nt),$$

en supposant

$$\begin{aligned}A = {} & P^{(0)}\cos(2\omega' + \omega) + P^{(1)}\cos(2\omega + \omega') + P^{(2)}\cos 3\omega' + P^{(3)}\cos 3\omega\\ & + P^{(4)}\cos(\omega' + 2\Pi) + P^{(5)}\cos(\omega + 2\Pi),\end{aligned}$$

et en déterminant B par la même équation dans laquelle on changera simplement les cosinus en sinus.

Pour réduire en nombres la formule précédente, commençons par former les valeurs des quatre quantités $M^{(0)}$, $M^{(1)}$, $M^{(2)}$, $M^{(3)}$, et de leurs différences. En faisant $i=4$ dans les formules de la page 12 du III^e^ volume de la *Mécanique céleste*, et en remplaçant ensuite les quantités $A^{(2)}$, $A^{(3)}$, etc., et leurs différences par leurs valeurs en $b^{(2)}_{\frac{1}{2}}$, $b^{(3)}_{\frac{1}{2}}$, etc., on trouvera

$$a'M^{(0)} = -\frac{m'}{8}\left(38b^{(0)}_{\frac{1}{2}} + 14\alpha\frac{db^{(0)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha} + \alpha^2\frac{d^2b^{(0)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^2}\right),$$

$$a'M^{(1)} = \frac{m'}{4}\left(42b^{(1)}_{\frac{1}{2}} + 14\alpha\frac{db^{(1)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha} + \alpha^2\frac{d^2b^{(1)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^2}\right),$$

$$a'M^{(2)} = -\frac{m'}{8}\left(44b^{(2)}_{\frac{1}{2}} + 14\alpha\frac{db^{(2)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha} + \alpha^2\frac{d^2b^{(2)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^2}\right),$$

$$a'M^{(3)} = -\frac{m'}{8}\alpha b^{(3)}_{\frac{3}{2}};$$

$$aa'\frac{dM^{(0)}}{da} = -\frac{m'}{8}\left(52\alpha\frac{db^{(2)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha} + 16\alpha^2\frac{d^2b^{(1)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^2} + \alpha^3\frac{d^3b^{(1)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^3}\right),$$

$$aa'\frac{dM^{(1)}}{da} = \frac{m'}{4}\left(56\alpha\frac{db^{(3)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha} + 16\alpha^2\frac{d^2b^{(3)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^2} + \alpha^3\frac{d^3b^{(3)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^3}\right),$$

$$aa'\frac{dM^{(2)}}{da} = -\frac{m'}{8}\left(58\alpha\frac{db^{(4)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha} + 16\alpha^2\frac{d^2b^{(4)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^2} + \alpha^3\frac{d^3b^{(4)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^3}\right),$$

$$aa'\frac{dM^{(3)}}{da} = -\frac{m'\alpha}{8}\left(b^{(1)}_{\frac{3}{2}} + \alpha\frac{db^{(3)}_{\frac{3}{2}}}{d\alpha}\right).$$

D'où à l'aide des valeurs rapportées, tableau I, on conclura

$$a'M^{(0)} = -m'.(1.22378 + 1.05466 + 0.13088) = -m'.2.40932,$$
$$a'M^{(1)} = m'.(1.23874 + 1.38670 + 0.26268) = m'.2.88813,$$
$$a'M^{(2)} = -m'.(0.31104 + 0.43256 + 0.11135) = -m'.0.85495,$$
$$a'M^{(3)} = -m'.0.08832,$$
$$aa'\frac{dM^{(0)}}{da} = -m'.(3.91731 + 2.09412 + 0.26011) = -m'.6.27154,$$
$$aa'\frac{dM^{(1)}}{da} = m'.(5.54680 + 4.20318 + 0.62654) = m'.10.37653,$$
$$aa'\frac{dM^{(2)}}{da} = -m'.(1.79208 + 1.78165 + 0.34577) = -m'.3.91953,$$
$$aa'\frac{dM^{(3)}}{da} = -m'.(0.08832 + 0.39396) = -m'.0.48228.$$

On trouve (*Méc. céleste*, tome III, pages 122 et 136)

$$ae F^{(0)} = -0.000079525,\quad ae' F^{(1)} = +0.000049210,\quad a'e F'^{(0)} = -0.00034222,$$
$$e G^{(0)} = 26''.56941 \text{ (déc.)},\quad e' G^{(1)} = -29''.914770 \text{ (déc.)};$$

d'où à l'aide des valeurs rapportées, tableau I, et en réduisant les arcs en parties du rayon, on conclura

$$\log F^{(0)} = 6.5024683 -,\quad \log F^{(1)} = 6.2260263 +,\quad \log G^{(0)} = 6.9385670,$$
$$\log G^{(1)} = 6.9220792,\quad \log F'^{(0)} = 6.8729159 -.$$

On a, d'ailleurs, $\log \frac{2n - n'}{2} = 4.9408090$; au moyen de ces valeurs on trouve

$$\begin{aligned}
P^{(0)} &= m'ee'^2.(365.006 + 631.867 + 174.041 + 152.380 - 707.827)\\
&= m'ee'^2.615.467,\\
P^{(1)} &= m'e^2e'.(-656.317 - 249.395 - 287.986 - 57.553 + 1081.583)\\
&= m'e^2e'.169.668,\\
P^{(2)} &= m'e'^3.(-351.408 - 92.089) = -m'e'^3.443.497,\\
P^{(3)} &= m'e^3.(259.045 + 108.771 - 389.305) = -m'e^3.21.489,\\
P^{(4)} &= m'e'\gamma^2.(-6.4408 - 7.0817) = -m'e'\gamma^2.13.5225,\\
P^{(5)} &= m'e\gamma^2.(6.6901 + 13.3830 - 46.5261) = -m'e\gamma^2.26.4530.
\end{aligned}$$

Si à ces valeurs on ajoute celles qui sont rapportées au tableau I, on formera aisément celles des quantités que nous avons désignées par A et B; on trouve ainsi,

$$\begin{aligned}
A &= m'(-0.092909 + 0.0071255 + 0.0076157 - 0.0020457 - 0.00034391 + 0.0000871)\\
&= -m'.0.0804703,\\
B &= m'(-0.010841 - 0.0020866 + 0.078457 - 0.0012317 + 0.00012764 + 0.00060740)\\
&= +m'.0.046253.
\end{aligned}$$

On aura donc enfin

$$\frac{a'd.\delta R}{m'dt} = -0.0804703 \sin(5n't - 2nt) - 0.046253 \cos(5n't - 2nt),$$

et, en multipliant les deux termes de cette expression par la fraction $-\frac{m'an}{\sin 1''.(5n' - 2n)^2}$, ou par le nombre dont le logarithme est 0.6881121 —, on aura

$$\delta\zeta = 0''.39242 \sin(5n't - 2nt) + 0''.22555 \cos(5n't - 2nt). \quad (7)$$

6. Déterminons la partie correspondante de $\delta\zeta'$.

En prenant la différentielle de l'expression précédente

de δR, en faisant varier $n't$, $\delta\nu'$, $\delta r'$, et en regardant nt, $\delta\nu$, δr, comme constans, on trouve (*)

$$\frac{d'd.R'}{dt} = 4n'(\delta\nu - \delta\nu').[2M'^{(0)}e'^2\cos(4n't-2nt-2\omega') + 3M'^{(1)}ee'\cos(4n't-2nt-\omega-\omega')$$
$$+4M'^{(2)}e^2\cos(4n't-2nt-2\omega')],$$
$$+4n'(\delta\nu-4\delta\nu')\,M'^{(3)}\gamma^2\cos(4n't-2nt-2\Pi),$$
$$-4n'\delta r.\left[\frac{dM'^{(0)}}{da}e'^2\sin(4n't-2nt-2\omega') + \frac{dM'^{(1)}}{da}ee'\sin(4n't-2nt-\omega-\omega')\right.$$
$$\left.+\frac{dM'^{(2)}}{da}e^2\sin(4n't-2nt-2\omega) + \frac{dM'^{(3)}}{da}\gamma^2\sin(4n't-2nt-3\Pi)\right],$$
$$-4n'\delta r'.\left[\frac{dM'^{(0)}}{da'}e'^2\sin(4n't-2nt-2\omega') + \frac{dM'^{(1)}}{da'}ee'\sin(4n't-2nt-\omega-\omega')\right.$$
$$\left.+\frac{dM'^{(2)}}{da'}e^2\sin(4n't-2nt-2\omega) + \frac{dM'^{(3)}}{da'}\gamma^2\sin(4n't-2nt-2\Pi)\right],$$
$$-\frac{d.\delta\nu'}{dt}.[2M'^{(0)}e'^2\sin(4n't-2nt-2\omega') + 3M'^{(1)}ee'\sin(4n't-2nt-\omega-\omega')$$
$$+4M'^{(2)}e^2\sin(4n't-2nt-2\omega) + 4M'^{(3)}\gamma^2\sin(4n't-2nt-2\Pi)],$$
$$+\frac{d.\delta r'}{dt}.\left[\frac{dM'^{(0)}}{da'}e'^2\sin(4n't-2nt-2\omega') + \frac{dM'^{(1)}}{da'}ee'\sin(4n't-2nt-\omega-\omega')\right.$$
$$\left.+\frac{dM'^{(2)}}{da'}e^2\sin(4n't-2nt-2\omega) + \frac{dM'^{(3)}}{da'}\gamma^2\sin(4n't-2nt-2\Pi)\right].$$

Si l'on substitue pour $\delta\nu$, $\delta\nu'$, etc., leurs valeurs données par le numéro précédent; que pour abréger on fasse

$$Q^{(0)} = e'^2e.\left[2n'(2a'M'^{(0)}G^{(0)} + 3a'M'^{(1)}G^{(1)} - aa'\frac{dM'^{(0)}}{da}F^{(0)} - aa'\frac{dM'^{(1)}}{da}F^{(1)})\right.$$
$$\left.-\frac{5}{2}n'a'^2\frac{dM'^{(0)}}{da'}F'^{(0)}\right],$$
$$Q^{(1)} = e'^2e'.\left[2n'(3a'M'^{(1)}G^{(0)} + 4a'M'^{(2)}G^{(1)} - aa'\frac{dM'^{(1)}}{da}F^{(0)} - aa'\frac{dM'^{(2)}}{da}F^{(1)})\right.$$
$$\left.-\frac{5}{2}n'a'^2\frac{dM'^{(1)}}{da'}F'^{(0)}\right],$$

(*) Nous désignons par R', $M'^{(0)}$, $M'^{(2)}$, $M'^{(3)}$, ce que deviennent relativement à Saturne, les quantités que nous avons désignées par R, $M^{(0)}$, $M^{(1)}$, $M^{(2)}$, $M^{(3)}$, par rapport à Jupiter.

$$Q^{(3)} = e'^3.2n'.\left(2a'M'^{(0)}G^{(1)} - aa'\frac{dM'^{(0)}}{da}F^{(1)}\right),$$

$$Q^{(3)} = e^3.\left[2n'\left(4a'M'^{(2)}G^{(0)} - aa'\frac{dM'^{(2)}}{da}F^{(0)}\right) - \frac{5}{2}n'a'^2\frac{dM'^{(2)}}{da'}F'^{(0)}\right],$$

$$Q^{(4)} = e'\gamma^2.\left[2n'\left(a'M'^{(3)}G^{(1)} - aa'\frac{dM'^{(3)}}{da}F^{(1)}\right)\right],$$

$$Q^{(5)} = e\gamma^2.\left[2n'\left(a'M'^{(3)}G^{(0)} - aa'\frac{dM'^{(3)}}{da}F^{(0)}\right) - \frac{5}{2}n'a'^2\frac{dM'^{(3)}}{da'}F'^{(0)}\right],$$

on aura

$$\begin{aligned}\frac{a'd'.\partial R'}{dt} = {} & Q^{(0)}\sin(5n't - 2nt - 2\omega' - \omega),\\ & + Q^{(1)}\sin(5n't - 2nt - 2\omega - \omega'),\\ & + Q^{(2)}\sin(5n't - 2nt - 3\omega'),\\ & + Q^{(3)}\sin(5n't - 2nt - 3\omega),\\ & + Q^{(4)}\sin(5n't - 2nt - \omega' - 2\Pi),\\ & + Q^{(5)}\sin(5n't - 2nt - \omega - 2\Pi);\end{aligned}$$

ou bien, en supposant,

$$\begin{aligned}A' = {} & Q^{(0)}\cos(2\omega' + \omega) + Q^{(1)}\cos(2\omega + \omega') + Q^{(2)}\cos 3\omega' + Q^{(3)}\cos 3\omega\\ & + Q^{(4)}\cos(\omega' + 2\Pi) + Q^{(5)}\cos(\omega + 2\Pi);\end{aligned}$$

et en désignant par B′ la même quantité dans laquelle on changera simplement les cosinus en sinus,

$$\frac{a'd'.\partial R'}{dt} = A'\sin(5n't - 2nt) - B'\cos(5n't - 2nt).$$

On peut réduire immédiatement et sans aucun calcul cette expression en nombres, au moyen de la valeur correspondante de $\frac{a'd.\partial R}{dt}$. En effet, les quantités $M'^{(0)}$, $M'^{(1)}$, $M'^{(2)}$, $M'^{(3)}$, s'obtiendront en faisant $i = 4$ dans les formules du n° 4, du VI^e^ livre de la *Mécanique céleste*, et en y changeant tout ce qui est relatif à m dans ce qui est

relatif à m', et réciproquement. Il est facile de voir qu'on trouve ainsi

$$M'^{(0)}=\frac{m}{m'}.M^{(0)};\ M'^{(1)}=\frac{m}{m'}.M^{(1)};\ M'^{(2)}=\frac{m}{m'}.M^{(2)},\ M'^{(3)}=\frac{m}{m'}.M^{(3)}.$$

La supposition que $5n'-2n$ est une très petite quantité, en sorte que l'on a à très peu près $5n'-2n=0$, donne d'ailleurs $2n'=\frac{2n-n'}{2}$, $\frac{5}{2}n'=n$; comparant donc les valeurs des quantités $Q^{(0)}$, $Q^{(1)}$, etc., à celles des quantités $P^{(0)}$, $P^{(1)}$, etc., on voit qu'on peut, sans erreur sensible, supposer

$$Q^{(0)}=-\frac{m}{m'}.P^{(0)};\ Q^{(1)}=-\frac{m}{m'}.P^{(1)};\ Q^{(2)}=-\frac{m}{m'}.P^{(2)};\ Q^{(3)}=-\frac{m}{m'}.P^{(3)};$$
$$Q^{(4)}=-\frac{m}{m'}.P^{(4)};\ Q^{(5)}=-\frac{m}{m'}.P^{(5)};$$

d'où il suit qu'on aura $\frac{a'd'.\delta R'}{mdt}=-\frac{a'd.\delta R}{m'dt}$, et par conséquent

$$\frac{a'd'.\delta R'}{mdt}=+0.0804703\sin(5n't-2nt)+0.046253\cos(5n't-2nt).$$

Et en multipliant les coefficiens de cette expression par la fraction $-\frac{3n'm}{\sin 1''.(5n'-2n)^2}$, ou par le nombre dont le logarithme est $1.0725999-$, on aura

$$\delta\zeta'=-0''.95112\sin(5n't-2nt)-0''.54669\cos(5n't-2nt)\quad(8).$$

Cette valeur de $\delta\zeta'$ est liée comme on voit à la valeur (7) de $\delta\zeta$ par la relation très simple

$$\delta\zeta'=-\frac{m}{m'}.\sqrt{\frac{a}{a'}}.\delta\zeta.$$

7. Considérons réciproquement les valeurs de $\delta\zeta$ et de $\delta\zeta'$, qui résultent de la combinaison des termes de R qui ont $n't$ pour argument, avec ceux de $\delta\nu$, δr, $\delta\nu'$, $\delta r'$, qui dépendent de l'argument $4n't - 2nt$.

Supposons

$$\mathrm{R} = \mathrm{N}^{(0)} e \cos(nt' - \omega) + \mathrm{N}^{(1)} e' \cos(n't - \omega'),$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned}\delta\mathrm{R} = {} & (\delta\nu - \delta\nu').\mathrm{N}^{(0)} e \sin(n't - \omega) \\ & + \delta r.\left[\frac{d\mathrm{N}^{(0)}}{da} e \cos(n't - \omega) + \frac{d\mathrm{N}^{(1)}}{da} e' \cos(n't - \omega')\right] \\ & + \delta r'.\left[\frac{d\mathrm{N}^{(0)}}{da'} e \cos(n't - \omega) + \frac{d\mathrm{N}^{(1)}}{da'} e' \cos(n't - \omega')\right],\end{aligned}$$

et en différentiant par rapport à nt, $\delta\nu$, et δr,

$$\begin{aligned}\frac{d.\delta\mathrm{R}}{dt} = {} & \frac{d.\delta\nu}{dt}.\mathrm{N}^{(0)} e \sin(n't - \omega) \\ & + \frac{d.\delta r}{dt}.\left[\frac{d\mathrm{N}^{(0)}}{da} e \cos(n't - \omega) + \frac{d\mathrm{N}^{(1)}}{da} e' \cos(n't - \omega')\right].\end{aligned}$$

Si l'on fait

$$\frac{\delta r}{a} = \mathrm{K} \cos(4n't - 2nt + \mathrm{C}), \qquad \delta\nu = \mathrm{L} \sin(4n't - 2nt + \mathrm{D}),$$

d'où l'on tire

$$\frac{d\,\delta r}{adt} = -(4n' - 2n)\mathrm{K} \sin(4n't - 2nt + \mathrm{C}), \quad \frac{d.\delta\nu}{dt} = (4n' - 2n)\mathrm{L} \cos(4n't - 2nt + \mathrm{D}),$$

l'expression précédente donnera

$$\begin{aligned}\frac{a'.d.\delta\mathrm{R}}{dt} = {} & (2n' - n).a'\mathrm{N}^{(0)}\mathrm{L}\, e \sin(5n't - 2nt + \mathrm{D} - \omega) \\ & - (2n' - n).\left[aa'\frac{d\mathrm{N}^{(0)}}{da} e \sin(5n't - 2nt + \mathrm{C} - \omega) + a'^2\frac{d\mathrm{N}^{(1)}}{da'} e' \sin(5n't - 2nt + \mathrm{C} - \omega')\right].\end{aligned}$$

Réduisons cette formule en nombres. Les quantités $N^{(0)}$, $N^{(1)}$, s'obtiendront en faisant $i = 1$ dans les formules de la page 276 du 1^er^ volume de la *Mécanique céleste*. On formera ensuite, en les différentiant, les valeurs de $\frac{dN^{(0)}}{da}$ et de $\frac{dN^{(1)}}{da}$; on trouve ainsi

$$a'N^{(0)} = -m'\left(a'A^{(1)} + \frac{1}{2}aa'\frac{dA^{(1)}}{da}\right),$$
$$aa'\frac{dN^{(0)}}{da} = -\frac{m'}{2}\left(3aa'\frac{dA^{(1)}}{da} + a^2a'\frac{d^2A^{(1)}}{da^2}\right),$$
$$aa'\frac{dN^{(1)}}{da} = m'\left(aa'\frac{dA^{(0)}}{da} + \frac{1}{2}a^2a'\frac{d^2A^{(0)}}{da^2}\right);$$

ou bien en substituant pour $A^{(0)}$, $A^{(1)}$, et leurs différences leurs valeurs

$$a'N^{(0)} = m'\left(b^{(1)}_{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\alpha\frac{db^{(1)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha} - \frac{3}{2}\alpha\right),$$
$$aa'\frac{dN^{(0)}}{da} = \frac{m'}{2}\left(3\alpha\frac{db^{(1)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha} + \alpha^2\frac{db^{(1)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha} - 3\alpha\right),$$
$$aa'\frac{dN^{(1)}}{da} = -m'\left(\alpha\frac{db^{(0)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha} + \frac{1}{2}\alpha^2\frac{db^{(0)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha}\right).$$

Par conséquent

$$a'N^{(0)} = m'(0.620641 + 0.404395 - 0.817976) = m'.0.207060,$$
$$aa'\frac{dN^{(0)}}{da} = m'(1.213185 + 0.379562 - 0.817976) = m'.0\ 774771,$$
$$aa'\frac{dN^{(1)}}{da} = -m'(0.44105 - 0.42750) = -m'.0.86855.$$

On trouve d'ailleurs (*Mécanique céleste*, page 123, 3^e^ volume).

$$aK = -0.000101533 \qquad C = -56°.7419 \text{ déc.}$$
$$L = -55''.787912 \text{ (déc.)} \qquad D = -63°.5635 \text{ déc.};$$

d'où l'on conclut

$$\log K = 5.2884485 - , \qquad \log L = 5.9426607 - .$$

Enfin les valeurs de n et n' donnent

$$\log (n - 2n') = 4.3276547. \quad (sex.)$$

Il est facile avec ces données de former la valeur numérique de l'expression précédente de $\frac{a'd.\delta R}{dt}$, et si l'on suppose

$$A=(2n'-n).\left[a'N^{(0)}Le\cos(D-\omega)+aa'\frac{dN^{(0)}}{da}Ke\cos(C-\omega)+aa'\frac{dN^{(1)}}{da}Ke'\cos(C-\omega')\right].$$

Qu'on désigne par B la même quantité dans laquelle on changera les cosinus en sinus, on trouvera

$$A = m'.(0.007081 - 0.007362 - 0.015277) = - m'.0.015558,$$
$$B = m'.(0.017145 - 0.013513 + 0.013178) = \quad m'.0.016810.$$

On aura donc

$$\frac{a'd.\delta R}{m'.dt} = - 0.015558 \sin (5n't - 2nt) - 0.016810 \cos (5n't - 2nt).$$

Et en multipliant les deux termes de cette expression par le nombre dont le logarithme est $0.6881121 -$, on en conclura

$$\delta\zeta = 0''.075869 \sin (5n't - 2nt) + 0''.081975 \cos (5n't - 2nt) \quad (9)$$

8. Formons la valeur correspondante de $\delta\zeta'$.

En différentiant par rapport à $n't$, $\delta v'$, et $\delta r'$, l'expres-

sion précédente de δR, on trouve

$$\begin{aligned}\frac{d'.\delta R'}{dt} &= n'\,(\delta v - \delta v').N'^{(o)}\,e\cos(n't-\omega)\\ &\quad - n'\delta r\left[\frac{dN'^{(o)}}{da}\,e\sin(n't-\omega)+\frac{dN'^{(1)}}{da}\,e'\sin(n't-\omega')\right]\\ &\quad - n'\delta r'.\left[\frac{dN'^{(o)}}{da}\,e\sin(n't-\omega)+\frac{dN'^{(1)}}{da}\,e'\sin(n't-\omega')\right]\\ &\quad - \frac{d.\delta v'}{dt}.N'^{(o)}\,e\sin(n't-\omega)\\ &\quad + \frac{d.\delta r'}{dt}.\left[\frac{dN'^{(o)}}{da'}\,e\cos(n't-\omega)+\frac{dN'^{(1)}}{da'}\,e'\cos(n't-\omega')\right].\end{aligned}$$

Soient

$$\frac{\delta r'}{a'}=K'\cos(4n't-2nt+C');\qquad \delta v'=L'\sin(4n't-2nt+D'),$$

$$\frac{d.\delta r'}{a'dt}=-(4n'-2n)K'\sin(4n't-2nt+C');\quad \frac{d.\delta v'}{dt}=(4n'-2n)L'\cos(4n't-2nt+D').$$

En substituant ces valeurs et celles de $\frac{\delta r}{a}$ et de δv rapportées plus haut, dans l'expression précédente, on aura

$$\begin{aligned}\frac{a'.d'\delta R}{dt} &= \frac{n'}{2}.a'N'^{(o)}Le\sin(5n't-2nt+D-\omega)\\ &\quad -\frac{n'}{2}.K.\left[aa'\frac{dN'^{(o)}}{da}\,e\sin(5n't-2nt+C-\omega)+aa'\frac{dN'^{(1)}}{da}\,e'\sin(5n't-2nt+C-\omega')\right]\\ &\quad -\frac{5n'-2n}{2}.a'N'^{(o)}L'\,e\sin(5n't-2nt+D'-\omega)\\ &\quad -\frac{5n'-2n}{2}.K'.\left[aa'\frac{dN'^{(o)}}{da'}\,e\sin(5n't-2nt+C'-\omega)+aa'\frac{dN'^{(1)}}{da'}\,e'\sin(5n't-2nt+C'-\omega')\right].\end{aligned}$$

Comme $5n'-2n$ est une très petite quantité, les deux derniers termes de cette expression sont très petits par rapport aux deux premiers, on peut donc les supprimer sans erreur sensible; la supposition de $5n'-2n=0$ donne d'ailleurs à très peu près $\frac{n'}{2}=n-2n'$, on aura

donc simplement

$$\frac{a'.d'\delta R'}{dt} = (n-2n')\,a'N'^{(0)}\,L\,e\sin(5n't-2nt+D-\varpi)$$
$$-(n-2n')\,K.\left[aa'\frac{dN^{(0)}}{da}\,e\sin(5n't-2nt+C-\omega)+aa'\frac{dN'^{(1)}}{da}\,e'\sin(5n't-2nt+C-\omega')\right].$$

Cette expression est la même, au signe près, que celle de $\frac{a'd.\delta R}{dt}$ du numéro précédent; la seule différence c'est que $N'^{(0)}$, $N'^{(1)}$, désignent ici ce que deviennent $N^{(0)}$, $N^{(1)}$, relativement à Saturne. Il suffit pour obtenir les premières quantités de faire $i=0$ dans les formules page 276, 1^er^ volume de la *Mécanique céleste*, et d'y changer ce qui est relatif à m en ce qui se rapporte à m', et réciproquement. En convertissant ensuite les différentielles relatives à a' en différentielles relatives à a, on trouvera

$$a'N'^{(0)} = -m\left(a'A^{(1)}+\frac{1}{2}aa'\frac{dA^{(1)}}{da}\right),$$
$$aa'\frac{dN'^{(0)}}{da} = -\frac{m}{2}\left(3aa'\frac{dA^{(1)}}{da}+a^2a'\frac{d^2A^{(1)}}{da^2}\right),$$
$$aa'\frac{dN^{(1)}}{da} = m\left(aa'\frac{dA^{(0)}}{da}+\frac{1}{2}a^2a'\frac{d^2A^{(0)}}{da^2}\right).$$

On a relativement à Saturne (*Mécanique céleste*, page 273, vol. 1).

$$A^{(0)} = -\frac{1}{a'}b^{(0)}_{\frac{1}{2}}, \qquad A^{(1)} = \frac{a'}{a^2}-\frac{1}{a'}b^{(1)}_{\frac{1}{2}};$$

d'où l'on conclura

$$a'N'^{(0)} = m\left(b^{(1)}_{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\alpha\frac{db^{(1)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha}\right),$$
$$aa'\frac{dN'^{(0)}}{da} = \frac{m}{2}\left(3\alpha\frac{db^{(1)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha}+\alpha^2\frac{d^2b^{(1)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^2}\right),$$
$$aa'\frac{dN'^{(1)}}{da} = -m\left(\alpha\frac{db^{(0)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha}+\frac{1}{2}\alpha^2\frac{d^2b^{(0)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^2}\right).$$

Si l'on compare ces valeurs à celles des mêmes quantités relatives à Jupiter, on voit qu'on aura

$$a'\,N'^{(0)} = \frac{m}{m'}.a'N^{(0)} + \frac{3}{2}\,m\alpha,$$
$$aa'\frac{dN'^{(0)}}{da} = \frac{m}{m'}.aa'\frac{dN'^{(0)}}{da} + \frac{3}{2}\,m\alpha,$$
$$aa'\frac{dN'^{(1)}}{da} = \frac{m}{m'}\,aa'\frac{dN^{(1)}}{da}.$$

La valeur de $\frac{a'd'\partial R'}{dt}$ donne donc ainsi

$$\frac{a'd'.\partial R'}{mdt} = -\frac{a'd.\partial R}{m'dt} - \frac{a'd.\partial R''}{mdt}.$$

En supposant pour abréger

$$\frac{a'.d.\partial R''}{mdt} = -\frac{3(n-2n')}{2}.\alpha e.\Big[L\cos(D-\omega) - K\cos(C-\omega)\Big].\sin(5n't-2nt)$$
$$-\frac{3(n-2n')}{2}.\alpha e.\Big[L\sin(D-\omega) - K\sin(C-\omega)\Big].\cos(5n't-2nt),$$

on a $\frac{3}{2}\alpha = 0.8179759$; cette valeur jointe aux précédentes donnera

$$\frac{a'.d.\partial R''}{mdt} = (+0.027974-0.007773).\sin(5n't-2nt)-(0.067731-0.014267)\cos(5n't-2nt)$$
$$= +0.020201\sin(5n't-2nt)-0.053464\cos(5n't-2nt).$$

Nous avons trouvé plus haut

$$\frac{a'd.\partial R}{m'dt} = -0.015558\sin(5n't-2nt) - 0.016810\cos(5n't-2nt),$$

on aura donc

$$\frac{a'd'.\partial R'}{mdt} = -0.004643\sin(5n't-2nt) + 0.070274\cos(5n't-2nt);$$

et en multipliant les deux termes de cette expression par le nombre dont le logarithme est 1.0725999 — , on en conclura

$$\delta\zeta' = 0''.054878 \sin(5n't - 2nt) - 0''.830605 \cos(5'nt - 2nt) \quad (10).$$

En réunissant les expressions (7) et (8), (9) et (10), on aura pour les valeurs totales de $\delta\zeta$ et de $\delta\zeta'$, qui résultent de la combinaison des argumens $n't$ et $4n't - 2nt$,

$$\delta\zeta = 0''.46829 \sin(5n't - 2nt) + 0''.30753 \cos(5'nt - 2nt) \quad (b),$$
$$\delta\zeta' = -0''.89624 \sin(5n't - 2nt) - 1''.37730 \cos(5n't - 2nt) \quad (b').$$

Calcul des valeurs de $\delta\zeta$ et de $\delta\zeta'$ qui résultent de la combinaison des argumens 2n't *et* 3nt' — 2nt.

9. Pour former ces valeurs, supposons d'abord

$$R = M^{(0)} e^2 \cos(2n't - 2\varpi) + M^{(1)} ee' \cos(2n't - \omega - \omega') + M^{(2)} e'^2 \cos(2n't - 2\omega') + M^{(3)} \gamma^2 \cos(2n't - 2\Pi),$$

d'où l'on conclura

$$\begin{aligned}\delta R = {} & (\delta\nu - \delta\nu').[2M^{(0)} e^2 \sin(2n't - 2\varpi) + M^{(1)} ee' \sin(2n't - \omega - \omega')] \\ & - 2\delta\nu' M^{(3)} \gamma^2 \sin(2n't - 2\Pi) \\ & + \delta r.\left[\frac{dM^{(0)}}{da} e^2 \cos(2n't - 2\varpi) + \frac{dM^{(1)}}{da} ee' \cos(2n't - \omega - \omega')\right. \\ & \qquad \left. + \frac{dM^{(2)}}{da} e'^2 \cos(2n't - 2\omega') + \frac{dM^{(3)}}{da} \gamma^2 \cos(2n't - 2\Pi)\right] \\ & + \delta r'.\left[\frac{dM^{(0)}}{da'} e^2 \cos(2nt - 2\varpi) + \frac{dM^{(1)}}{da'} ee' \cos(2n't - \omega - \omega')\right. \\ & \qquad \left. + \frac{dM^{(2)}}{da'} e'^2 \cos(2n't - 2\omega') + \frac{dM^{(3)}}{da'} \gamma^2 \cos(2n't - 2\Pi)\right];\end{aligned}$$

et en différentiant par rapport à nt, δv, et δr, on aura

$$\frac{d.\delta R}{dt} = \frac{d.\delta v}{dt}.[2M^{(0)}e^2\sin(2n't-2\omega)+M^{(1)}ee'\sin(2n't-\omega-\omega')]$$
$$+\frac{d.\delta r}{dt}.\left[\frac{dM^{(0)}}{da}e^2\cos(2n't-2\omega)+\frac{dM^{(1)}}{da}ee'\cos(2n't-\omega-\omega')\right.$$
$$\left.+\frac{dM^{(2)}}{da}e'^2\cos(2n't-2\omega')+\frac{dM^{(3)}}{da}\gamma^2\cos(2n't-2\Pi)\right].$$

Soient

$$\frac{\delta r}{a} = eF^{(0)}\cos(3n't-2nt-\omega)+e'F^{(1)}\cos(3n't-2nt-\omega'),$$
$$dv = eG^{(0)}\sin(3n't-2nt-\omega)+e'G^{(1)}\sin(3n't-2nt-\omega'),$$

d'où l'on tire

$$\frac{d.\delta r}{adt} = -(3n'-2n).[eF^{(0)}\sin(3n't-2nt-\omega)+e'F^{(1)}\sin(3n't-2nt-\omega')],$$
$$\frac{d.\delta v}{dt} = (3n'-2n).[eG^{(0)}\cos(3n't-2nt-\omega)+eG^{(1)}\cos(3n't-2nt-\omega')].$$

Si l'on fait pour abréger

$$P^{(0)} = \frac{3n'-2n}{2}.e^3e'.\left[2a'M^{(0)}G^{(1)}+a'M^{(0)}G^{(0)}-aa'\frac{dM^{(0)}}{da}F^{(1)}-aa'\frac{dM^{(1)}}{da}F^{(0)}\right],$$
$$P^{(1)} = \frac{3n'-2n}{2}.ee'^2.\left[a'M^{(1)}G^{(1)}-aa'\frac{dM^{(2)}}{da}F^{(0)}-aa'\frac{dM^{(1)}}{da}F^{(1)}\right],$$
$$P^{(2)} = \frac{3n'-2n}{2}.e^3.\left[2a'M^{(0)}G^{(0)}-aa'\frac{dM^{(0)}}{da}F^{(0)}\right],$$
$$P^{(3)} = -\frac{3n'-2n}{2}.e'^3.aa'\frac{dM^{(2)}}{da}.F^{(1)},$$
$$P^{(4)} = -\frac{3n'-2n}{2}.e\gamma^2.aa'\frac{dM^{(3)}}{da}.F^{(0)},$$
$$P^{(5)} = -\frac{3n'-2n}{2}e'\gamma^2.aa'\frac{dM^{(3)}}{da}.F^{(1)},$$

on trouvera

$$\begin{aligned}\frac{a'.d.\delta R}{dt} = {} & P^{(0)} \sin(5n't - 2nt - 2\omega - \omega') \\ & + P^{(1)} \sin(5n't - 2nt - \omega - 2\omega') \\ & + P^{(2)} \sin(5n't - 2nt - 3\omega) \\ & + P^{(3)} \sin(5'nt - 2nt - 3\omega') \\ & + P^{(4)} \sin(5'nt - 2nt - \omega - 2\Pi) \\ & + P^{(5)} \sin(5nt - 2nt - \omega' - 2\Pi).\end{aligned}$$

En supposant donc

$$\begin{aligned}A = {} & P^{(0)} \cos(2\omega + \omega') + P^{(1)} \cos(\omega + 2\omega') + P^{(2)} \cos 3\omega + P^{(3)} \cos 3\omega' \\ & + P^{(4)} \cos(\omega + 2\Pi) + P^{(5)} \cos(\omega' + 2\Pi), \\ B = {} & P^{(0)} \sin(2\omega + \omega') + P^{(1)} \sin(\omega + 2\omega') + P^{(2)} \sin 3\omega + P^{(3)} \sin 3\omega' \\ & + P^{(4)} \sin(\omega + 2\Pi) + P^{(5)} \sin(\omega' + 2\Pi),\end{aligned}$$

on aura

$$\frac{a'.d.\delta R}{dt} = A \sin(5n't - 2nt) - B \cos(5n't - 2nt).$$

Pour avoir la valeur numérique de cette expression, commençons par former les valeurs des quatre quantités $M^{(0)}$, $M^{(1)}$, $M^{(2)}$, $M^{(3)}$. On les obtiendra en faisant $i = 2$ dans les formules du n° 4 du livre VI de la *Mécanique céleste*, et en substituant à la place des quantités $A^{(0)}$, $A^{(1)}$, $A^{(2)}$, et de leurs différences, leurs valeurs en $b^{(0)}_{\frac{1}{2}}$, $b^{(1)}_{\frac{1}{2}}$, etc., on aura

$$a' M^{(0)} = -\frac{m'}{8}.\left(6b^{(2)}_{\frac{1}{2}} + 6\alpha \frac{d^2 b^{(2)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha} + \frac{d^2 b^{(2)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^2}\right),$$

$$a' M^{(1)} = \frac{m'}{4}.\left(6b^{(1)}_{\frac{1}{2}} + 6\alpha \frac{db^{(1)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha} + \alpha^2 \frac{d^2 b^{(1)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^2} - 12\alpha\right),$$

$$a' M^{(2)} = -\frac{m'}{8}.\left(4b_{\frac{1}{2}}^{(0)} + 6\alpha\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha} + \alpha^2\frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha^2}\right),$$

$$a' M^{(3)} = -\frac{m'}{8}.\alpha b_{\frac{3}{2}}^{(1)},$$

$$aa'\frac{dM^{(0)}}{da} = -\frac{m'}{8}.\left(12\alpha\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha} + 8\alpha^2\frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha^2} + \alpha^3\frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha^3}\right),$$

$$aa'\frac{dM^{(1)}}{da} = \frac{m'}{4}.\left(12\alpha\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha} + 8\alpha^2\frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha^2} + \alpha^3\frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha^3} - 12\alpha\right),$$

$$aa'\frac{dM^{(2)}}{da} = -\frac{m'}{8}.\left(10\alpha\frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha} + 8\alpha^2\frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha^2} + \alpha^3\frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha^3}\right),$$

$$aa'\frac{dM^{(3)}}{da} = -\frac{m'}{8}.\left(\alpha b_{\frac{3}{2}}^{(1)} + \alpha^2\frac{db_{\frac{3}{2}}^{(1)}}{d\alpha}\right).$$

En réduisant ces formules en nombres, on trouve

$$a' M^{(0)} = -m'.(0.19323 + 0.45200 + 0.13088) = -m'.0.77611,$$
$$a' M^{(1)} = -m'.(0.93095 + 1.21318 + 0.18978 - 1.63595) = m'.0.69797,$$
$$a' M^{(2)} = -m'.(1.09012 + 0.33078 + 0.10688) = -m'.1.52778,$$
$$a' M^{(3)} = -m'.0.217138,$$
$$aa'\frac{dM^{(0)}}{da} = -m'.(1.04706 + 0.26009 + 0.90400) = -m'.2.21115,$$
$$aa'\frac{dM^{(1)}}{da} = -m'.(2.42637 + 1.51824 + 0.52211 - 1.63595) = m'.2.83077,$$
$$aa'\frac{dM^{(2)}}{da} = -m'.(0.55131 + 0.85501 + 0.24585) = -m'.1.65217,$$
$$aa'\frac{dM^{(3)}}{da} = -m'.(0.21714 + 0.56648) = -m'.0.78362.$$

On trouve d'ailleurs, *Mécanique céleste*, tome 3, page 122,

$$ae F^{(0)} = -0.00045845, \qquad ae' F^{(1)} = +0.00090478,$$
$$e G^{(0)} = -44''.46080 \text{ déc.} \qquad e' G^{(1)} = 84''.94256 \text{ déc.}$$

d'où l'on conclut

$$\log F^{(0)} = 7.2632566 -, \qquad \log G^{(0)} = 7.6516175 -,$$
$$\log F^{(1)} = 7.4905159 +, \qquad \log G^{(1)} = 7.8647739 +;$$

on a d'ailleurs $\log \frac{2n - 3n'}{2} = 4.6361121$; au moyen de ces valeurs et de celles qui sont rapportées dans le tableau I, j'ai trouvé

$$P^{(0)} = m'.(0.063919 + 0.017594 - 0.038463 - 0.029179)$$
$$= m'.0.013871,$$
$$P^{(1)} = m'.(-0.033613 + 0,057586 + 0.019916) = m'.0.043889,$$
$$P^{(2)} = m'\ (-0.033457 + 0,019489) = -m'.0.013968,$$
$$P^{(3)} = -m'.0.039306,$$
$$P^{(4)} = m'.0.001442,$$
$$P^{(5)} = -m'.0.002845,$$

et par suite

$$A = m'\ (-0.0044822 - 0.045934 - 0.0119663 + 0.0037975 - 0.00020472 - 0.002667 6) = -m'.0.0591167,$$
$$B = m'\ (\ 0.0131258 - 0.0050863 - 0.0072052 + 0.0391234 - 0.00142715 + 0.00099009) = m'.0.0395206;$$

on aura donc enfin

$$\frac{a\,d'\delta R}{m'dt} = -\,0.0591167 \sin(5'nt - 2nt) - 0.0395206 \cos(5n't - 2nt),$$

et en multipliant cette expression par le nombre dont le logarithme est 0.6881121, on en conclura

$$\delta\zeta = 0''.28829 \sin(5n't - 2nt) + 0''.19273 \cos(5n't - 2nt) \quad (11).$$

12. Déterminons maintenant la partie correspondante de $\delta\zeta'$.

L'expression précédente de δR, en la différentiant, et en marquant d'un accent les lettres R, $M^{(0)}$, $M^{(1)}$, $M^{(2)}$, $M^{(3)}$, pour les rapporter à Saturne, donnera

$$\begin{aligned}
\frac{d'.\delta R'}{dt} = {} & 2n'(\delta v - \delta v').[2M'^{(0)}e^2\cos(2n't - 2\omega) + M'^{(1)}ee'\cos(2n't - \omega - \omega') \\
& + 4n'\delta v'\,M'^{(3)}\gamma^2\cos 2(n't - \Pi)], \\
& - 2n'\delta r.\left[\frac{dM'^{(0)}}{da}e^2\sin 2(n't - \omega) + \frac{dM'^{(1)}}{da}ee'\sin(2n't - \omega - \omega')\right. \\
& \left. + \frac{dM'^{(2)}}{da}e'^2\sin 2(n't - \omega') + \frac{dM'^{(3)}}{da}\gamma^2\sin 2(n't - \Pi)\right], \\
& - 2n'\delta r'.\left[\frac{dM'^{(0)}}{da'}e^2\sin 2(n't - \omega) + \frac{dM'^{(1)}}{da'}ee'\sin(2n't - \omega - \omega')\right. \\
& \left. + \frac{dM'^{(2)}}{da'}e'^2\sin 2(n't - \omega') + \frac{dM'^{(3)}}{da'}\gamma^2\sin 2(n't - \Pi)\right], \\
& \frac{d.\delta v'}{dt}.[2M'^{(0)}e^2\sin 2(n't - \omega) + M'^{(1)}ee'\sin(2n't - \omega - \omega') \\
& + 2M'^{(3)}\gamma^2\sin 2(n't - \Pi)], \\
& - \frac{d.\delta r'}{dt}.\left[\frac{dM'^{(0)}}{da'}e^2\cos 2(n't - \omega) + \frac{dM'^{(1)}}{da'}ee'\cos(2n't - \omega - \omega')\right. \\
& \left. + \frac{dM'^{(2)}}{da'}e'^2\cos 2(n't - \omega') + \frac{dM'^{(3)}}{da'}\gamma^2\cos 2(n't - \Pi)\right].
\end{aligned}$$

Si l'on suppose aux valeurs de $\delta r'$ et $\delta v'$ cette forme

$$\delta r' = H\cos(3n't - 2nt + f), \qquad \delta v' = K\sin(3n't - 2nt + g),$$

on aura en différentiant

$$\begin{aligned}
\frac{d.\delta r'}{dt} &= -(3n' - 2n)\,H\sin(3n't - 2nt + f), \\
\frac{d.\delta v'}{dt} &= (3n' - 2n)\,K\cos(3n't - 2nt + f');
\end{aligned}$$

et en substituant ces valeurs ainsi que celles de δv et de δr, n° 9, dans l'expression précédente on verra que les termes dépendans de H et K ont pour coefficient $5n' - 2n$,

on peut donc les supprimer conformément à ce que nous avons dit n° 8; si l'on observe ensuite que la supposition de $5n' - 2n = 0$ donne $2n' = 2n - 3n'$, on aura à très peu près

$$\begin{aligned}\frac{a'.d.\partial R}{dt} = {} & Q^{(0)} \sin(5n't - 2nt - 2\omega - \omega'),\\ & + Q^{(1)} \sin(5n't - 2nt - \omega - 2\omega'),\\ & + Q^{(2)} \sin(5n't - 2nt - 3\omega),\\ & + Q^{(3)} \sin(5n't - 2nt - 3\omega'),\\ & + Q^{(4)} \sin(5n't - 2nt - \omega - 2\Pi),\\ & + Q^{(5)} \sin(5n't - 2nt - \omega' - 2\Pi),\end{aligned}$$

en faisant pour abréger

$$Q^{(0)} = \frac{2n-3n'}{2}.e^2e'.\left(2a'M'^{(0)}G^{(1)} + a'M'^{(1)}G^{(0)} - aa'\frac{dM'^{(0)}}{da}F^{(1)} - aa'\frac{dM'^{(1)}}{da}F^{(0)}\right),$$

$$Q^{(1)} = \frac{2n-3n'}{2}.ee'^2.\left(a'M'^{(1)}G^{(1)} - aa'\frac{dM'^{(2)}}{da}F^{(0)} - aa'\frac{dM'^{(1)}}{da}F^{(1)}\right),$$

$$Q^{(2)} = \frac{2n-3n'}{2}.e^3.\left(2a'M'^{(0)}G^{(0)} - aa'\frac{dM'^{(0)}}{da}F^{(0)}\right),$$

$$Q^{(3)} = -\frac{2n-3n'}{2}.e'^3.aa'\frac{dM'^{(2)}}{da}F^{(1)},$$

$$Q^{(4)} = -\frac{2n-3n'}{2}.e\gamma^2.aa'\frac{dM'^{(3)}}{da'}F^{(0)},$$

$$Q^{(5)} = -\frac{2n-3n'}{2}.e'\gamma^2.aa'\frac{dM'^{(3)}}{da'}F'^{(1)}.$$

En supposant donc

$$\begin{aligned}A' = {} & Q^{(0)}\cos(2\omega + \omega') + Q^{(1)}\cos(\omega + 2\omega') + Q^{(2)}\cos 3\omega + Q^{(3)}\cos 3\omega'\\ & + Q^{(4)}\cos(\omega + 2\Pi) + Q^{(5)}\cos(\omega' + 2\Pi);\end{aligned}$$

et en désignant par B' ce que devient la même quantité lorsqu'on y change les sinus en cosinus, on aura enfin

$$\frac{a'.d'.\partial R}{dt} = A'\sin(5n't - 2nt) - B'\cos(5n't - 2nt).$$

Pour faciliter la réduction de cette formule en nombres, observons que l'on aura les quatre quantités $M'^{(0)}$, $M'^{(1)}$, $M'^{(2)}$, $M'^{(3)}$, en faisant $i = 0$ dans les formules du n° 4, de la *Mécanique céleste*, et en y changeant tout ce qui est relatif à m' en ce qui se rapporte à m, et réciproquement, on trouve ainsi

$$a'M'^{(0)} = \frac{m}{m'}.a'M^{(0)};\quad a'M'^{(1)} = \frac{m}{m'}.a'M^{(1)} + 3m\alpha;\quad a'M'^{(2)} = \frac{m}{m'}.a'M^{(2)};$$

$$a'M^{(3)} = \frac{m}{m'}.a'M^{(3)};$$

et par suite

$$aa'\frac{dM'^{(0)}}{da} = \frac{m}{m'}.aa'\frac{dM^{(0)}}{da};\quad aa'\frac{dM'^{(1)}}{da} = \frac{m}{m'}.aa'\frac{dM^{(1)}}{da} + 3m\alpha;$$

$$aa'\frac{dM'^{(2)}}{da} - \frac{m}{m'}.aa'\frac{dM^{(2)}}{da};\quad aa'\frac{dM^{(3)}}{da} = \frac{m}{m'}.aa'.\frac{dM^{(3)}}{da}.$$

On aura donc immédiatement

$$Q^{(2)} = -\frac{m}{m'}.P^{(2)};\quad Q^{(3)} = -\frac{m}{m'}.P^{(3)};\quad Q^{(4)} = -\frac{m}{m'}.P^{(4)};\quad Q^{(5)} = -\frac{m}{m'}.P^{(5)}.$$

et ensuite

$$Q^{(0)} = -\frac{m}{m'}P^{(0)} - mP'^{(0)};\quad Q^{(1)} = -\frac{m}{m'}.P^{(1)} - mP'^{(1)}.$$

Les quantités $P'^{(0)}$ et $P'^{(1)}$ étant déterminées par les deux équations suivantes,

$$P'^{(0)} = \frac{3n' - 2n}{2}.e^2e'.3\alpha.(G^{(0)} - F^{(0)}),$$

$$P'^{(1)} = \frac{3n' - 2n}{2}.ee'^2.3\alpha.(G^{(1)} - F^{(1)});$$

on aura ensuite

$$A' = -\frac{m}{m'}A - mP'^{(0)}\cos(2\omega + \omega') - mP'^{(1)}\cos(2\omega' + \omega),$$

$$B' = -\frac{m}{m'}B - mP'^{(0)}\sin(2\omega + \omega') - mP'^{(1)}\sin(2\omega' + \omega).$$

En réduisant ces expressions en nombres, on trouve

$$P'^{(0)} = 0.024374, \qquad P'^{(1)} = -0.045503,$$

d'où l'on conclura

$$A' = m(0.0591167 + 0.0078769 - 0.0451928) = m.0.021801,$$
$$B' = -m(0.0395206 + 0.0230667 + 0.0052729) = -m.0.0678602.$$

On aura donc enfin

$$\frac{a'd'.\delta R'}{mdt} = 0.021801\sin(5n't - 2nt) + 0.0678602\cos(5n't - 2nt).$$

En multipliant les deux termes de cette expression par le nombre dont le logarithme est 1.0725999, et en prenant le résultat avec un signe contraire, on en conclura

$$\delta\zeta' = -0''.25768\sin(5n't - 2nt) - 0''.80208\cos(5n't - 2nt) \quad (12).$$

11. Considérons les valeurs de $\delta\zeta$ et de $\delta\zeta'$ réciproques des précédentes, c'est-à-dire celles qui naissent de la combinaison inverse des mêmes argumens.

Soit d'abord

$$R = N^{(0)}e'\cos(3n't - 2nt - \omega') + N^{(1)}e\cos(3n't - 2nt - \omega),$$

d'où il résulte

$$\begin{aligned}\delta R &= (\delta v - \delta v').[2N^{(0)} e' \sin(3n't - 2nt - \omega') + 3N^{(1)} e \sin(3n't - 2nt - \omega)],\\ &+ \delta r.\left[\frac{dN^{(0)}}{da} e' \cos(3n't - 2nt - \omega') + \frac{dN^{(1)}}{da} e \cos(3n't - 2nt - \omega)\right],\\ &+ \delta r'.\left[\frac{dN^{(0)}}{da'} e' \cos(3n't - 2nt - \omega') + \frac{dN^{(1)}}{da} e \cos(3n't - 2nt - \omega)\right],\end{aligned}$$

En différentiant cette expression par rapport à nt, δv, et δr, on trouve

$$\begin{aligned}\frac{d.\delta R}{dt} &= 2n(-\delta v'\delta v).[2N^{(0)} e' \cos(3n't - 2nt - \omega') + 3N^{(1)} e \cos(3n't - 2nt - \omega)],\\ &+ 2n.\delta r.\left[\frac{dN^{(0)}}{da} e' \sin(3n't - 2nt - \omega') + \frac{dN^{(1)}}{da} e \sin(3n't - 2nt - \omega)\right],\\ &+ 2n.\delta r'.\left[\frac{dN^{(0)}}{da'} e' \sin(3n't - 2nt - \omega') + \frac{dN^{(1)}}{da'} e \sin(3n't - 2nt - \omega)\right],\\ &+ \frac{d.\delta v}{dt}.\left[2N^{(0)} e' \sin(3n't - 2nt - \omega') + 3N^{(1)} e \sin(3n't - 2nt - \omega)\right],\\ &+ \frac{d.\delta r}{dt}.\left[\frac{dN^{(0)}}{da} e' \cos(3n't - 2nt - \omega') + \frac{dN^{(1)}}{da} e \cos(3n't - 2nt - \omega)\right].\end{aligned}$$

Conformément aux résultats rapportés, *Mécanique céleste*, tome 3e, page 123, supposons

$$\begin{aligned}\frac{\delta r}{a} &= F \cos(2n't + f), \qquad \frac{\delta r'}{a'} = 0,\\ \delta v &= G \sin(2n't + g), \qquad \delta v' = 0,\end{aligned}$$

et par conséquent

$$\frac{d.\delta r}{adt} = -2n' F \sin(2n't + f), \qquad \frac{d.\delta v}{dt} = 2n' G \cos(2n't + f).$$

La substitution de ces valeurs donnera

$$\begin{aligned}\frac{a'.d.\delta R}{dt} &= (n - n).G.[2a' N^{(0)} e' \sin(5nt - 2nt + g - \omega') + 3a' N^{(1)} e \sin(5n't - 2nt + g - \omega)],\\ &- (n' - n).F.\left[aa' \frac{dN^{(0)}}{da} e' \sin(5n't - 2nt + f - \omega') + aa' \frac{dN^{(1)}}{da} e \sin(5n't - 2nt + f - \omega)\right],\end{aligned}$$

expression qui en faisant

$$A = (n'-n).\Big[2a'N^{(0)}\,G\,e'\cos(\omega'-g) + 3a'N^{(1)}\,G\,e\cos(g-\omega) - aa'\frac{dN^{(0)}}{da}\,F\,e'\cos(\omega'-f) - aa'\frac{dN^{(1)}}{da}\,F\,e'\cos(f-\omega)\Big],$$

$$B = -(n'-n).\Big[2a'N^{(0)}\,G\,e'\sin(\omega'-g) - 3a'N^{(1)}\,G\,e\sin(g-\omega) - aa'\frac{dN^{(0)}}{da}\,F\,e'\sin(\omega'-f) + aa'\frac{dN^{(1)}}{da}\,F\,e\sin(f-\omega)\Big],$$

devient

$$\frac{a'.d.\delta R}{dt} = A\sin(5n't - 2nt) - B\cos(5n't - 2nt).$$

Réduisons cette formule en nombres. On aura les valeurs de $N^{(0)}$ et de $N^{(1)}$, en faisant $i = 3$ dans les formules de la page 276 du premier volume de la *Mécanique céleste;* on trouve ainsi

$$a'\,N^{(0)} = -\frac{m'}{2}.\left(5b^{(3)}_{\frac{1}{2}} + \alpha\frac{db^{(3)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha}\right),$$

$$a'\,N^{(1)} = m'.\left(3b^{(3)}_{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\alpha\frac{db^{(3)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha}\right),$$

$$aa'\frac{dN^{(0)}}{da} = -m'.\left(3\alpha\frac{db^{(3)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha} + \frac{1}{2}\alpha^2\frac{d^2b^{(3)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^2}\right),$$

$$aa'\frac{dN}{da} = \frac{m'}{2}.\left(7\alpha\frac{db^{(3)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha} + \alpha^2\frac{d^2b^{(3)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^2}\right).$$

Au moyen de ces formules et des valeurs rapportées

tableau I, on trouvera

$$\begin{aligned}
a' N^{(0)} &= -m'(0.64410 + 0.30133) = -m'.0.94543,\\
a' (N^{1}) &= \quad m'(0.35392 + 0.19810) = \quad m'.0.55202,\\
aa' \frac{dN^{(0)}}{da} &= -m'(1.80799 + 0.52355) = -m'.2.33154,\\
aa' \frac{dN^{(1)}}{da} &= \quad m'(1.38670 + 0.52539) = \quad m'.1.91209.
\end{aligned}$$

On trouve, *Mécanique céleste*, page 123, tome 3e,

$$\begin{aligned}
aF &= +0.0000822415, \quad G = -17''.218232 \text{ (déc.)},\\
f &= +12°2392 \text{ (déc.)}, \quad g = +17°.7111 \text{ (déc.)},
\end{aligned}$$

d'où l'on conclut

$$\begin{aligned}
\log F &= 5.1989930 +, \qquad \log G = 5.4321084 -,\\
f - \omega &= 0°.7380 \text{ Déc.} \qquad \omega' - f = 85°.7074.\text{D.},\\
g - \omega &= 6°.2099 \text{ D.} \qquad \omega' - g = 80°.2355.\text{D.}
\end{aligned}$$

On a d'ailleurs $\log n - n' = 4.8146511$.

A l'aide de ces valeurs, j'ai trouvé

$$\begin{aligned}
A &= m'(-0.057313 + 0.13986 - 0.030109 + 0.094855) = m'.0.14730,\\
B &= m'(\ 0.178681 + 0.013687 + 0.13188 + 0.0010996) = m'.0.32535;
\end{aligned}$$

on aura donc ainsi

$$\frac{a'.d.\delta R}{m'dt} = 0''.14730 \sin(5n't - 2nt) + 0''.32535 \cos(5n't - 2nt),$$

et en multipliant cette expression par le nombre dont le logarithme est 0.6881121 —, on en conclura

$$\delta\zeta = -0''.71831 \sin(5n't - 2nt) - 1''.58658 \cos(5'nt - 2nt) \quad (13).$$

12. Déterminons la partie correspondante de $\delta\zeta'$.

La valeur précédente de δR, en y supposant $\delta\nu'$ et $\delta r'$ égaux à zéro, et en la différentiant par rapport à $n't$, donnera

$$\frac{d'.\delta R'}{dt} = 3n'\delta\nu.[2N'^{(0)}e'\cos(3n't-2nt-\omega') + 3N'^{(1)}e\cos(3n't-2nt-\omega)],$$
$$-3n'\delta r.\left[\frac{dN'^{(0)}}{da}e'\sin(3n't-2nt-\omega') + \frac{dN'^{(1)}}{da}e\sin(3n't-2nt-\omega)\right],$$

ou bien, en substituant pour $\delta\nu$ et δr leurs valeurs, et en remarquant que la supposition que $5n' - 2n$ est une très petite quantité, donne à fort peu près $\frac{3}{2}n' = n \quad n'$,

$$\frac{d'.\delta R'}{dt} = (n - n')G.\left[2N'^{(0)}e'\sin(5n't - 2nt + g - \omega')\right.$$
$$\left. + 3N'^{(1)}e\sin(5n't - 2nt + g - \omega)\right],$$
$$-(n - n')F.\left[\frac{dN'^{(0)}}{da}e'\sin(5n't - 2nt + f - \omega')\right.$$
$$\left. + \frac{dN'^{(1)}}{da}e\sin(5'nt - 2nt + f - \omega)\right].$$

On obtiendra les quantités $N'^{(0)}$, $N'^{(1)}$, en supposant dans les formules du n° 50 du second livre de la *Mécanique céleste*, $i = -2$, après avoir changé tout ce qui est relatif à m' en ce qui se rapporte à m, et réciproquement, il est facile de se convaincre qu'on a ainsi

$$N'^{(0)} = \frac{m}{m'}.N^{(0)}, \qquad N'^{(1)} = \frac{m}{m'}.N'^{(1)},$$

et par conséquent

$$\frac{dN'^{(0)}}{da} = \frac{m}{m'}.\frac{dN^{(0)}}{da}, \qquad \frac{dN'^{(1)}}{da} = \frac{m}{m'}.\frac{dN'^{(1)}}{da}.$$

D'après cela, si l'on compare la valeur précédente de $\frac{d'.\delta R'}{dt}$ à celle de $\frac{d.\delta R}{dt}$, il est évident qu'elle est égale à cette dernière prise avec un signe contraire, et multipliée par le rapport de la masse m à la masse m'; on aura donc, sans aucun calcul,

$$\frac{a'.d'.\delta R}{mdt} = -\,0.14730\sin(5n't - 2nt) - 0.32535\cos(5n't - 2nt);$$

et en multipliant les coefficiens par le nombre dont le logarithme est 1.0725999—, on aura

$$\delta\zeta' = 1''.74101\sin(5n't - 2nt) + 3''.84548\cos(5n't - 2nt). \quad (14)$$

Les deux valeurs (13) et (14) de $\delta\zeta$ et de $\delta\zeta'$, sont, comme on voit, liées entre elles par l'équation de condition

$$\delta\zeta = -\frac{m}{m'}\cdot\sqrt{\frac{a}{a'}}\cdot\delta\zeta'.$$

Si l'on réunit les équations (11) et (13), et les équations (12) et (14), on aura, pour les valeurs complètes de $\delta\zeta$ et de $\delta\zeta'$, résultant de la double combinaison des argumens $2n't$ et $3'nt - 2nt$,

$$\delta\zeta = -\,0''.43002\sin(5n't - 2nt) - 1''.39385\cos(5n't - 2nt). \quad (c)$$
$$\delta\zeta' = \quad 1''.48333\sin(5n't - 2nt) + 3''.04340\cos(5n't - 2nt). \quad (c')$$

Calcul des valeurs de $\delta\zeta$ et de $\delta\zeta'$ qui résultent de la combinaison des argumens 3n't *et* 2n't — 2nt.

13. Supposons en premier lieu

$$R = M^{(0)}e'^3\cos 3(n't - \omega') + M^{(1)}e'^2e\cos(3n't - \omega - 2\omega') + M^{(2)}e'^2e'\cos(3n't - 2\omega - \omega')$$
$$+ M^{(3)}e^3\cos 3(n't - \omega) + M^{(4)}e'\gamma^2\cos(3n't - \omega' - 2\Pi) + M^{(5)}e\gamma^2\cos(3n't - \omega - 2\Pi).$$

Cette expression donnera

$$\begin{aligned}\delta R = (\delta v - \delta v').[M^{(1)} e e'^2 \sin(3n't - \omega - 2\omega') + 2M^{(2)} e^2 e' \sin(3n't - 2\omega - \omega')\\ + 3M^{(3)} e^3 \sin(3n't - 3\omega) + M^{(5)} e\gamma^2 \sin(3n't - \omega - 2\Pi)],\\ - 2\delta v'.[M^{(4)} e'\gamma^2 \sin(3n't - \omega' - 2\Pi) + M^{(5)} e\gamma^2 \sin(3n't - \omega - 2\Pi)],\\ + \delta r.\left[\frac{dM^{(0)}}{da} e'^3 \cos 3(n't - \omega') + \frac{dM^{(1)}}{da} e e'^2 \cos(3n't - \omega - 2\omega')\right.\\ + \frac{dM^{(2)}}{da} e^2 e' \cos(3n't - 2\omega - \omega') + \frac{dM^{(3)}}{da} e^3 \cos 3(n't - \omega)\\ \left. + \frac{dM^{(4)}}{da} e'\gamma^2 \cos(3n't - \omega' - 2\Pi) + \frac{dM^{(5)}}{da} e\gamma^2 \cos(3n't - \omega - 2\Pi)\right],\\ + \delta r'.\left[\frac{dM^{(0)}}{da'} e'^3 \cos 3(n't - \omega') + \frac{dM^{(1)}}{da'} e e'^2 \cos(3n't - \omega - 2\omega')\right.\\ + \frac{dM^{(2)}}{da'} e^2 e' \cos(3n't - 2\omega - \omega') + \frac{dM^{(3)}}{da'} e^3 \cos 3(n't - \omega)\\ \left. + \frac{dM^{(4)}}{da'} e'\gamma^2 \cos(3n't - \omega' - 2\Pi) + \frac{dM^{(5)}}{da'} e\gamma^2 \cos(3n't - \omega - 2\Pi)\right].\end{aligned}$$

Et en différentiant par rapport à nt, δv et δr, on aura

$$\begin{aligned}\frac{d.\delta R}{dt} = \frac{d.\delta v}{dt}.[M^{(0)} e e'^2 \sin(3n't - \omega - 2\omega') + 2M^{(1)} e^2 e' \sin(3n't - 2\omega - \omega')\\ + 3M^{(3)} e^3 \sin 3(n't - \omega) + M^{(5)} e\gamma^2 \sin(3n't - \omega - 2\Pi)],\\ + \frac{d.\delta r}{dt}.\left[\frac{dM^{(0)}}{da} e'^3 \cos 3(n't - \omega') + \frac{dM^{(1)}}{da} e e'^2 \cos(3n't - \omega - 2\omega')\right.\\ + \frac{dM^{(2)}}{da} e^2 e' \cos(3n't - 2\omega - \omega') + \frac{dM^{(3)}}{da} e^3 \cos 3(n't - \omega)\\ \left. + \frac{dM^{(4)}}{da} e'\gamma \cos(3n't - \omega' - 2\Pi) + \frac{dM^{(5)}}{da} e'\gamma^2 \cos(3n't - \omega - 2\Pi)\right].\end{aligned}$$

Si l'on suppose donc

$$\frac{\delta r}{a} = F \cos[2(n't - nt) + f], \qquad \delta v = G \sin[2(n't - nt) + g],$$

et par conséquent

$$\frac{d.\delta r}{adt} = -2(n' - n) F \sin[2(n't - nt) + f], \quad \frac{d.\delta v}{dt} = 2(n' - n) G \cos[2(n't - nt) + g].$$

En substituant ces valeurs dans l'expression précédente, elle deviendra

$$\frac{a'd.\delta R}{dt} = (n'-n).G.[a'M^{(1)}ee'^2\sin(5n't-2nt+g-\omega-2\omega')+2a'M^{(2)}e^2e'\sin(5n't-2nt+g-2\omega-\omega')$$
$$+3a'M^{(3)}e^3\sin(5n't-2nt+g-3\omega)+M^{(5)}e\gamma^2\sin(5n't-2nt+g-\omega-2\Pi)],$$
$$-(n'-n).F.\Big[aa'\frac{dM^{(0)}}{da}e'^3\sin(5n't-2nt+f-3\omega')+aa'\frac{dM^{(1)}}{da}ee'^2\sin(5n't-2nt+f-2\omega'-\omega)$$
$$+aa'\frac{dM^{(2)}}{da}e^2e'\sin(5n't-2nt+f-2\omega-\omega')+aa'\frac{dM^{(3)}}{da}e^3\sin(5n't-2nt+f-3\omega)$$
$$+aa'\frac{dM^{(4)}}{da}e'\gamma^2\sin(5n't-2nt+f-\omega'-2\Pi)+aa'\frac{dM^{(5)}}{da}e\gamma^2\sin(5n't-2nt+f-\omega-2\Pi)\Big].$$

Soit donc

$$A = (n'-n).\Big[a'M^{(1)}Gee'^2\cos(g-\omega-2\omega')+2a'M^{(2)}Ge^2e'\cos(g-2\omega-\omega')-3a'M^{(3)}Ge^3\sin(g-3\omega)$$
$$+M^{(5)}Ge\gamma^2\cos(g-\omega-2\Pi-aa'\frac{dM^{(0)}}{da}Fe'^3\cos(f-3\omega')-aa'\frac{dM^{(1)}}{da}Fee'^2\cos(f-2\omega'-\omega)$$
$$-aa'\frac{dM^{(2)}}{da}Fe^2e'\cos(f-2\omega-\omega')-aa'\frac{dM^{(3)}}{da}Fe^3\cos(f-3\omega)-aa'\frac{dM^{(4)}}{da}Fe'\gamma^2\cos(f-\omega'-2\Pi)$$
$$-aa'\frac{dM^{(5)}}{da}Fe\gamma^2\cos(f-\omega-2\Pi)\Big],$$

et désignons par B ce que devient la même quantité lorsqu'on y change les cosinus en sinus, on aura

$$\frac{a'd.\delta R}{dt} = A\sin(5n't-2nt) - B\cos(5n't-2nt).$$

Réduisons en nombres cette formule. Pour cela formons d'abord les six quantités $M^{(0)}$, $M^{(1)}$, $M^{(2)}$, $M^{(3)}$, $M^{(4)}$, $M^{(5)}$, et leurs différentielles. En faisant $i=3$ dans les formules données par Burckhardt, dans les Mémoires de l'Institut, pour 1808, on trouve, toute réduction faite,

$$d'M^{(0)} = -\frac{m'}{48}.\left(27b^{(0)}_{\frac{1}{2}}+51\alpha\frac{db^{(0)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha}+15\alpha^2\frac{d^2b^{(0)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^2}+\alpha^3\frac{d^3b^{(0)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^3}\right),$$

$$a'\,M^{(1)} = +\frac{m'}{16}\cdot\left(34b_{\frac{3}{2}}^{(1)} + 47\alpha\,\frac{db_{\frac{3}{2}}^{(1)}}{d\alpha} + 14\alpha^2\,\frac{d^2b_{\frac{3}{2}}^{(1)}}{d\alpha^2} + \alpha^3\,\frac{d^3b_{\frac{3}{2}}^{(1)}}{d\alpha^3} - 81\alpha\right),$$

$$a'\,M^{(2)} = -\frac{m'}{16}\cdot\left(30b_{\frac{1}{2}}^{(2)} + 42\alpha\,\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha} + 13\alpha^2\,\frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha^2} + \alpha^3\,\frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha^3}\right),$$

$$a'\,M^{(3)} = +\frac{m'}{48}\cdot\left(24b_{\frac{1}{2}}^{(3)} + 36\alpha\,\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha} + 12\alpha^2\,\frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha^2} + \alpha^3\,\frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha^3}\right),$$

$$\alpha'\,M^{(4)} = -\frac{m'\alpha}{16}\cdot\left(6b_{\frac{3}{2}}^{(1)} + \alpha\,\frac{db_{\frac{3}{2}}^{(1)}}{d\alpha}\right),$$

$$a'\,M^{(5)} = \frac{m'\alpha}{16}\cdot\left(3b_{\frac{3}{2}}^{(2)} + \alpha\,\frac{db_{\frac{3}{2}}^{(2)}}{d\alpha}\right),$$

$$aa'\frac{dM^{(0)}}{da} = -\frac{m'}{48}\cdot\left(78\alpha\,\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha} + 81\alpha^2\,\frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha^2} + 18\alpha^3\,\frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha^3} + \alpha^4\,\frac{d^4b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha^4}\right),$$

$$aa'\frac{dM^{(1)}}{da} = +\frac{m'}{16}\cdot\left(81\alpha\,\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha} + 75\alpha^2\,\frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha^2} + 17\alpha^3\,\frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha^3} + \alpha^4\,\frac{d^4b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha^4} - 81\alpha\right),$$

$$aa'\frac{dM^{(2)}}{da} = -\frac{m'}{16}\cdot\left(72\alpha\,\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha} + 68\alpha^2\,\frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha^2} + 16\alpha^3\,\frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha^3} + \alpha^4\,\frac{d^4b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha^4}\right),$$

$$aa'\frac{dM^{(3)}}{da} = +\frac{m'}{48}\cdot\left(60\alpha\,\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha} + 60\alpha^2\,\frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha^2} + 15\alpha^3\,\frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha^3} + \alpha^4\,\frac{d^4b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha^4}\right),$$

$$aa'\frac{dM^{(4)}}{da} = -\frac{m'\alpha}{16}\cdot\left(6b_{\frac{3}{2}}^{(1)} + 8\alpha\,\frac{db_{\frac{3}{2}}^{(1)}}{d\alpha} + \alpha^2\,\frac{d^2b_{\frac{3}{2}}^{(1)}}{d\alpha^2}\right),$$

$$aa'\frac{dM^{(5)}}{da} = \frac{m'\alpha}{16}\cdot\left(3b_{\frac{3}{2}}^{(2)} + 5\alpha\,\frac{db_{\frac{3}{2}}^{(2)}}{d\alpha} + \alpha^2\,\frac{d^2b_{\frac{3}{2}}^{(2)}}{d\alpha^2}\right).$$

En convertissant cette expression en nombres, à l'aide des valeurs rapportées dans le tableau I, on trouvera

$$a'\,M^{(1)} = m'.(1.31886+2.37582+0.66424+0.13053-2.76067) = m'.1.72878,$$
$$a'\,M^{(2)} = -m'.(0.48307+1.58199+0.85076+0.13005) = -m'.3.04587,$$

$$a'\,M^{(3)} = m'.(0.05899+0.29715+0.26269+0.05220) = m'.0.67103,$$
$$a'\,M^{(5)} = m'.(0.21289+0.24935) = m'.0.46224,$$
$$aa'\frac{dM^{(0)}}{da} = m'.(0.71670+1.44281+0.73755+0.15549) = -m'.3.05255,$$
$$aa'\frac{dM^{(1)}}{da} = m'.(4.09450+3.55840+2.21899+0.46397-2.76067) = m'.7.57519,$$
$$aa'\frac{dM^{(2)}}{da} = m'.(2.71198+4.44999+2.08101+0.48251) = -m'.9.72549,$$
$$aa'\frac{dM^{(3)}}{da} = m'.(0.49525+1.31350+0.78318+0.16555) = m'.2.75748,$$
$$aa'\frac{dM^{(4)}}{da} = -m'.(0.65141+2.26592+0.96199) = -m'.3.87932,$$
$$aa'\frac{dM^{(5)}}{da} = m'\,(0.21289+1.24672+0.94452) = m'.2.40413.$$

On trouve d'ailleurs, *Mécanique céleste*, tome 3^e^, page 121, et tome 4, page 339,

$$aF = -0.000289662, \qquad G = -613''61 \text{ déc.}$$
$$f = 0 \qquad g = +1^{\circ}.30' \text{ déc.},$$

d'où l'on tire

$$\log F = 6.7457908 -, \qquad \log G = 6.9857342 -.$$

Si à ces nombres on joint ceux qui sont rapportés dans le tableau I, on aura tout ce qui est nécessaire pour déterminer les valeurs numériques de A et B, et l'on trouvera

$$A = m'.[-0.016554 + 0.015221 + 0.012277 - 0.0001101 - 0.001905 + 0.041561 - 0.014844 - 0.0095407 + 0.0035858 + 0.00028781] = +m'.0.029979,$$
$$B = m'.[-0.0015896 - 0.047742 + 0.007055 - 0.00066971 - 0.019625 + 0.0048492 + 0.043471 - 0.0057447 - 0.0013308 + 0.0020063] = -m'0.0193203,$$

on aura donc ainsi

$$\frac{a'.d.\delta R}{m'dt} = + 0.029979 \sin(5n't - 2nt) + 0.0193203 \cos(5n't - 2nt),$$

et en multipliant cette expression par le nombre dont le logarithme est 0.6881121 —, on en conclura

$$\delta\zeta = - 0''.146194 \sin(5n't - 2nt) - 0''.094163 \cos(5n't - 2nt). \quad (d)$$

14. Déterminons la partie correspondante de $\delta\zeta'$.

L'expression précédente de δR, en la différentiant par rapport à $n't$, $\delta\nu'$, $\delta r'$, et en accentuant les quantités $M^{(0)}$, $M^{(1)}$, $M^{(2)}$, $M^{(3)}$, $M^{(4)}$, $M^{(5)}$, pour les rapporter à Saturne, donne

$$\begin{aligned}
\frac{d'.\delta R'}{dt} = {} & 3n'(\delta\nu - \delta\nu').[M'^{(1)} ee'^2 \cos(3n't - \omega - 2\omega') + 2M'^{(2)} e^2 e' \cos(3n't - 2\omega - \omega') \\
& + 3M'^{(3)} e^3 \cos 3(n't - \omega) + M'^{(5)} e\gamma^2 \cos(3n't - \omega - 2\Pi)], \\
& - 6n'\delta\nu'.[M'^{(4)} e'\gamma^2 \cos(3n't - \omega' - 2\Pi) + M'^{(5)} e\gamma^2 \cos(3n't - \omega - 2\Pi)], \\
& - 3n'\delta r.\left[\frac{dM'^{(0)}}{da} e'^3 \sin(3n't - \omega') + \frac{dM'^{(1)}}{da} ee'^2 \sin(3n't - \omega - 2\omega')\right. \\
& \quad + \frac{dM'^{(2)}}{da} e^2 e' \sin(3n't - 2\omega - \omega' + \frac{dM'^{(3)}}{da} e^3 \sin 3(nt' - \omega) \\
& \quad \left. + \frac{dM'^{(4)}}{da} e'\gamma^2 \sin(3n't - \omega' - 2\Pi) + \frac{dM'^{(5)}}{da} e\gamma^2 \sin(3n't - \omega - 2\Pi)\right], \\
& - 3n'\delta r'.\left[\frac{dM'^{(0)}}{da'} e'^3 \sin 3(n't - \omega') + \frac{dM'^{(1)}}{da'} ee'^2 \sin(3n't - \omega - 2\omega')\right. \\
& \quad + \frac{dM'^{(2)}}{da'} e^2 e' \sin(3n't - 2\omega - \omega') + \frac{dM'^{(3)}}{da'} e^3 \sin 3(n't - \omega) \\
& \quad \left. + \frac{dM'^{(4)}}{da'} e'\gamma^2 \sin(3n't - \omega' - 2\Pi) + \frac{dM'^{(5)}}{da'} e\gamma^2 \sin(3n't - \omega - 2\Pi)\right], \\
& - \frac{d.\delta\nu'}{dt}.[M'^{(1)} ee'^2 \sin(3n't - \omega - 2\omega') + 2M'^{(2)} e^2 e' \sin(3n't - 2\omega - \omega') \\
& \quad + 3M'^{(3)} e^3 \sin 3(n't - \omega) + 2M'^{(4)} e'\gamma^2 \sin(3n't - \omega' - 2\Pi) \\
& \quad + 3M'^{(5)} e\gamma^2 \sin(3n't - \omega - 2\Pi)], \\
& + \frac{d.\delta r'}{dt}.\left[\frac{dM'^{(0)}}{da'} e'^3 \sin 3(n't - \omega') + \frac{dM'^{(1)}}{da'} ee'^2 \sin(3n't - \omega - 2\omega')\right. \\
& \quad + \frac{dM'^{(2)}}{da'} e^2 e' \sin(3n't - 2\omega - \omega') + \frac{dM'^{(3)}}{da'} e^3 \sin 3(n't - \omega) \\
& \quad \left. + \frac{dM'^{(4)}}{da'} e'\gamma^2 \sin(3n't - \omega' - 2\Pi) + \frac{dM'^{(5)}}{da'} e\gamma^2 \sin(3n't - \omega - 2\Pi)\right].
\end{aligned}$$

Supposons

$$\frac{\delta r'}{a'} = \mathrm{F}' \cos\left[2(n't - nt) + f'\right], \quad \frac{d.\delta r'}{a'\,dt} = -2(n' - n)\,\mathrm{F}' \sin\left[2(n't - nt) + f'\right],$$

$$\delta v' = \mathrm{G}' \sin\left[2(n't - nt) + g'\right], \quad \frac{d.\delta v'}{dt} = 2(n' - n)\,\mathrm{G}' \cos\left[2(n't - nt) + g'\right].$$

Si l'on substitue ces valeurs ainsi que celles de δr et δv, dans l'expression précédente, on verra aisément que les termes qui dépendent de F′ et de G′ acquièrent le facteur $5n' - 2n$: on peut donc les supprimer à cause de la petitesse de ce coefficient, en observant de plus que $\frac{3n'}{2}$ est, à très peu près, égal à $n - n'$, on aura simplement

$$\begin{aligned}
\frac{a'.d'.\delta \mathrm{R}}{dt} = (n - n')\mathrm{G}.\big[&a'\mathrm{M}'^{(1)} ee'^2 \sin(5n't - 2nt + g - \omega - 2\omega') \\
&+ 2a'\mathrm{M}'^{(2)} e^2 e' \sin(5n't - 2nt + g - 2\omega - \omega') \\
&+ 3a'\mathrm{M}'^{(3)} e^3 \sin(5n't - 2nt + g - 3\omega) \\
&+ \mathrm{M}^{(5)} e\gamma^2 \sin(5n't - 2nt + g - \omega - 2\Pi)\big] \\
- (n - n')\mathrm{F}.\Big[&a a' \frac{d\mathrm{M}'^{(0)}}{da} e'^3 \sin(5n't - 2nt + f - 3\omega') \\
&+ a a' \frac{d\mathrm{M}'^{(1)}}{da} ee'^2 \sin(5n't - 2nt + f - 2\omega' - \omega) \\
&+ a a' \frac{d\mathrm{M}'^{(2)}}{da} e^2 e' \sin(5n't - 2nt + f - 2\omega - \omega') \\
&+ a a' \frac{d\mathrm{M}'^{(3)}}{da} e^3 \sin(5n't - 2nt + f - 3\omega) \\
&+ a a' \frac{d\mathrm{M}'^{(4)}}{da} e'\gamma^2 \sin(5n't - 2nt + f - \omega' - 2\Pi) \\
&+ a a' \frac{d\mathrm{M}'^{(5)}}{da} e\gamma^2 \sin(5n't - 2nt + f - \omega - 2\Pi)\Big].
\end{aligned}$$

Cette valeur peut se réduire en nombres au moyen de celle de $\frac{a'.d.\delta \mathrm{R}}{dt}$ trouvée plus haut. En effet, les quantités $\mathrm{M}'^{(1)}$, $\mathrm{M}'^{(2)}$, etc., s'obtiendront en faisant $i = 0$ dans les formules rapportées dans les Mémoires de l'Institut pour 1808.

Il est aisé de voir alors que les quatre quantités $M'^{(0)}$, $M'^{(2)}$, $M'^{(3)}$, $M'^{(4)}$, $M'^{(5)}$, et les cinq quantités $M^{(0)}$, $M^{(1)}$, $M^{(3)}$, $M^{(4)}$, $M^{(5)}$, sont entre elles dans le rapport des masses m et m' de Jupiter et de Saturne; les deux quantités $M'^{(1)}$ et $M^{(1)}$ diffèrent entre elles, parce qu'elles renferment la quantité $A^{(1)}$ et ses différentielles, et que cette quantité n'est pas la même pour les deux planètes. En effet, on aura, *Mécanique céleste*, tome 1, page 273, relativement à la planète m, troublée par la planète m',

$$A^{(1)} = \frac{a}{a'^2} - \frac{1}{a'} b_{\frac{1}{2}}^{(1)},$$

et relativement à m' troublé par m

$$A'^{(1)} = \frac{a'}{a^2} - \frac{1}{a'} b_{\frac{1}{2}}^{(1)} = \left(\frac{a}{a'^2} - \frac{1}{a'} b_{\frac{1}{2}}^{(1)}\right) + \frac{a'}{a^2} - \frac{a}{a'^2}.$$

En n'ayant égard qu'aux deux derniers termes de cette expression, on trouve

$$aa' \frac{dA'^{(1)}}{da} = -\frac{2}{\alpha^3} - \alpha, \quad a^2a' \frac{d^2A'^{(1)}}{da^2} = \frac{6}{\alpha^2}, \quad a^3a' \frac{d^3A'^{(1)}}{da^3} = -\frac{24}{\alpha^4},$$
$$a^4a' \frac{d^4A'^{(1)}}{da^4} = +\frac{120}{\alpha^5};$$

d'où il est aisé de conclure, par les formules rapportées plus haut, en ne considérant que la partie de $M'^{(1)}$ résultant des mêmes termes

$$a' M'^{(1)} = -\frac{m'}{16}\left(\frac{34}{\alpha^2} - 34\alpha - \frac{94}{\alpha^2} - 47\alpha + \frac{84}{\alpha^2} - \frac{24}{\alpha^2}\right) = m' \cdot \frac{81 \cdot \alpha}{16},$$
$$aa' \frac{dM'^{(1)}}{da} = -\frac{m'}{16}\left(-\frac{162}{\alpha^2} - 81\alpha + \frac{450}{\alpha^2} - \frac{408}{\alpha^2} + \frac{120}{\alpha^2}\right) = m' \cdot \frac{81 \cdot \alpha}{16};$$

ainsi donc, on aura

$$a'\,M'^{(0)} = \frac{m}{m'}.a'\,M^{(0)}, \qquad a'\,M'^{(1)} = \frac{m}{m'}.a'\,M^{(1)} + m.\frac{81\alpha}{16},$$

$$a'\,M'^{(2)} = \frac{m}{m'}.a'\,M^{(2)}, \qquad a'\,M'^{(3)} = \frac{m}{m'}.a'\,M^{(3)},$$

$$a'\,M'^{(4)} = \frac{m}{m'}.a'\,M^{(4)}, \qquad a'\,M'^{(5)} = \frac{m}{m'}.a'\,M^{(5)};$$

$$a'\frac{dM'^{(0)}}{da} = \frac{m}{m'}.a'\frac{dM^{(0)}}{da}, \qquad a'\frac{dM'^{(1)}}{da} = \frac{m}{m'}.a'\frac{dM^{(1)}}{da} + m.\frac{81\alpha}{16},$$

$$a'\frac{dM'^{(2)}}{da} = \frac{m}{m'}.a'\frac{dM^{(2)}}{da}, \qquad a'\frac{dM'^{(3)}}{da} = \frac{m}{m'}.a'\frac{dM^{(3)}}{da},$$

$$a'\frac{dM'^{(4)}}{da} = \frac{m}{m'}.a'\frac{dM^{(4)}}{da}, \qquad a'\frac{dM'^{(5)}}{da} = \frac{m}{m'}.a'\frac{dM^{(5)}}{da}.$$

Si l'on substitue ces valeurs dans l'expression de $\frac{a'.d'.\delta R'}{dt}$, et qu'on suppose

$$\frac{a'.d'.\delta R''}{mdt} = (n'-n)ee'^2.\frac{81\alpha}{16}.[G\cos(g-\omega-2\omega')-F\cos(f-\omega-2\omega')].\sin(5n't-2nt)$$
$$+(n'-n)ee'^2.\frac{81\alpha}{16}.[G\sin(g-\omega-2\omega')-F\sin(f-\omega-2\omega')].\cos(5n't-2nt),$$

il est évident qu'on aura

$$\frac{a'.d'.\delta R'}{mdt} = -\frac{a'.d.\delta R}{m'dt} - \frac{a'.d'.\delta R''}{mdt}.$$

Au moyen des valeurs numériques rapportées tableau I, on trouve

$$\frac{a'.d'.\delta R''}{mdt} = (-0.026436 + 0.015146)\sin(5n't - 2nt)$$
$$+ (0.0025385 - 0.0017672)\cos(5n't - 2nt)$$
$$= -0.011290\sin(5n't-2nt) + 0.0007713\cos(5n't-2nt).$$

Nous avons trouvé d'ailleurs

$$\frac{a'.d.\delta R}{m'dt} = +0.029979\sin(5n't - 2nt) + 0.0193203\cos(5n't - 2nt).$$

On aura donc enfin

$$\frac{a'.d'.\delta R'}{mdt} = -\,0.018689\sin(5n't - 2nt) - 0.020092\cos(5n't - 2nt),$$

d'où, en multipliant les deux termes par le nombre dont le logarithme est $1.0725999-$, on conclut

$$\delta\zeta' = +\,0''.22091\sin(5n't - 2nt) + 0''.23748\cos(5n't - 2nt). \quad (d')$$

15. Considérons la combinaison inverse des mêmes argumens.

Supposons d'abord

$$R = M^{(0)}\cos 2(n't - nt),$$

d'où il résultera

$$\delta R = 2(\delta v - \delta v')\,M^{(0)}\sin 2(n't - nt) + \left(\frac{dM^{(0)}}{da}\delta r + \frac{dM^{(0)}}{da'}\delta r'\right)\cos 2(n't - nt).$$

En différentiant cette valeur par rapport à nt, δv et δr, on aura

$$\begin{aligned}\frac{d.\delta R}{dt} &= 4n(\delta v' - \delta v)\,M^{(0)}\cos 2(n't - nt)\\ &+ 2n.\left(\delta r\frac{dM^{(0)}}{da} + \delta r'\frac{dM^{(0)}}{da'}\right)\sin 2(n't - nt)\\ &+ 2\frac{d.\delta v}{dt}M^{(0)}\sin 2(n't - nt)\\ &+ \frac{d.\delta r}{dt}.\frac{dM^{(0)}}{da}.\cos 2(n't - nt).\end{aligned}$$

Soient

$$\frac{\delta r}{a} = F\cos(3n't + f), \quad \frac{\delta r'}{a'} = F'\cos(3n't + f'),$$
$$\delta v = G\sin(3n't + g), \quad \delta v' = G'\sin(3n't + g'),$$

d'où l'on tire

$$\frac{d.\delta r}{adt} = -\,3n'F\sin(3n't + f), \quad \frac{d.\delta v}{dt} = 3n'G\cos(3n't + g).$$

La substitution de ces valeurs donnera

$$\frac{a'.d.\delta R}{dt} = 2nG'a'M^{(0)}\sin(5n't-2nt+g') + nF'a'^2\frac{dM^{(0)}}{da'}\sin(5n't-2nt+f')$$
$$-(2n-3n')Ga'M^{(0)}\sin(5n't-2nt+g)+(2n-3n').Faa'\frac{dM^{(0)}}{da}\sin(5n't-2nt)+f).$$

Pour réduire cette formule en nombres, il faudrait avoir les valeurs des quatre quantités F, G, F′, G′; or, ces valeurs n'ont point encore été calculées : au reste, il est très vraisemblable que la valeur de $\delta\zeta$ qui en résulterait serait insensible. Quant à la valeur de $\delta\zeta'$, si l'on observe qu'on a dans ce cas-ci $M^{(0)} = \frac{m'}{2}A^{(2)}$, et que la valeur de $A^{(2)}$ est la même pour les deux planètes, on verra aisément qu'elle sera liée à celle de $\delta\zeta$ par la relation ordinaire

$$\delta\zeta' = -\frac{m}{m'}\sqrt{\frac{a}{a'}}.\delta\zeta.$$

Calcul des valeurs de $\delta\zeta$ et de $\delta\zeta'$ qui résultent de la combinaison des argumens n't — nt *et* 4n't — nt.

16. Supposons d'abord

$$R = M^{(0)}e'^3\cos(4n't-nt-3\omega') + M^{(1)}ee'^2\cos(4n't-nt-2\omega'-\omega)$$
$$+ M^{(2)}e^2e'\cos(4n't-nt-2\omega-\omega') + M^{(3)}e^3\cos(4n't-nt-3\omega)$$
$$+ M^{(4)}e'\gamma^2\cos(4n't-nt-\omega'-2\Pi) + M^{(5)}e\gamma^2\cos(4n't-nt-\omega-2\Pi),$$

d'où résulte

$$\delta R = (\delta v-\delta v').[M^{(0)}e'^3\sin(4n't-nt-3\omega') + 2M^{(1)}ee'^2\sin(4n't-nt-2\omega'-\omega)$$
$$+ 3M^{(2)}e^2e'\sin(4n't-nt-2\omega-\omega') + 4M^{(3)}e^3\sin(4n't-nt-3\omega)$$
$$+ M^{(4)}e'\gamma^2\sin(4n't-nt-\omega'-2\Pi) + 2M^{(5)}e\gamma^2\sin(4n't-nt-\omega-2\Pi)]$$
$$-2\delta v'.[M^{(4)}e'\gamma^2\sin(4n't-nt-\omega'-2\Pi) + M^{(5)}e\gamma^2\sin(4n't-nt-\omega-2\Pi)]$$
$$+\delta r.\left[\frac{dM^{(0)}}{da}e'^3\cos(4n't-nt-3\omega') + \frac{dM^{(1)}}{da}ee'^2\cos(4n't-nt-2\omega'-\omega)\right.$$

$$+\frac{dM^{(2)}}{da}e^2e'\cos(4n't-nt-2\omega-\omega')+\frac{dM^{(3)}}{da}e^3\cos(4n't-nt-3\omega)$$
$$+\frac{dM^{(4)}}{da}e'\gamma^2\cos(4n't-nt-\omega'-2\Pi)+\frac{dM^{(5)}}{da}e\gamma^2\cos(4n't-nt-\omega-2\Pi)\Big]$$
$$+\delta r'.\Big[\frac{dM^{(0)}}{da'}e'^3\cos(4n't-nt-3\omega')+\frac{dM^{(1)}}{da'}ee'^2\cos(4n't-nt-2\omega'-\omega)$$
$$+\frac{dM^{(2)}}{da'}e^2e'\cos(4n't-nt-2\omega-\omega')+\frac{dM^{(3)}}{da'}e^3\cos(4n't-nt-3\omega)$$
$$+\frac{dM^{(4)}}{da'}e'\gamma^2\cos(4n't-nt-\omega'-2\Pi)+\frac{dM^{(5)}}{da'}e\gamma^2\cos(4n't-nt-\omega-2\Pi)\Big].$$

En différentiant cette expression par rapport à nt, δv et δr, on trouve

$$\frac{d.\delta R}{dt}=n(\delta v'-\delta v).[M^{(0)}e'^3\cos(4n't-nt-3\omega')+2M^{(1)}ee'^2\cos(4n't-nt-2\omega'-\omega)$$
$$+3M^{(2)}e^2e'\cos(4n't-nt-2\omega-\omega')+4M^{(3)}e^3\cos(4n't-nt-3\omega)$$
$$+M^{(4)}e'\gamma^2\cos(4n't-nt-\omega'-2\Pi)+2M^{(5)}e\gamma^2\cos(4n't-nt-\omega-2\Pi)]$$
$$+2n\delta v'.[M^{(4)}e'\gamma^2\cos(4n't-nt-\omega'-2\Pi)+M^{(5)}e\gamma^2\cos(4n't-nt-\omega-2\Pi)]$$
$$+n\delta r.\Big[\frac{dM^{(0)}}{da}e'^3\sin(4nt-nt-3\omega')+\frac{dM^{(1)}}{da}ee'^2\sin(4nt'-nt-2\omega'-\omega)$$
$$+\frac{dM^{(2)}}{da}e^2e'\sin(4n't-nt-2\omega-\omega')+\frac{dM^{(3)}}{da}e^3\sin(4n't-nt-3\omega)$$
$$+\frac{dM^{(4)}}{da}e'\gamma^2\sin(4n't-nt-\omega'-2\Pi)+\frac{dM^{(5)}}{da}e\gamma^2\sin(4n't-nt-\omega-2\Pi)\Big]$$
$$+n\delta r'.\Big[\frac{dM^{(0)}}{da'}e'^3\sin(4n't-nt-3\omega')+\frac{dM^{(1)}}{da'}ee'^2\sin(4n't-nt-2\omega'-\omega)$$
$$+\frac{dM^{(2)}}{da'}e^2e'\sin(4n't-nt-2\omega-\omega')+\frac{dM^{(3)}}{da'}e^3\sin(4n't-nt-3\omega)$$
$$+\frac{dM^{(4)}}{da'}e'\gamma^2\sin(4n't-nt-\omega'-2\Pi)+\frac{dM^{(5)}}{da'}e\gamma^2\sin(4n't-nt-\omega-2\Pi)\Big]$$
$$+\frac{d.\delta v}{dt}.[M^{(0)}e'^3\sin(4n't-nt-3\omega')+2M^{(1)}ee'^2\sin(4n't-nt-2\omega'-\omega)$$
$$+3M^{(2)}e^2e'\sin(4n't-nt-2\omega-\omega')+4M^{(3)}e^3\sin(4n't-nt-3\omega)$$
$$+M^{(4)}e'\gamma^2\sin(4n't-nt-\omega'-2\Pi)+2M^{(5)}e\gamma^2\sin(4n't-nt-\omega-2\Pi)]$$
$$+\frac{d.\delta r}{dt}.\Big[\frac{dM^{(0)}}{da}e'^3\cos(4n't-nt-3\omega')+\frac{dM^{(1)}}{da}ee'^2\cos(4n't-nt-2\omega'-\omega)$$
$$+\frac{dM^{(2)}}{da}e^2e'\cos(4n't-nt-2\omega-\omega')+\frac{dM^{(3)}}{da}e^3\cos(4n't-nt-3\omega)$$
$$+\frac{dM^{(4)}}{da}e'\gamma^2\cos(4n't-nt-\omega'-2\Pi)+\frac{dM^{(5)}}{da}e\gamma^2\cos(4n't-nt-\omega-2\Pi)\Big].$$

Soient

$$\frac{\delta r}{a} = \mathrm{F}\cos(n't - nt + f), \qquad \frac{\delta r'}{a'} = \mathrm{F}'\cos(n't - nt + f'),$$
$$\delta v = \mathrm{G}\sin(n't - nt + g), \qquad \delta v' = \mathrm{G}'\sin(n't - nt + g'),$$

d'où l'on tire

$$\frac{d.\delta r}{adt} = -(n'-n)\,\mathrm{F}\sin(n't-nt+f), \qquad \frac{d.\delta r'}{a'} = -(n'-n)\,\mathrm{F}'\sin(n't-nt+f'),$$
$$\frac{d.\delta v}{dt} = (n'-n)\,\mathrm{G}\cos(n't-nt+g), \qquad \frac{d.\delta v'}{dt} = (n'-n)\,\mathrm{G}'\cos(n't-nt+g').$$

La substitution de ces valeurs dans l'expression précédente, donnera

$$\begin{aligned}
\frac{a'.d\,\delta\mathrm{R}}{dt} = \frac{n'-2n}{2}.\mathrm{G}.[&a'\mathrm{M}^{(0)}e'^3\sin(5n't - 2nt + g - 3\omega')\\
&+2a'\mathrm{M}^{(1)}ee'^2\sin(5n't - 2nt + g - 2\omega' - \omega)\\
&+3a'\mathrm{M}^{(2)}e^2e'\sin(5n't - 2nt + g - 2\omega' - \omega)\\
&+4a'\mathrm{M}^{(3)}e^3\sin(5n't - 2nt + g - 3\omega)\\
&+3a'\mathrm{M}^{(4)}e'\gamma'^2\sin(5n't - 2nt + g - \omega' - 2\Pi)\\
&+4a'\mathrm{M}^{(5)}e\gamma'^2\sin(5n't - 2nt + g - \omega - 2\Pi)]\\
+\frac{n}{2}.\mathrm{G}'.[&a'\mathrm{M}^{(0)}e'^3\sin(5n't - 2nt + g' - 3\omega')\\
&+2a'\mathrm{M}^{(1)}ee'^2\sin(5n't - 2nt + g' - 2\omega' - \omega)\\
&+3a'\mathrm{M}^{(2)}e^2e'\sin(5n't - 2nt + g' - 2\omega' - \omega)\\
&+4a'\mathrm{M}^{(3)}e^3\sin(5n't - 2nt + g' - 3\omega)\\
&+3a'\mathrm{M}^{(4)}e'\gamma'^2\sin(5n't - 2nt + g' - \omega' - 2\Pi)\\
&+4a'\mathrm{M}^{(5)}e\gamma'^2\sin(5n't - 2nt + g' - \omega - 2\Pi)]\\
-\frac{n'-2n}{2}.\mathrm{F}.\Big[&aa'\frac{d\mathrm{M}^{(0)}}{da}e'^3\sin(5n't - 2nt + f - 3\omega')\\
&+aa'\frac{d\mathrm{M}^{(1)}}{da}e'^2e\sin(5n't - 2nt + f - 2\omega' - \omega)\\
&+aa'\frac{d\mathrm{M}^{(2)}}{da}e^2e'\sin(5n't - 2nt + f - 2\omega - \omega')\\
&+aa'\frac{d\mathrm{M}^{(3)}}{da}e^3\sin(5n't - 2nt + f - 3\omega)\\
&+aa'\frac{d\mathrm{M}^{(4)}}{da}e'\gamma'^2\sin(5n't - 2nt + f - \omega' - 2\Pi)\\
&+aa'\frac{d\mathrm{M}^{(5)}}{da}e\gamma'^2\sin(5n't - 2nt - + f - \omega - 2\Pi)\Big]
\end{aligned}$$

$$+\frac{n}{2}.F'.\Big[a'^2\frac{dM^{(0)}}{da'}e'^3\sin(5n't-2nt+f'-3\omega')$$
$$+a'^2\frac{dM^{(1)}}{da'}ee'^2\sin(5n't-2nt+f'-2\omega'-\omega)$$
$$+a'^2\frac{dM^{(2)}}{da'}e^2e'\sin(5n't-2nt+f'-2\omega-\omega')$$
$$+a'^2\frac{dM^{(3)}}{da'}e^3\sin(5n't-2nt+f'-3\omega)$$
$$+a'^2\frac{dM^{(4)}}{da'}e'\gamma^2\sin(5n't-2nt+f'-\omega'-2\Pi)$$
$$+a'^2\frac{dM^{(5)}}{da'}e\gamma^2\sin(5n't-2nt+f'-\omega-2\Pi)\Big].$$

Si l'on fait donc

$$A=\frac{n'-2n}{2}.G.[a'M^{(0)}e'^3\cos(g-3\omega')+2a'M^{(1)}ee'^2\cos(g-2\omega'-\omega)$$
$$+3a'M^{(2)}e^2e'\cos(g-2\omega-\omega')+4a'M^{(3)}e^3\cos(g-3\omega)$$
$$+3a'M^{(4)}e'\gamma^2\cos(g-\omega'-2\Pi)+4a'M^{(5)}e\gamma^2\cos(g-\omega-2\Pi)]$$
$$+\frac{n}{2}.G'.[a'M^{(0)}e'^3\cos(g'-3\omega')+2a'M^{(1)}ee'^2\cos(g'-2\omega'-\omega)$$
$$+3a'M^{(2)}e^2e'\cos(g'-2\omega-\omega')+4a'M^{(3)}e^3\cos(g'-3\omega)$$
$$+3a'M^{(4)}e'\gamma^2\cos(g'-\omega'-2\Pi)+4a'M^{(5)}e\gamma^2\cos(g'-\omega-2\Pi)]$$
$$-\frac{n'-2n}{2}.F.\Big[aa'\frac{dM^{(0)}}{da}e'^3\cos(f-3\omega')+aa'\frac{dM^{(1)}}{da}e'^2e\cos(f-2\omega'-\omega)$$
$$+aa'\frac{dM^{(2)}}{da}e^2e'\cos(f-2\omega-\omega')+aa'\frac{dM^{(3)}}{da}e^3\cos(f-3\omega)$$
$$+aa'\frac{dM^{(4)}}{da}e'\gamma^2\cos(f-\omega'-2\Pi)+aa'\frac{dM^{(5)}}{da}e\gamma^2\cos(f-\omega-2\Pi)\Big]$$
$$+\frac{n}{2}.F'.\Big[a'^2\frac{dM^{(0)}}{da'}e'^3\cos(f'-3\omega')+a'^2\frac{dM^{(1)}}{da'}ee'^2\cos(f'-2\omega'-\omega)$$
$$+a'^2\frac{dM^{(2)}}{da'}e'e^2\cos(f'-2\omega-\omega')+a'^2\frac{dM^{(3)}}{da'}e^3\cos(f'-3\omega)$$
$$+a'^2\frac{dM^{(4)}}{da'}e'\gamma^2\cos(f'-\omega'-2\Pi)+a'^2\frac{dM^{(5)}}{da'}e\gamma^2\cos(f'-\omega-2\Pi)\Big].$$

Et qu'on désigne par B la même quantité dans laquelle on changera simplement les cosinus en sinus, on aura

$$\frac{a'.d.\delta R}{dt}=A\sin(5n't-2nt)+B\cos(5n't-2nt).$$

Pour réduire cette formule en nombres, on formera d'abord les valeurs des quantités $M^{(0)}$, $M^{(1)}$, etc., en faisant $i=4$ dans les formules données par Burckhardt dans les Mémoires de l'Institut pour 1808 : on trouve, toute réduction faite,

$$a'M^{(0)} = \frac{m'}{48}\left(256\alpha - 142b_{\frac{1}{2}}^{(1)} - 114\alpha\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha} - 21\alpha^2\frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha^2} - \alpha^3\frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha^3}\right),$$

$$a'M^{(1)} = \frac{m'}{16}\left(152b_{\frac{1}{2}}^{(2)} + 108\alpha\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha} + 20\alpha^2\frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha^2} + \alpha^3\frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha^3}\right),$$

$$a'M^{(2)} = -\frac{m'}{16}\left(147b_{\frac{1}{2}}^{(3)} + 101\alpha\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha} + 19\alpha^2\frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha^2} + \alpha^3\frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha^3}\right),$$

$$a'M^{(3)} = \frac{m'}{48}\left(136b_{\frac{1}{2}}^{(4)} + 93\alpha\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{d\alpha} + 18\alpha^2\frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{d\alpha^2} + \alpha^3\frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{d\alpha^3}\right),$$

$$a'M^{(4)} = -\frac{m'\alpha}{16}\left(8b_{\frac{3}{2}}^{(2)} + \alpha\frac{db_{\frac{3}{2}}^{(2)}}{d\alpha}\right),$$

$$a'M^{(5)} = \frac{m'\alpha}{16}\left(5b_{\frac{3}{2}}^{(3)} + \alpha\frac{db_{\frac{3}{2}}^{(3)}}{d\alpha}\right),$$

$$aa'\frac{dM^{(0)}}{da} = \frac{m'}{48}\left(256.\alpha - 256.\alpha\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha} - 156\alpha^2\frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha^2} - 24\alpha^3\frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha^3} - \alpha^4\frac{d^4b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha^4}\right),$$

$$aa'\frac{dM^{(1)}}{da} = \frac{m'}{16}\left(260\alpha\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha} + 148\alpha^2\frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha^2} + 23\alpha^3\frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha^3} + \alpha^4\frac{d^4b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha^4}\right),$$

$$aa'\frac{dM^{(2)}}{da} = -\frac{m'}{16}\left(248\alpha\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha} + 139\alpha^2\frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha^2} + 22\alpha^3\frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha^3} + \alpha^4\frac{d^4b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha^4}\right),$$

$$aa'\frac{dM^{(3)}}{da} = \frac{m'}{48}\left(229\alpha\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{d\alpha} + 129\alpha^2\frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{d\alpha^2} + 21\alpha^3\frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{d\alpha^3} + \alpha^4\frac{d^4b_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{d\alpha^4}\right),$$

$$aa'\frac{d\mathrm{M}^{(4)}}{da} = -\frac{m'\alpha}{16}\cdot\left(8b_{\frac{3}{2}}^{(2)} + 10\alpha\frac{db_{\frac{3}{2}}^{(2)}}{dx} + \alpha^2\frac{d^2b_{\frac{3}{2}}^{(2)}}{dx^2}\right),$$

$$aa'\frac{d\mathrm{M}^{(5)}}{da} = \frac{m'\alpha}{16}\cdot\left(5b_{\frac{3}{2}}^{(3)} + 7\alpha\frac{db_{\frac{3}{2}}^{(3)}}{dx} + \alpha^2\frac{d^2b_{\frac{3}{2}}^{(3)}}{dx^2}\right).$$

La substitution des valeurs numériques des quantités $b_{\frac{1}{2}}^{(1)}$, $b_{\frac{1}{2}}^{(2)}$, etc., a donné

$$\begin{aligned}
a'\,\mathrm{M}^{(0)} &= m'(2.90836 - 1.83606 - 1.92092 - 0.33213 - 0.04351\\
&= -m'.1.22426,\\
a'\,\mathrm{M}^{(1)} &= m'(2.44756 + 4.06798 + 1.30883 + 0.13006)\\
&= +m'.7.95443,\\
a'\,\mathrm{M}^{(2)} &= -m'(1.08389 + 2.50102 + 1.24782 + 0.15664)\\
&= -m'.4.98937,\\
a'\,\mathrm{M}^{(3)} &= m'.(0.16023 + 0.47892 + 0.33406 + 0.05763)\\
&= +m'.1.03094,\\
a'\,\mathrm{M}^{(4)} &= -m'(0.56771 + 0.24934) = -m'.0.81705,\\
a'\,\mathrm{M}^{(5)} &= m'(0.22079 + 0.19698) = m'.0.41778,\\
aa'\frac{d\mathrm{M}^{(0)}}{da} &= m'(2.90836 - 4.31354 - 2.46715 - 1.04422 - 0.15465)\\
&= -m'.5.07120,\\
aa'\frac{d\mathrm{M}^{(1)}}{da} &= m'(9.79327 + 9.68533 + 2.99124 + 0.48251)\\
&= m'.22.95235,\\
aa'\frac{d\mathrm{M}^{(2)}}{da} &= -m'(6.14110 + 9.12880 + 3.44599 + 0.49665)\\
&= -m'.19.21254,\\
aa'\frac{d\mathrm{M}^{(3)}}{da} &= m'(1.17927 + 2.39409 + 1.21020 + 1.18677)\\
&= m'.4.97033,\\
aa'\frac{d\mathrm{M}^{(4)}}{da} &= -m'(0.56771 + 2.49345 + 0.94452) = -m'.4.00568,\\
aa'\frac{d\mathrm{M}^{(5)}}{da} &= m'(0.22079 + 1.37887 + 0.88076) = m'.2.48042.
\end{aligned}$$

Ensuite au moyen de l'équation

$$a'^2\frac{dM^{(i)}}{da'}+aa'\frac{dM^{(i)}}{da}=-a'M^{(i)},$$

on conclura

$$a'^2\frac{dM^{(0)}}{da'}=\quad m'(1.22425+\ 5.07120)=\quad m'.\ 6.29545,$$
$$a'^2\frac{dM^{(1)}}{da'}=-m'(7.95443+22.95235)=-m'.30.90678,$$
$$a'^2\frac{dM^{(2)}}{da'}=\quad m'(4.98937+19.21254)=\quad m'.24.20191,$$
$$a'^2\frac{dM^{(3)}}{da'}=-m'(1.03094+\ 4.97033)=-m'.\ 6.00127,$$
$$a'^2\frac{dM^{(4)}}{da'}=\quad m'(0.81705+\ 4.00568)=\quad m'.\ 4.82273,$$
$$a'^2\frac{dM^{(5)}}{da'}=-m'(0.41778+\ 2.48042)=-m'.\ 2.89820.$$

Les valeurs des quantités F, G, F′, G′, sont données *Mécanique céleste*, tome 4, pages 239 et 342. On trouve

$aF=+0.000652$, $f=1°.50$ déc., $G=+247''.35$ déc., $g=1°.28'$ déc.,
$a'F'=+0.00811$, $f'=4°.40$ déc., $G'=-89''.40$ déc., $g'=-86°.73'$ déc.,

d'où l'on tire

$$\log F=6.0981469+,\qquad \log G=6.5894318+,$$
$$\log F'=6.9295698+,\qquad \log G'=6.1474574-.$$

A l'aide de ces valeurs on trouvera

$$\begin{aligned}A=m'.[&-0.0008731+8.0816080-0.0199437-0.0134800+0.0020947\\&+0.0002148+0.0015921+0.0017088-0.0148137+0.0011510\\&+0.0002725-0.0002794+0.0011835-0.0379930+0.0082144\\&+0.0052125-0.0011042-0.0001040-0.0014361+0.2144532\\&-0.0566463-0.0253694+0.0058289+0.0002289]\\&=+m'.0.1564457,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B = m'.[&+0.007\,3252-0.007\,7182-0.062\,8590+0.007\,7204+0.000\,8306\\&-0.001\,2965+0.000\,5015-0.018\,4692+0.001\,7963+0.003\,3212\\&-0.000\,4309-0.000\,1022-0.009\,7880+0.003\,5282+0.026\,0460\\&-0.003\,0544-0.000\,4399+0.000\,6207+0.051\,9560-0.040\,1880\\&-0.134\,6600+0.017\,7730+0.001\,7173-0.003\,1144]\\=&-m'.0.158\,9840.\end{aligned}$$

On aura donc ainsi

$$\frac{a'd.\delta R}{m'dt} = 0.156\,4457\sin(5n't-2nt) - 0.158\,9840\cos(5n't-2nt),$$

d'où, en multipliant par le nombre dont le logarithme est 0.6881121 —, on conclura

$$\delta\zeta = -0''.762\,901\sin(5n't-2nt) + 0''.775\,292\cos(5n't-2nt). \quad (e)$$

17. Pour déterminer la partie correspondante de $\delta\zeta'$, différentions par rapport à la caractéristique d' la valeur précédente de δR, en marquant d'un accent les lettres $M^{(0)}$, $M^{(1)}$, $M^{(2)}$, $M^{(3)}$, $M^{(4)}$ et $M^{(5)}$, et substituons dans l'expression résultante pour δr, δv, $\delta r'$ et $\delta v'$, les valeurs que nous avons supposées à ces quantités. On trouvera ainsi

$$\begin{aligned}\frac{a'.d'.\delta R'}{dt} = 2n'G.[&a'M'^{(0)}e'^3\sin(5n't-2nt+g-3\omega')\\&+2a'M'^{(1)}ee'^2\sin(5n't-2nt+g-2\omega'-\omega)\\&+3a'M'^{(2)}e^2e'\sin(5n't-2nt+g-2\omega-\omega')\\&+4a'M'^{(3)}e^3\sin(5n't-2nt+g-3\omega)\\&+3a'M'^{(4)}e'\gamma'^2\sin(5n't-2nt+g-\omega'-2\Pi)\\&+4a'M'^{(5)}e\gamma'^2\sin(5n't-2nt+g-\omega-2\Pi)]\\-\frac{5n'-2n}{2}.G'.[&a'M'^{(0)}e'^3\sin(5n't-2nt+g'-3\omega')\\&+2a'M'^{(1)}ee'^2\sin(5n't-2nt+g'-2\omega'-\omega)\\&+3a'M'^{(2)}e^2e'\sin(5n't-2nt+g'-2\omega-\omega')\\&+4a'M'^{(3)}e^3\sin(5n't-2nt+g'-3\omega)\\&+3a'M'^{(4)}e'\gamma'^2\sin(5n't-2nt+g'-\omega'-2\Pi)\\&+4a'M'^{(5)}e\gamma'^2\sin(5n't-2nt+g'-\omega-2\Pi)]\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- 2n'.\mathrm{F}.\Big[aa'\frac{d\mathrm{M}'^{(0)}}{da}e'^{3}\sin(5n't - 2nt + f - 3\omega') \\
&\quad + aa'\frac{d\mathrm{M}'^{(1)}}{da}ee'^{2}\sin(5n't - 2nt + f - 2\omega' - \omega) \\
&\quad + aa'\frac{d\mathrm{M}'^{(2)}}{da}e^{2}e'\sin(5n't - 2nt + f - 2\omega - \omega') \\
&\quad + aa'\frac{d\mathrm{M}'^{(3)}}{da}e^{3}\sin(5n't - 2nt + f - 3\omega) \\
&\quad + aa'\frac{d\mathrm{M}'^{(4)}}{da}e'\gamma'^{2}\sin(5n't - 2nt + f - \omega' - 2\Pi) \\
&\quad + aa'\frac{d\mathrm{M}'^{(5)}}{da}e\gamma^{2}\sin(5n't - 2nt + f - \omega - 2\Pi)\Big] \\
&- \frac{5n' - 2n}{2}.\mathrm{F}'.\Big[a'^{2}\frac{d\mathrm{M}'^{(0)}}{da'}e'^{3}\sin(5n't - 2nt + f' - 3\omega') \\
&\quad + a'^{2}\frac{d\mathrm{M}'^{(1)}}{da'}ee'^{2}\sin(5n't - 2nt + f' - 2\omega' - \omega) \\
&\quad + a'^{2}\frac{d\mathrm{M}'^{(2)}}{da'}e^{2}e'\sin(5n't - 2nt + f' - 2\omega - \omega') \\
&\quad + a'^{2}\frac{d\mathrm{M}'^{(3)}}{da'}e^{3}\sin(5n't - 2nt + f' - 3\omega) \\
&\quad + a'^{2}\frac{d\mathrm{M}'^{(4)}}{da'}e'\gamma'^{2}\sin(5n't - 2nt + f' - \omega' - 2\Pi) \\
&\quad + a'\frac{d\mathrm{M}'^{(5)}}{da'}e\gamma^{2}\sin(5n't - 2nt + f' - \omega - 2\Pi)\Big].
\end{aligned}
$$

Si l'on compare cette expression à celle de $\frac{a'd.\delta\mathrm{R}}{dt}$, en observant qu'on a à très peu près $\frac{n'-2n}{2} = -2n'$, $\frac{n}{2} = \frac{5n'-n}{2}$, et que les cinq quantités $\mathrm{M}'^{(1)}$, $\mathrm{M}'^{(2)}$, $\mathrm{M}'^{(3)}$, $\mathrm{M}'^{(4)}$, $\mathrm{M}'^{(5)}$, ne contenant pas la quantité $\mathrm{A}^{(1)}$ qui est différente pour les deux planètes, on a

$$
\mathrm{M}'^{(1)} = \frac{m}{m'}.\mathrm{M}^{(1)}, \quad \mathrm{M}'^{(2)} = \frac{m}{m'}.\mathrm{M}^{(2)}, \quad \mathrm{M}'^{(3)} = \frac{m}{m'}.\mathrm{M}^{(3)},
$$

$$
\mathrm{M}'^{(4)} = \frac{m}{m'}.\mathrm{M}^{(4)}, \quad \mathrm{M}'^{(5)} = \frac{m}{m'}.\mathrm{M}^{(5)};
$$

on voit qu'on peut faire

$$\frac{a'.d'.\delta R'}{mdt} = -\frac{a'.d.\delta R}{m'dt} - \frac{a'.d.\delta R''}{m'dt}.$$

En désignant par $\delta R''$ ce que devient la fonction δR, lorsque dans l'expression de $M^{(0)}$ on substitue $2\alpha - \frac{1}{\alpha^2}$ à la place de $b_{\frac{1}{2}}^{(1)}$, de sorte que si l'on nomme $M''^{(0)}$ ce que devient alors $M^{(0)}$, on aura

$$\begin{aligned}\frac{a'.d.\delta R''}{dt} &= \frac{n' - 2n}{2}.G.a'M''^{(0)}.e'^3\sin(5n't - 2nt + g - 3\omega')\\ &+ \frac{n}{2}.G'.a'M''^{(0)}e'^3\sin(5n't - nt + g' - 3\omega')\\ &- \frac{n' - 2n}{2}.F.aa'\frac{dM''^{(0)}}{da}.e'^3\sin(5n't - 2nt + f - 3\omega')\\ &+ \frac{n}{2}.F'.a'^2\frac{dM''}{da'^2}.e'^3\sin(5n't - 2nt + f' - 3\omega').\end{aligned}$$

Quant à la quantité $M''^{(0)}$ et à ses différentielles, on aura pour les déterminer

$$\begin{aligned}a'M''^{(0)} &= \frac{m'}{48}.\left(256.\alpha - 284.\alpha + \frac{142}{\alpha^2} - 228.\alpha + \frac{228}{\alpha^2} + \frac{126}{\alpha^2} - \frac{24}{\alpha^2}\right)\\ &= \frac{m'}{48}.\left(\frac{16}{\alpha^2} - 256\alpha\right),\\ aa'\frac{dM''^{(0)}}{da} &= \frac{m'}{48}.\left(256.\alpha - 512.\alpha - \frac{512}{\alpha^2} + \frac{936}{\alpha^2} - \frac{576}{\alpha^2} + \frac{120}{\alpha^2}\right)\\ &= -\frac{m'}{48}.\left(\frac{32}{\alpha^2} + 256\alpha\right).\end{aligned}$$

En réduisant ces expressions en nombres, on trouve

$$a'M''^{(0)} = -m'.1.78743, \qquad aa'\frac{dM''^{(0)}}{da} = -m'.5.15022,$$

d'où l'on conclut

$$a'^2\frac{dM''^{(0)}}{da'} = m'.6.93765.$$

Avec ces valeurs et celles qui précèdent on aura

$$\frac{a'.d.\delta R''}{m'dt} = (-0.0012748+0.0023245+0.0012020-0.0015826\,1)\sin(5n't-2nt)$$
$$+(0.0106951+0.0007322-0.0099405+0.0572550)\cos(5n't-2nt)$$
$$= +0.0006691\sin(5n't-2nt)+0.0587416\cos(5n't-2nt).$$

Nous avons trouvé

$$\frac{a'.d.\delta R}{m'dt} = +0.156447\sin(5n't-2nt) - 0.1589840\cos(5n't-2nt),$$

d'où l'on conclura

$$\frac{a'.d'.\delta R'}{mdt} = -0.1571148\sin(5n't-2nt) + 0.1002424\cos(5n't-2nt).$$

En multipliant par le nombre dont le logarithme est 1.0725999 —, les deux termes de cette expression, on aura enfin

$$\delta\zeta' = 1''.85702\sin(5n't-2nt) - 1''.18481\cos(5n't-2nt) \qquad (e')$$

18. Considérons la combinaison inverse des mêmes argumens. Pour cela supposons

$$R = M^{(0)}\cos(n't-nt),$$

d'où il résulte

$$\delta R = (\delta v - \delta v')\,M^{(0)}\sin(n't-nt)$$
$$+\left(\delta r\frac{dM^{(0)}}{da}+\delta r'\frac{dM^{(0)}}{da'}\right)\cos(n't-nt).$$

En différentiant cette expression par rapport à nt, δv et δr, on aura

$$\frac{d.\delta R}{dt} = n(\delta v'-\delta v)\,M^{(0)}\cos(n't-nt)$$

$$+ n\left(\delta r \frac{dM^{(0)}}{da} + \delta r' \frac{dM^{(0)}}{da'}\right) \sin(n't - nt)$$
$$+ \frac{d.\delta v}{dt} . M^{(0)} (\sin n't - nt)$$
$$+ \frac{d.\delta r}{dt} . \frac{dM^{(0)}}{da} \cos(n't - nt).$$

Soient donc

$$\frac{\delta r}{a} = F \cos(4n't + nt + f), \quad \frac{\delta r'}{a'} = F' \cos(4n't - nt + f'),$$
$$\delta v = G \sin(4n't - nt + g), \quad \delta v' = G' \sin(4n't - nt + g').$$

Si l'on substitue ces valeurs et leurs différentielles dans l'expression précédente, on trouvera

$$\frac{d'.d.\delta R}{dt} = (2n' - n).M^{(0)} G \sin(5n't - 2nt + g)$$
$$- (2n' - n).aa' \frac{dM^{(0)}}{da} F \sin(5n't - 2nt + f)$$
$$+ \frac{n}{2}.M^{(0)} G' \sin(5n't - 2nt + g')$$
$$+ \frac{n}{2}.a'^2 \frac{dM^{(0)}}{da'} F' \sin(5'nt - 2nt + f').$$

19. Déterminons la partie correspondante de $\frac{d'.\delta R'}{dt}$.

En différentiant par rapport à $n't$, $\delta v'$, et $\delta r'$, la valeur précédente de δR, on aura

$$\frac{d'.\delta R'}{dt} = n' (\delta v - \delta v').M'^{(1)} \cos(n't - nt)$$
$$- n'\left(\delta r \frac{dM'^{(1)}}{da} + \delta r' \frac{dM'^{(1)}}{da'}\right) \sin(n't - nt)$$
$$- \frac{d.\delta v'}{dt} . M'^{(1)} . \sin(n't - nt)$$
$$+ \frac{d.\delta r'}{dt} . \frac{dM'^{(1)}}{da'} . \cos(n't - nt).$$

En substituant dans cette expression pour δv, $\delta v'$,

$\frac{\partial r}{a}$, $\frac{\partial r'}{a'}$, leurs valeurs, et en observant qu'on a à très peu près $\frac{n'}{2} = -(2n' - n)$, $\frac{5n' - n}{2} = \frac{n}{2}$, on trouvera

$$\begin{aligned}\frac{a'.d'.\partial R'}{dt} = &- (2n' - n)\, a'\, M'^{(1)}\, G \sin(5n't - 2nt + g)\\ &+ (2n' - n)\, aa' \frac{dM'^{(1)}}{da'} F \sin(5n't - 2nt + f)\\ &- \frac{n}{2} a' M'^{(1)} G' \sin(5n't - 2nt + g')\\ &- \frac{n}{2} a'^2 \frac{dM'^{(1)}}{da'} F' \sin(5n't - 2nt + f').\end{aligned}$$

On a d'ailleurs dans ce cas, pour déterminer $M^{(1)}$, l'équation $M^{(1)} = m' A^{(1)}$, et il est clair, d'après ce qui précède, qu'on aura $M'^{(1)}$ en changeant dans cette équation $A^{(1)}$ en $A^{(1)} + \left(\frac{a'}{a^2} - \frac{a}{a'^2}\right)$, et en multipliant par le rapport $\frac{m}{m'}$ la valeur résultante. D'après cela, si l'on ne considère que les termes dépendans de la seconde partie de $A'^{(1)}$, on aura

$$a' M^{(1)} = m\left(\frac{1}{\alpha^2} - \alpha\right), \qquad aa' \frac{dM^{(1)}}{da} = -m\left(\frac{2}{\alpha^2} + \alpha\right),$$
$$a'^2 \frac{dM^{(1)}}{da'} = m'\left(\frac{1}{\alpha^2} + 2\alpha\right);$$

en faisant donc

$$\begin{aligned}\frac{a'.d.\partial R''}{mdt} = &(2n' - n)\left(\frac{1}{\alpha^2} - \alpha\right) G \sin(5n't - 2nt + g)\\ &+ (2n' - n)\left(\frac{2}{\alpha^2} + \alpha\right) F \sin(5n't - 2nt + f)\\ &+ \frac{n}{2}\left(\frac{1}{\alpha^2} + \alpha\right) G' \sin(5n't - 2nt + g')\\ &+ \frac{n}{2}\left(\frac{1}{\alpha} + 2\alpha\right) F' \sin(5n't - 2nt + f'),\end{aligned}$$

on aura

$$\frac{a'.d'.\partial R'}{mdt} = -\frac{a'.d.\partial R}{m'dt} - \frac{a'.d.\partial R''}{mdt}.$$

Les valeurs de $\frac{a'.d.\delta R}{dt}$ et de $\frac{a'.d.\delta R'}{dt}$, étant ainsi connues, on en déduira comme à l'ordinaire les valeurs de $\delta\zeta$ et de $\delta\zeta'$. Mais pour réduire en nombres ces deux premières quantités, il faudrait avoir les valeurs des quatre quantités F, G, F', G', qui n'ont pas encore été calculées. Au reste, comme ces valeurs sont nécessairement fort petites, il est probable qu'il n'en résulterait que de très légères corrections aux valeurs de $\delta\zeta$ et de $\delta\zeta'$, et qu'on peut les omettre sans erreur sensible.

Calcul des valeurs de $\delta\zeta$ et de $\delta\zeta'$ qui résultent de la combinaison des argumens $3n't - nt$ *et* $2n't - nt$.

20. Soit

$$R = M^{(0)} e'^2 \cos(3n't - nt - 2\omega') + M^{(1)} ee' \cos(3n't - nt - \omega - \omega') + M^{(2)} e^2 \cos(3n't - nt - 2\omega) + M^{(3)} \gamma^2 \cos(3n't - nt - 2\Pi),$$

d'où l'on conclura

$$\begin{aligned}\delta R = {} & (\delta v - \delta v').[M^{(0)} e'^2 \sin(3n't - nt - 2\omega') + 2M^{(1)} ee' \sin(3n't - nt - \omega - \omega') \\ & + 3M^{(2)} \sin(3n't - nt - 2\omega)] \\ & + (\delta v - 3\delta v') M^{(3)} \gamma^2 \sin(3n't - nt - 2\Pi) \\ & + \delta r.\left[\frac{dM^{(0)}}{da} e'^2 \cos(3n't - nt - 2\omega') + \frac{dM^{(1)}}{da} ee' \cos(3n't - nt - \omega - \omega')\right. \\ & \left. + \frac{dM^{(2)}}{da} e^2 \cos(3n't - nt - 2\omega) + \frac{dM^{(3)}}{da} \gamma^2 \cos(3n't - nt - 2\Pi)\right] \\ & + \delta r'.\left[\frac{dM^{(0)}}{da'} e'^2 \cos(3n't - nt - 2\omega') + \frac{dM^{(1)}}{da'} ee' \cos(3n't - nt - \omega - \omega')\right. \\ & \left. + \frac{dM^{(2)}}{da'} e^2 \cos(3n't - nt - 2\omega) + \frac{dM^{(3)}}{da'} \gamma^2 \cos(3n't - nt - 2\Pi)\right].\end{aligned}$$

En différentiant cette expression sans faire varier $n't$, $\delta v'$, et $\delta r'$, on trouvera

$$\frac{d.\delta R}{dt} = n(\delta v' - \delta v)[M^{(0)} e'^2 \cos(3n't - nt - 2\omega') + 2M^{(1)} ee' \cos(3n't - nt - \omega - \omega')$$
$$+ 3M^{(2)} e^2 \cos(3n't - nt - 2\omega)]$$
$$+ n(3\delta v' - \delta v) M^{(3)} \gamma^3 \cos(3n't - nt - 2\Pi)$$
$$+ \frac{d.\delta v}{dt}[M^{(0)} e'^2 \sin(3n't - nt - 2\omega') + 2M^{(1)} ee' \sin(3n't - nt - \omega - \omega')$$
$$+ 3M^{(2)} e^2 \sin(3n't - nt - 2\omega) + M^{(3)} \gamma^3 \sin(3n't - nt - 2\Pi)]$$
$$+ n\delta r\left[\frac{dM^{(0)}}{da} e'^2 \sin(3n't - nt - 2\omega') + \frac{dM^{(1)}}{da} ee' \sin(3n't - nt - \omega - \omega')\right.$$
$$\left. + \frac{dM^{(2)}}{da} e^2 \sin(3n't - nt - 2\omega) + \frac{dM^{(3)}}{da} \gamma^3 \sin(3n't - nt - 2\Pi)\right]$$
$$+ \frac{d.\delta r}{dt}\left[\frac{dM^{(0)}}{da} e'^2 \cos(3n't - nt - 2\omega') + \frac{dM^{(1)}}{da} ee' \cos(3n't - nt - \omega - \omega')\right.$$
$$\left. + \frac{dM^{(2)}}{da} e^2 \cos(3n't - nt - 2\omega) + \frac{dM^{(3)}}{da} \gamma^3 \cos(3n't - nt - 2\Pi)\right]$$
$$+ n\delta r'\left[\frac{dM^{(0)}}{da'} e'^2 \sin(3n't - nt - 2\omega') + \frac{dM^{(1)}}{da'} ee' \sin(3n't - nt - \omega - \omega')\right.$$
$$\left. + \frac{dM^{(2)}}{da'} e^2 \sin(3n't - nt - 2\omega) + \frac{dM^{(3)}}{da'} \gamma^3 \sin(3n't - nt - 2\Pi)\right].$$

Soient

$$\frac{\delta r}{a} = e\,E\cos(2n't - nt - \omega) + e'F\cos(2n't - nt - \omega'),$$
$$\frac{\delta r'}{a'} = e\,E'\cos(2'nt - nt - \omega) + e'F'\cos(2n't - nt - \omega'),$$
$$\delta v = eG\sin(2n't - nt - \omega) + e'H\sin(2n't - nt - \omega'),$$
$$\delta v' = eG'\sin(2n't - nt - \omega') + e'H'\sin(2n't - nt - \omega').$$

Si l'on substitue ces valeurs et leurs différentielles dans l'expression de $\frac{d.\delta R}{dt}$, en n'ayant égard qu'aux termes qui dépendent de l'argument $5n't - 2nt$, on trouvera

$$\frac{d'.d.\delta R}{dt} = P^{(0)} \sin(5n't - 2nt - \omega - 2\omega')$$
$$+ P^{(1)} \sin(5n't - 2nt - 2\omega - \omega')$$
$$+ P^{(2)} \sin(5n't - 2nt - 3\omega')$$
$$+ P^{(3)} \sin(5n't - 2nt - 3\omega)$$
$$+ P^{(4)} \sin(5n't - 2nt - \omega' - 2\Pi)$$
$$+ P^{(5)} \sin(5n't - 2nt - \omega - 2\Pi),$$

ou, pour abréger, l'on fait

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}^{(0)} = {} & \frac{n}{2}\, ee'^2 \mathrm{G}'\, a'\, \mathrm{M}^{(0)} + (n' - n)\, ee'^2\, \mathrm{G}\, a'\, \mathrm{M}^{(0)} \\
& + nee'^2 \mathrm{H}'\, a'\, \mathrm{M}^{(1)} + 2(n' - n)\, ee'^2\, \mathrm{H}\, a'\, \mathrm{M}^{(1)} \\
& + \frac{n}{2}\, ee'^2 \mathrm{E}'\, a'^2 \frac{d\mathrm{M}^{(0)}}{da'} - (n' - n)\, ee'^2\, \mathrm{E}\, aa' \frac{d\mathrm{M}^{(0)}}{da} \\
& + nee'^2\, \mathrm{F}'\, a'^2 \frac{d\mathrm{M}^{(1)}}{da'} - (n' - n)\, ee'^2\, \mathrm{F} aa' \frac{d\mathrm{M}^{(1)}}{da}, \\
\mathrm{P}^{(1)} = {} & n e^2 e'\, \mathrm{G}' a'\, \mathrm{M}^{(1)} + 2(n' - n)\, e^2 e'\, \mathrm{G} a' \mathrm{M}^{(1)} + \frac{3n}{2}\, e^2 e'\, \mathrm{H}' a'\, \mathrm{M}^{(2)} \\
& + 3(n' - n)\, e^2 e'\, \mathrm{H}\, a'\, \mathrm{M}^{(2)} + \frac{n}{2}\, e^2 e'\, \mathrm{E}'\, a'^2 \frac{d\mathrm{M}^{(1)}}{da'} \\
& - (n' - n)\, e^2 e'\, \mathrm{E}\, aa' \frac{d\mathrm{M}^{(1)}}{da} + \frac{n}{2}\, e^2 e'\, \mathrm{F}'\, a'^2 \frac{d\mathrm{M}^{(2)}}{da'} \\
& - (n' - n)\, e^2 e'\, \mathrm{F}\, aa' \frac{d\mathrm{M}^{(2)}}{da}, \\
\mathrm{P}^{(2)} = {} & \frac{n}{2}\, e'^3 \mathrm{H}'\, a' \mathrm{M}^{(0)} + (n' - n) e'^3 \mathrm{H}\, a' \mathrm{M}^{(0)} + \frac{n}{2}\, e'^3\, \mathrm{F}'\, a'^2 \frac{d\mathrm{M}^{(0)}}{da'} \\
& - (n' - n)\, e'^3 \mathrm{F}\, aa' \frac{d\mathrm{M}^{(0)}}{da}, \\
\mathrm{P}^{(3)} = {} & \frac{3n}{2}\, e^3 \mathrm{G}'\, a' \mathrm{M}^{(2)} + 3(n' - n)\, e^3 \mathrm{G}\, a' \mathrm{M}^{(2)} + \frac{n}{2}\, e^3\, \mathrm{E}'\, a'^2 \frac{d\mathrm{M}^{(2)}}{da'} \\
& - (n' - n)\, e^3\, \mathrm{E}\, aa' \frac{d\mathrm{M}^{(2)}}{da}, \\
\mathrm{P}^{(4)} = {} & \frac{3n}{2}\, e'\gamma^2 \mathrm{H}'\, a' \mathrm{M}^{(3)} + (n' - n) e'\gamma^2\, \mathrm{H}\, a' \mathrm{M}^{(3)} + \frac{n}{2}\, e'\gamma^2 \mathrm{F}' a'^2 \frac{d\mathrm{M}^{(3)}}{da'} \\
& - (n' - n)\, e'\gamma^2\, \mathrm{F}\, aa' \frac{d\mathrm{M}^{(3)}}{da}, \\
\mathrm{P}^{(5)} = {} & \frac{3n}{2}\, e\gamma^2\, \mathrm{G}'\, a' \mathrm{M}^{(3)} + (n' - n)\, e\gamma^2\, \mathrm{G}\, a' \mathrm{M}^{(3)} + \frac{n}{2}\, e\gamma^2 \mathrm{E}'\, a'^2 \frac{d\mathrm{M}}{da'} \\
& - (n' - n)\, e\gamma^2\, \mathrm{E}\, aa' \frac{d\mathrm{M}^{(3)}}{da}.
\end{aligned}
$$

En supposant donc

$$
\begin{aligned}
\mathrm{A} = {} & \mathrm{P}^{(0)} \cos(\omega + 2\omega') + \mathrm{P}^{(1)} \cos(2\omega + \omega') + \mathrm{P}^{(2)} \cos 3\omega' + \mathrm{P}^{(3)} \cos 3\omega \\
& + \mathrm{P}^{(4)} \cos(\omega' + 2\Pi) + \mathrm{P}^{(5)} \cos(\omega + 2\Pi),
\end{aligned}
$$

et désignant par B la même expression, dans laquelle on

changera simplement les cosinus en sinus, on aura

$$\frac{d.\delta R}{dt} = A\sin(5n't - 2nt) - B\cos(5n't - 2nt).$$

Pour réduire cette expression en nombres, commençons par calculer les valeurs des quatre quantités $M^{(0)}$, $M^{(1)}$, $M^{(2)}$, $M^{(3)}$. En faisant $i = 3$ dans les formules du n° 4 du livre VI de la *Mécanique céleste*, et en substituant à la place de $A^{(1)}$, $A^{(2)}$, $A^{(3)}$, $B^{(2)}$, et de leurs différences, leurs valeurs en $b^{(0)}_{\frac{1}{2}}$, $b^{(1)}_{\frac{1}{2}}$, etc., on aura

$$a' M^{(0)} = \frac{m'}{8}.27\alpha - \frac{m'}{8}\left(17 b^{(1)}_{\frac{1}{2}} + 10\alpha \frac{db^{(1)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha} + \alpha^2 \frac{d^2 b^{(1)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^2}\right),$$

$$a' M^{(1)} = \frac{m'}{4}.\left(20 b^{(2)}_{\frac{1}{2}} + 10\alpha \frac{db^{(2)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha} + \alpha^2 \frac{d^2 b^{(2)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^2}\right),$$

$$a' M^{(2)} = -\frac{m'}{8}.\left(21 b^{(3)}_{\frac{1}{2}} + 10\alpha \frac{db^{(3)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha} + \alpha^2 \frac{d^2 b^{(3)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^2}\right),$$

$$a' M^{(3)} = -\frac{m'}{8}.\alpha b^{(2)}_{\frac{3}{2}},$$

$$aa' \frac{dM^{(0)}}{da} = -\frac{m'}{8}.27\alpha - \frac{m'}{8}.\left(27\alpha \frac{db^{(1)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha} + 12\alpha^2 \frac{d^2 b^{(1)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^2} + \alpha^3 \frac{d^3 b^{(1)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^3}\right),$$

$$aa' \frac{dM^{(1)}}{da} = \frac{m'}{4}.\left(30\alpha \frac{db^{(2)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha} + 12\alpha^2 \frac{d^2 b^{(2)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^2} + \alpha^3 \frac{d^3 b^{(2)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^3}\right),$$

$$aa' \frac{dM^{(2)}}{da} = -\frac{m'}{8}.\left(31\alpha \frac{db^{(3)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha} + 12\alpha^2 \frac{d^2 b^{(3)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^2} + \alpha^3 \frac{d^3 b^{(3)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^3}\right),$$

$$aa' \frac{dM^{(3)}}{da} = -\frac{m'}{8}.\alpha\left(b^{(2)}_{\frac{3}{2}} + \alpha \frac{db^{(2)}_{\frac{3}{2}}}{d\alpha}\right).$$

En réduisant ces formules en nombres, on aura

$$a' M^{(0)} = - m'.0.5843, \qquad aa' \frac{dM^{(0)}}{da} = - m'.2.2889,$$
$$a' M^{(1)} = + m'.3.0566, \qquad aa' \frac{dM^{(1)}}{da} = + m'.8.1813,$$
$$a' M^{(2)} = - m'.0.9363, \qquad aa' \frac{dM^{(2)}}{da} = - m'.3.4248,$$
$$a' M^{(3)} = - m'.0.1419, \qquad aa' \frac{dM^{(3)}}{da} = - m'.0.6406;$$

de là, au moyen de l'équation

$$a' \frac{dM^{(i)}}{da'} + a \frac{dM^{(i)}}{da} = - M^{(i)},$$

on conclura

$$a'^2 \frac{dM^{(0)}}{da} = + m' 2.8732, \qquad a'^2 \frac{dM^{(2)}}{da'} = + m' 4.3611,$$
$$a'^2 \frac{dM^{(1)}}{da} = - m' 11.2378, \qquad a'^2 \frac{dM^{(3)}}{da'} = + m' 0.7825.$$

On trouve d'ailleurs (*Mécanique céleste*, tome 3e, page 122), en ayant égard aux corrections que doivent subir les valeurs de la masse de Saturne,

$$ae E = - 0.000279516, \qquad ae' E = + 0.000161102,$$
$$e G = - 0.000641703, \qquad e' H = + 0.000262640,$$

d'où l'on conclut

$$E = - 0.00111782, \qquad F = + 0.000552170,$$
$$G = - 0.0133474, \qquad H = + 0.00467127;$$

de même en corrigeant, d'après la masse adoptée pour Jupiter, les valeurs données page 136 du 3e volume du même ouvrage, on trouve

$$a'e'E' = + 0.00536901, \qquad d'e'F' = - 0.00207097,$$
$$eG' = + 0.00201550\overline{7}, \qquad e'H' = - 0.000879881,$$

d'où l'on tire

$$E' = +\,0.0117087, \qquad F' = -\,0.00386186,$$
$$G' = +\,0.0419227, \qquad H' = -\,0.01564940.$$

On a d'ailleurs

$$\log \frac{n}{2} = 4.7374182, \qquad \log (n - n') = 4.8146511;$$

au moyen de ces valeurs et de celles qui sont rapportées dans le tableau I, on conclura

$$\begin{aligned}
P^{(0)} &= m' (-0.20337 - 0.07735 - 0.79428 - 0.28323 + 0.27931 + 0.02538 \\
&\quad + 0.36032 + 0.04481) = -m'0.64841, \\
P^{(1)} &= m' (+1.81942 + 0.69202 + 0.31206 + 0.11128 - 0.93413 - 0.07756 \\
&\quad - 0.11956 - 0.01604) = +m'1.78749, \\
P^{(2)} &= m' (+0.08878 + 0.12044 - 0.10773 - 0.01466) = -m'0.00195, \\
P^{(3)} &= m' (-0.71484 - 0.98673 + 0.30997 + 0.02776) = -m'0.64900, \\
P^{(4)} &= m' (+0.00987 + 0.01104 - 0.00448 - 0.00063) = +m'0.00593, \\
P^{(5)} &= m' (-0.02262 - 0.02548 + 0.01161 + 0.00108) = -m'0.01279.
\end{aligned}$$

A l'aide de ces valeurs, on trouvera

$$\begin{aligned}
A &= m' (+0.64404 - 0.57764 + 0.00019 - 0.55599 + 0.00556 + 0.00182) \\
&= -m'.0.48202, \\
B &= m' (+0.07514 + 1.69158 + 0.00194 - 0.33478 - 0.00206 + 0.01266) \\
&= +m'.1.44448,
\end{aligned}$$

on aura donc ainsi

$$\frac{a'.d.\delta R}{m'dt} = -\,0.48202 \sin (5n't - 2nt) - 1.44448 \cos (5n't - 2nt) :$$

d'où, en multipliant par le nombre dont le logarithme est — 0.6881121, on conclura

$$\delta\zeta = 2''.35059 \sin (5n't - 2nt) + 7''.04407 \cos (5n't - 2nt).$$

Déterminons la partie correspondante de $\delta\zeta'$, différentions par rapport à $n't$, $\delta v'$ et $\delta r'$, la valeur précédente de δR, en marquant d'un accent les lettres $M'^{(0)}$, $M'^{(1)}$, $M'^{(2)}$, $M'^{(3)}$, et dans l'expression résultante substituons pour δr, δv, $\delta r'$ $\delta v'$, et leur différentielles, les valeurs que nous avons supposées à ces quantités. On trouvera ainsi pour les valeurs correspondantes à celles que nous avons désignées par $P^{(0)}$, $P^{(1)}$, etc., relativement à Jupiter

$$P'^{(0)} = -\frac{5n'-n}{2}ee'^2G'a'M^{(0)}+\frac{3n'}{2}ee'^2Ga'M^{(0)}-(5n'-n)ee'^2H'a'M^{(1)}$$
$$+3n'ee'^2Ha'M^{(1)}-\frac{5n'-n}{2}ee'^2E'a'^2\frac{dM^{(0)}}{da'}-\frac{3n'}{2}ee'^2Eaa'\frac{dM^{(0)}}{da}$$
$$-\frac{5n'-n}{2}ee'^2F'a'^2\frac{dM^{(1)}}{da'}-\frac{3n'}{2}ee'^2Faa'\frac{dM^{(1)}}{da},$$

$$P'^{(1)} = -(5n'-n)e^2e'G'a'M^{(1)}+3n'e^2e'G'a'M^{(1)}-\frac{3(5n'-n)}{2}e^2e'H'a'M^{(2)}$$
$$+\frac{9n'}{2}e^2e'Ha'M^{(2)}-\frac{5n'-n}{2}e^2e'E'a'^2\frac{dM^{(1)}}{da'}-\frac{3n'}{2}e^2e'Eaa'\frac{dM^{(1)}}{da}$$
$$-\frac{5n'-n}{2}e^2e'F'a'^2\frac{dM^{(2)}}{da'}-\frac{3n'}{2}e^2e'Faa'\frac{dM^{(2)}}{da},$$

$$P'^{(2)} = -\frac{5n'-n}{2}e'^3H'a'M^{(0)}+\frac{3n'}{2}e'^3Ha'M^{(0)}-\frac{5n'-n}{2}e'^3F'a'^2\frac{dM^{(0)}}{da'}$$
$$-\frac{3n'}{2}e'^3Faa'\frac{dM^{(0)}}{da},$$

$$P'^{(3)} = -\frac{3(5n'-n)}{2}e^3G'a'M^{(2)}+\frac{9n'}{2}e^3Ga'M^{(2)}-\frac{5n'-n}{2}e^3E'a'^2\frac{dM^{(0)}}{da'}$$
$$-\frac{3n'}{2}e^3Eaa'\frac{dM^{(2)}}{da},$$

$$P'^{(4)} = -\frac{3(5n'-n)}{2}e'\gamma^2H'a'M^{(3)}+\frac{3n'}{2}e'\gamma^2Ha'M^{(3)}-\frac{5n'-n}{2}e'\gamma^2F'a'^2\frac{dM^{(3)}}{da'}$$
$$-\frac{3n'}{2}e'\gamma^2Faa'\frac{dM^{(3)}}{da},$$

$$P'^{(5)} = -\frac{3(5n'-n)}{2}e\gamma^2G'a'M^{(3)}+\frac{3n'}{2}e\gamma^2Ga'M^{(3)}-\frac{5n'-n}{2}e\gamma^2E'a'^2\frac{dM^{(3)}}{da'}$$
$$-\frac{3n'}{2}e\gamma^2Eaa'\frac{dM^{(3)}}{da}.$$

Maintenant si l'on compare ces expressions à celles de $P^{(0)}$, $P^{(1)}$, etc., en observant que l'on a à très peu près $\frac{5n'-n}{2} = \frac{n}{2}$ et $2n' = -(3n'-2n)$, et que d'après les valeurs de $M'^{(1)}$, $M'^{(2)}$, on a

$$a'M'^{(1)} = \frac{m}{m'}\,a'M^{(1)}, \qquad a'M'^{(2)} = \frac{m}{m'}\,a'M^{(2)};$$

et relativement à $M'^{(0)}$ qui contient $A^{(1)}$

$$a'\,M'^{(0)} = \frac{m}{m'}\,a'M^{(0)} + \frac{m}{8}\left(\frac{3}{\alpha^2} - 27\alpha\right),$$
$$aa'\frac{dM'^{(0)}}{da} = \frac{m}{m'}\,aa'\frac{dM^{(0)}}{da} - \frac{m}{8}\left(\frac{6}{\alpha^2} + 27\alpha\right),$$
$$a'\frac{dM'^{(0)}}{da'} = \frac{m}{m'}\,a'^2\frac{dM^{(0)}}{da'} + \frac{m}{8}\left(\frac{3}{\alpha^2} + 54\alpha\right),$$

d'après cela, si l'on fait

$$P_{,}^{(0)} = ee'^2\left(\frac{n}{2}a'\,M_{,}^{(0)}G' + (n'-n)\,a'\,M_{,}^{(0)}G + \frac{n}{2}a'^2\frac{dM_{,}^{(0)}}{da'}E' - (n'-n)\,aa'\frac{dM_{,}^{(0)}}{da}E\right),$$
$$P_{,}^{(2)} = e'^3\left(\frac{n}{2}a'\,M_{,}^{(0)}H' + (n'-n)\,a'\,M_{,}^{(0)}H + \frac{n}{2}a'^2\frac{dM_{,}^{(0)}}{da'}F' - (n'-n)\,aa'\frac{dM_{,}^{(0)}}{da}F\right),$$

la quantité $M_{,}^{(0)}$ et ses différences désignant les termes correspondans de $M'^{(0)}$ et de ses différences indépendans de $M^{(0)}$. Si de plus on suppose

$$A_{,} = P_{,}^{(0)}\cos(\omega + 2\omega') + P_{,}^{(2)}\cos 3\omega';$$

qu'on désigne par $B_{,}$ la même quantité dans laquelle on changera les cosinus en sinus, et qu'on fasse

$$\frac{a'.d.\delta R''}{mdt} = A_{,}\sin(5n't - 2nt) - B_{,}\cos(5n't - 2nt),$$

on aura

$$\frac{a'.d'.\delta R'}{mdt} = -\frac{a'.d.\delta R}{m'dt} - \frac{a'.d.\delta R''}{mdt}.$$

Pour convertir cette valeur en nombres, on formera d'abord les quantités $P_{/}^{(0)}$, et $P_{/}^{(2)}$, et l'on aura

$$P_{/}^{(0)} = + m.0.25041, \qquad P_{/}^{(2)} = - m.0.093815,$$

et par suite

$$A_{/} = m'(-0.24872 + 0.00906) = - m'0.23966,$$
$$B_{/} = m(-0.02902 + 0.09338) = + m'0.06436,$$

on aura donc ainsi

$$\frac{a'.d.\delta R''}{mdt} = - 0.23966 \sin(5n't - 2nt) - 0.06436 \cos(5'nt - 2nt).$$

Nous avons trouvé plus haut

$$\frac{a'.d'.\delta R}{m'dt} = - 0.48202 \sin(5n't - 2nt) - 1.44448 \cos(5n't - 2nt),$$

par conséquent

$$\frac{a'.d'.\delta R}{mdt} = 0.72168 \sin(5n't - 2nt) + 1.50884 \cos(5n't - 2nt),$$

en multipliant les deux termes par le nombre dont le logarithme est 1.0725999 —, on trouvera

$$\delta\zeta' = - 8'',52991 \sin(5n't - 2nt) + 17'',83376 \cos(5n't - 2nt).$$

21. Occupons-nous de la combinaison inverse des mêmes argumens. Pour cela supposons

$$R = N^{(0)} e \cos(2n't - nt - \omega) + N^{(1)} e' \cos(2n't - nt - \omega'),$$

d'où il résulte

$$\delta R = (\delta\nu - \delta\nu').[2N^{(0)} e \sin(2n't - nt - \omega) + N^{(1)} e' \sin(2n't - nt - \omega')],$$
$$+ \delta r.\left[\frac{dN^{(0)}}{da} e\cos(2n't - nt - \omega) + \frac{dN^{(1)}}{da} e'\cos(2n't - nt - \omega')\right]$$
$$+ \delta r'.\left[\frac{dN^{(0)}}{da'} e\cos(2n't - nt - \omega) + \frac{dN^{(1)}}{da'} e'\cos(2n't - nt - \omega')\right]$$

et en différentiant par rapport à la caractéristique d,

$$\frac{d.\delta R}{dt} = n(\delta\nu' - \delta\nu).[2N^{(0)} e\cos(2n't - nt - \omega) + N^{(1)} e'\cos(2n't - nt - \omega')]$$
$$+ \frac{d.\delta\nu}{dt}.\left[2N^{(0)} e\sin(2n't - nt - \omega) + N^{(1)} e'\sin(2n't - nt - \omega')\right]$$
$$+ \frac{d.\delta r}{dt}.\left[\frac{dN^{(0)}}{da} e\cos(2n't - nt - \omega) + \frac{dN^{(1)}}{da} e'\cos(2n't - nt - \omega')\right]$$
$$+ n\delta r.\left[\frac{dN^{(0)}}{da'} e\sin(2n't - nt - \omega) + \frac{dN^{(1)}}{da'} e'\sin(2n't - nt - \omega')\right]$$
$$+ n\delta r'.\left[\frac{dN^{(0)}}{da'} e\sin(2n't - nt - \omega) + \frac{dN^{(1)}}{da'} e'\sin(2n't - nt - \omega')\right].$$

Soient maintenant

$$\frac{\delta r}{a} = K\cos(3n't - nt + C), \qquad \delta\nu = L\sin(3n't - nt + D),$$
$$\frac{\delta r'}{a'} = K'\cos(3n't - nt + C'), \qquad \delta\nu' = L'\sin(3n't - nt + D'),$$

d'où l'on tire

$$\frac{d.\delta r}{dt} = -(3n' - n)\, aK\sin(3n't - nt + C),$$
$$\frac{d.\delta\nu}{dt} = (3n' - n)\, L\cos(3n't - nt + D).$$

En substituant ces valeurs dans l'expression précédente de $\frac{d.\delta R}{dt}$, elle prendra cette forme

$$\begin{aligned}\frac{a'.d.\delta R}{dt} = {} & Q^{(0)} \sin (5n't - 2nt + D' - \omega) \\ & + Q^{(1)} \sin (5n't - 2nt + D' - \omega') \\ & + Q^{(2)} \sin (5n't - 2nt + D - \omega) \\ & + Q^{(3)} \sin (5n't - 2nt + D - \omega') \\ & + Q^{(4)} \sin (5'nt - 2nt + C' - \omega) \\ & + Q^{(5)} \sin (5n't - 2nt + C' - \omega') \\ & + Q^{(6)} \sin (5n't - 2nt + C - \omega) \\ & + Q^{(7)} \sin (5n't - 2nt + C - \omega').\end{aligned}$$

En faisant pour abréger

$$Q^{(0)} = n e L' a' N^{(0)}, \quad Q^{(1)} = \frac{n}{2} e' L' a' N^{(1)}, \quad Q^{(2)} = (3n' - 2n) e L a' N^{(0)},$$

$$Q^{(3)} = \left(\frac{3}{2}n' - n\right) e' L a' N^{(1)}, \quad Q^{(4)} = \frac{n}{2} e K' a'^2 \frac{dN^{(0)}}{da'}, \quad Q^{(5)} = \frac{n}{2} e' K' a'^2 \frac{dN^{(1)}}{da'},$$

$$Q^{(6)} = -\left(\frac{3}{2}n' - n\right) e K a a' \frac{dN^{(0)}}{da}, \quad Q^{(7)} = -\left(\frac{3}{2}n' - n\right) e' K a a' \frac{dN^{(1)}}{da}.$$

Si l'on suppose donc

$$\begin{aligned}R = {} & Q^{(0)} \sin (D' - \omega) + Q^{(1)} \sin (D' - \omega') + Q^{(2)} \sin (D - \omega) + Q^{(3)} \sin (D - \omega') \\ & + Q^{(4)} \sin (C' - \omega) + Q^{(5)} \sin (C' - \omega') + Q^{(6)} \sin (C - \omega) + Q^{(7)} \sin (C - \omega'),\end{aligned}$$

et qu'on désigne par A ce que devient cette valeur quand on y change les sinus en cosinus, on aura

$$\frac{a'.d.\delta R}{dt} = A \sin (5n't - 2nt) + B \cos (5n't - 2nt).$$

Pour réduire cette formule en nombres, on formera d'abord les valeurs des quantités $N^{(0)}$, $N^{(1)}$, et de leurs différences. Par le n° 50 du second livre de la *Mécanique céleste*, on aura

$$a' N^{(0)} = m' \left(2 b^{(1)}_{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\alpha \frac{d b^{(1)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha}\right),$$

$$a' N^{(1)} = 2m'\alpha - m'\left(\frac{3}{2} b_{\frac{1}{2}}^{(1)} + \frac{1}{2}\alpha \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha}\right),$$

$$aa' \frac{dN^{(0)}}{da} = \frac{m'}{2}\left(5\alpha \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha} + \alpha^2 \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha^2}\right),$$

$$aa' \frac{dN^{(1)}}{da} = 2m'\alpha - \frac{m'}{2}\left(4\alpha \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha} + \alpha^2 \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha^2}\right),$$

et au moyen des valeurs rapportées page 81, tome 3e du même ouvrage, on a

$$a' N^{(0)} = + m'0.8166, \qquad a' N^{(1)} = + m'0.3460,$$
$$aa' \frac{dN^{(0)}}{da} = + m'2.0302, \qquad aa' \frac{dN^{(1)}}{da} = - m'5.3599.$$

De là au moyen de l'équation

$$a' \frac{dN^{(i)}}{da'} + a \frac{dN^{(i)}}{da} = - N^{(i)},$$

on a conclu

$$a'^2 \frac{dN^{(0)}}{da'} = - m'2.8468, \qquad a'^2 \frac{dN^{(1)}}{da'} = + m'5.0139.$$

On trouve, *Mécanique céleste*, page 123, 3e volume,

$$K = + 0.00002\ 26252, \qquad C = - 34°.2093 \text{ (déc.)},$$
$$a L = + 36''.1859 \text{ (déc.)}, \qquad D = + 88°.5148 \text{ (déc.)}.$$

La petitesse des valeurs de aK et L fait qu'on peut se dispenser de leur faire subir aucune correction. De là en réduisant L en parties du rayon, on tire

$$K = + 0.00000435002, \qquad L = + 0.0000568407.$$

Au moyen de ces valeurs, en observant qu'on a

$$\log \frac{3n'}{2} - n = 4.6361121, \quad \log (3n' - 2n) = 4.9371420,$$

j'ai trouvé

$$Q^{(0)} = -m'1.00428, \quad Q^{(1)} = +m'0.17598, \quad Q^{(2)} = -m'0.19309,$$
$$Q^{(3)} = +m'0.03384, \quad Q^{(4)} = +m'0.91801, \quad Q^{(5)} = -m'0.43416,$$
$$Q^{(6)} = +m'0.01837, \quad Q^{(7)} = -m'0.00959;$$

d'où l'on a conclu

$$A = m'(-0.38448 + 0.17314 - 0.06821 + 0.03347 - 0.16825 + 0.43397 + 0.01555 + 0.00327) = +m'0.03846,$$
$$B = m'(-0.92777 - 0.03150 - 0.18063 - 0.00499 - 0.90246 + 0.01241 - 0.00977 + 0.00902) = -m'2.03569.$$

On aura donc enfin

$$\frac{a'.d.\delta R'}{m'dt} = 0.03846 \sin(5n't - 2nt) - 2.03569 \cos(5n't - 2nt),$$

et en multipliant les deux termes de cette valeur par le nombre dont le logarithme est $0.6881121 -$, on aura

$$\delta\zeta = -0''.18755 \sin(5n't - 2nt) + 9''.92713 \cos(5n't - 2nt).$$

Déterminons la valeur correspondante de $\delta\zeta'$. En suivant la même analyse et en désignant par $Q'^{(0)}$, $Q'^{(1)}$, etc., relativement à Saturne, les mêmes quantités que nous avons désignées par $Q^{(0)}$, $Q^{(1)}$, etc., par rapport à Jupiter, en observant que l'on a à très peu près $5n' - n = n$ et $2n' = -(3n' - 2n)$, on trouvera

$$Q'^{(0)}=-\frac{m'}{m}Q^{(0)},\quad Q'^{(2)}=-\frac{m}{m'}Q^{(2)},\quad Q'^{(4)}=-\frac{m}{m'}Q^{(4)},\quad Q^{(6)}=-\frac{m'}{m'}Q^{(6)},$$

$$Q'^{(1)}=-\frac{m}{m'}Q^{(1)}-Q_{,}^{(1)},\quad Q'^{(3)}=-\frac{m}{m'}Q^{(3)}-Q_{,}^{(3)},\quad Q'^{(5)}=-\frac{m'}{m'}Q^{(5)}-Q_{,}^{(5)},$$

$$Q^{(7)}=-\frac{m}{m'}Q^{(7)}-Q_{,}^{(7)},$$

ou l'on fait pour abréger

$$Q_{,}^{(1)}=\frac{mn}{2}\left(\frac{1}{2\alpha^2}-2\alpha\right)e'L',\quad Q_{,}^{(3)}=\frac{m(3n'-2n)}{2}\left(\frac{1}{2\alpha^2}-2\alpha\right)e'L,$$

$$Q_{,}^{(5)}=\frac{mn}{2}\left(\frac{1}{\alpha}+8\alpha\right)e'K',\quad Q_{,}^{(7)}=+\frac{m(3n'-2n)}{2}\left(\frac{1}{\alpha^2}+2\alpha\right)e'K.$$

Si donc on suppose

$$A'_{,}=Q_{,}^{(1)}\cos(D'-\omega)+Q_{,}^{(3)}\cos(D-\omega')+Q_{,}^{(5)}\cos(C'-\omega')+Q_{,}^{(7)}\cos(C-\omega'),$$

qu'on désigne par $B'_{,}$ la même quantité dans laquelle on changera les cosinus en sinus, qu'on fasse

$$\frac{a'.d'.\delta R''}{mdt}=A'_{,}\sin(5n't-2nt)+B'_{,}\cos(5n't-2nt),$$

on aura

$$\frac{a'.d'.\delta R'}{mdt}=-\frac{a'.d.\delta R}{m'dt}-\frac{a'.d.\delta R''}{mdt}.$$

Pour convertir cette valeur en nombres, on calculera les quantités $Q_{,}^{(1)}$, $Q_{,}^{(3)}$, etc., d'après les valeurs dont nous avons déjà fait usage, on aura

$$Q^{(1)}=-m\ 0.42483,\quad Q^{(3)}=-m\ 0.081678,\quad Q^{(5)}=-m'\ 1.45670,$$
$$Q^{(7)}=-m\ 0.047122,$$

et par suite

$$A_{,} = m\,(-0.41797 - 0.080784 + 1.45612 + 0.016070)$$
$$= + m\,0.97344,$$
$$B_{,} = m\,(+0.076033 + 0.012057 + 0.041648 + 0.044297)$$
$$= + m\,0.17404.$$

On aura donc ainsi

$$\frac{a'.d.\delta R''}{mdt} = 0.97344 \sin(5n't - 2nt) + 0.17404 \cos(5n't - 2nt).$$

Nous avons trouvé

$$\frac{a'.d.\delta R}{m'dt} = 0.03846 \sin(5n't - 2nt) - 2.03569 \cos(5n't - 2nt).$$

Par conséquent

$$\frac{a'.d'.\delta R'}{mdt} = - 1.01190 \sin(5n't - 2nt) + 1.86165 \cos(5n't - 2nt).$$

En multipliant les deux termes de cette valeur par le nombre dont le logarithme est $1.0725999 -$, on aura

$$\delta\zeta' = 11''.96017 \sin(5n't - 2nt) - 22''.00381 \cos(5n't - 2nt).$$

Si l'on réunit respectivement les valeurs de $\delta\zeta$ et de $\delta\zeta'$, déterminées dans ce numéro et dans le précédent, on aura, pour les valeurs complètes de ces deux quantités résultant de la double combinaison des argumens $2n't - 2nt$, et $3n't - nt$,

$$\left.\begin{aligned}\delta\zeta &= + 2''.16304 \sin(5n't - 2nt) + 16''.97120 \cos(5n't - 2nt),\\ \delta\zeta' &= + 3''.43026 \sin(5n't - 2nt) - 39''.83757 \cos(5n't - 2nt).\end{aligned}\right\} (f)$$

En calculant directement la valeur de $\delta\zeta'$, j'ai trouvé

$$\delta\zeta' = 3''.46607 \sin(5n't - 2nt) - 40''.36260 \cos(5n't - 2nt);$$

cette valeur diffère peu de la précédente.

Récapitulation des résultats obtenus par les six combinaisons que nous venons d'examiner.

22. Nous avons trouvé dans les numéros précédens

$$\left.\begin{array}{lll}
\delta\zeta = -1''.89338 \sin(5n't-2nt) + 0''.42166 \cos(5n't-2nt) & (a)\\
\delta\zeta = +0''.46829 \sin(5n't-2nt) + 0''.30753 \cos(5n't-2nt) & (b)\\
\delta\zeta = -0''.43002 \sin(5n't-2nt) - 1''.39385 \cos(5n't-2nt) & (c)\\
\delta\zeta = -0''.14619 \sin(5n't-2nt) - 0''.09422 \cos(5n't-2nt) & (d)\\
\delta\zeta = -0''.76290 \sin(5n't-2nt) + 0''.77529 \cos(5n't-2nt) & (e)\\
\delta\zeta = +2''.16304 \sin(5n't-2nt) + 16''.97120 \cos(5n't-2nt) & (f)
\end{array}\right\}(\mathrm{R}).$$

En réunissant ces différentes parties de la valeur de $\delta\zeta$, et en remettant $n't+\varepsilon'$, $nt+\varepsilon$ à la place de $n't$ et de nt, on aura pour la valeur totale de cette quantité

$$\delta\zeta = -0''.60116 \sin(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon)+16''.98761 \cos(5n't-2nt-5\varepsilon'-2\varepsilon).$$

En rassemblant de même les différentes parties de la valeur de $\delta\zeta'$, on aura

$$\left.\begin{array}{lll}
\delta\zeta' = 15''.20364 \sin(5n't-2nt) + 1''.04854 \cos(5n't-2nt) & (a')\\
\delta\zeta' = -0''.89624 \sin(5n't-2nt) - 1''.37730 \cos(5n't-2nt) & (b')\\
\delta\zeta' = 1''.48333 \sin(5n't-2nt) + 3''.04340 \cos(5n't-2nt) & (c')\\
\delta\zeta' = 0''.22091 \sin(5n't-2nt) + 0''.23748 \cos(5n't-2nt) & (d')\\
\delta\zeta' = 1''.85702 \sin(5n't-2nt) - 1''.18481 \cos(5n't-2nt) & (e')\\
\delta\zeta' = 3''.43026 \sin(5n't-2nt) - 39''.83757 \cos(5n't-2nt) & (f')
\end{array}\right\}(\mathrm{S}),$$

ce qui donne pour la valeur totale de $\delta\zeta'$

$$\delta\zeta' = 21''.29892 \sin(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon) - 38''.07026 \cos(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon).$$

Telles sont donc les valeurs des variations des moyens mouvemens de Jupiter et de Saturne correspondantes à l'argument $5n't-2nt$ qui résultent soit de la seconde partie des formules (2), soit des douze premières combinaisons des argumens énumérés n° 2. Il nous reste, pour avoir

les valeurs complètes de $\delta\zeta$ et de $\delta\zeta'$, à calculer les termes qui proviennent de la double combinaison des argumens

$$\mu = 5n' - 2n + i(n' - n) - i'nt \quad \text{et} \quad \mu' = i(n' - n) - i'n,$$

où i peut avoir une valeur positive ou négative quelconque, la seule valeur de $i=0$ exceptée, et où l'on doit faire successivement $i' = 0$, $i' = 1$, $i' = 2$ et $i' = 3$.

Calcul des valeurs de $\delta\zeta$ et de $\delta\zeta'$ qui résultent de la combinaison par voie de soustraction des argumens $7n't - 4nt$ *et* $2n't - 2nt$.

23. Nous commencerons par calculer parmi les termes dont nous venons d'indiquer la formation, ceux qui résultent des termes du troisième ordre des fonctions R et R', dépendans de l'argument $7n't - 4nt$, combinés avec les termes du rayon vecteur et de la longitude des planètes m et m' qui dépendent de l'argument $2n't - 2nt$, parce que ces derniers termes ont des coefficiens très considérables, circonstance qui peut les rendre sensibles dans les valeurs de $\delta\zeta$ et de $\delta\zeta'$.

Calculons d'abord la valeur de $\delta\zeta'$. Pour cela, posons

$$(*)\ R' = M^{(0)} e'^3 \cos(7n't - 4nt - 3\omega') + M^{(1)} ee'^2 \cos(7n't - 4nt - \omega - 2\omega') + M^{(2)} e^2e' \cos(7n't - 4nt - 2\omega - \omega') + M^{(3)} e^3 \cos(7n't - 4nt - 3\omega),$$

d'où il résulte

$$\delta R' = (\delta v - \delta v').[4M^{(0)} e'^3 \sin(7n't - 4nt - 3\omega') + 5M^{(1)} ee'^2 \sin(7n't - 4nt - \omega - 2\omega') + 6M^{(2)} e^2e' \sin(7n't - 4nt - 2\omega - \omega') + 7M^{(3)} e^3 \sin(7n't - 4nt - 3\omega)]$$

(*) Nous omettons pour abréger les termes qui ont pour facteurs $e\gamma^2$ et $e'\gamma^2$, parce qu'ils sont très petits par rapport aux autres termes de R, et qu'ils ne produisent que des résultats insensibles.

$$+\delta r.\left[\frac{dM^{(0)}}{da}e'^{3}\cos(7n't-4nt-3\omega')+\frac{dM^{(1)}}{da}ee'^{2}\cos(7n't-4nt-\omega-2\omega')\right.$$
$$\left.+\frac{dM^{(2)}}{da}e^{2}e'\cos(7n't-4nt-2\omega-\omega')+\frac{dM^{(3)}}{da}e^{3}\cos(7n't-4nt-3\omega)\right]$$
$$+\delta r'.\left[\frac{dM^{(0)}}{da'}e'^{3}\cos(7n't-4nt-3\omega')+\frac{dM^{(1)}}{da'}ee'^{2}\cos(7n't-4nt-\omega-2\omega')\right.$$
$$\left.+\frac{dM^{(2)}}{da'}e^{2}e'\cos(7n't-4nt-2\omega-\omega')+\frac{dM^{(3)}}{da'}e^{3}\cos(7n't-4nt-3\omega)\right].$$

Cette valeur différentiée par rapport à $n't$, $\delta v'$ et $\delta r'$, donnera

$$\frac{d.\delta R'}{dt}=7n'(\delta v-\delta v').[4M^{(0)}e'^{3}\cos(7n't-4nt-3\omega')+5M^{(1)}ee'^{2}\cos(7n't-4nt-\omega-2\omega')$$
$$+6M^{(2)}e^{2}e'\cos(7n't-4nt-2\omega-\omega')+7M^{(3)}e^{3}\cos(7n't-4nt-3\omega)]$$
$$-7n'\delta r.\left[\frac{dM^{(0)}}{da}e'^{3}\sin(7n't-4nt-3\omega')+\frac{dM^{(1)}}{da}ee'^{2}\sin(7n't-4nt-\omega-2\omega')\right.$$
$$\left.+\frac{dM^{(2)}}{da}e^{2}e'\sin(7n't-4nt-2\omega-\omega')+\frac{dM^{(3)}}{da}e^{3}\sin(7n't-4nt-3\omega)\right]$$
$$-7n'\delta r'.\left[\frac{dM^{(0)}}{da'}e'^{3}\sin(7n't-4nt-3\omega')+\frac{dM^{(1)}}{da'}ee'^{2}\sin(7n't-4nt-\omega-2\omega')\right.$$
$$\left.+\frac{dM^{(2)}}{da'}e^{2}e'\sin(7n't-4nt-2\omega-\omega')+\frac{dM^{(3)}}{da'}e^{3}\sin(7n't-4nt-3\omega)\right]$$
$$-\frac{d.\delta v'}{dt}.[4M^{(0)}e'^{3}\sin(7n't-4nt-3\omega')+5M^{(1)}ee'^{2}\sin(7n't-4nt-\omega-2\omega')$$
$$+6M^{(2)}e^{2}e'\sin(7n't-4nt-2\omega-\omega')+7M^{(3)}e^{3}\sin(7n't-4nt-3\omega)]$$
$$+\frac{d.\delta r'}{dt}.\left[\frac{dM^{(0)}}{da'}e'^{3}\cos(7n't-4nt-3\omega')+\frac{dM^{(1)}}{da'}ee'^{2}\cos(7n't-4nt-\omega-2\omega')\right.$$
$$\left.+\frac{dM^{(2)}}{da'}e^{2}e'\cos(7n't-4nt-2\omega-\omega')+\frac{dM^{(3)}}{da'}e^{3}\cos(7n't-4nt-3\omega)\right].$$

Supposons, conformément aux résultats rapportés *Mécanique céleste*, pages 120, 121, 134 et 135, tome 3e,

$$\frac{\delta r}{a}=F\cos 2(n't-nt),\qquad \delta v=G\sin 2(n't-nt),$$
$$\frac{\delta r'}{a'}=F'\cos 2(n't-nt),\qquad \delta v'=G'\sin 2(n't-nt),$$

d'où l'on tire

$$\frac{d.\delta r'}{a'} = -2(n'-n)\,\mathrm{F}'\sin 2(n't-nt), \qquad \frac{d.\delta v'}{dt} = 2(n'-n)\,\mathrm{G}'\cos 2(n't-nt).$$

En substituant ces valeurs dans l'expression précédente, il vient

$$\begin{aligned}
\frac{a'.d'.\delta \mathrm{R}'}{dt} = {} & \frac{5n'+2n}{2}.\mathrm{G}'.[4a'\,\mathrm{M}^{(0)}e'^3\sin(5n't-2nt-3\omega') \\
& + 5a'\mathrm{M}^{(1)}ee'^2\sin(5n't-2nt-\omega-2\omega') \\
& + 6a'\mathrm{M}^{(2)}e^2e'\sin(5n't-2nt-2\omega-\omega') \\
& + 7a'\mathrm{M}^{(3)}e^3\sin(5n't-2nt-3\omega)] \\
& - \frac{7n'}{2}.\mathrm{G}.[4a'\mathrm{M}^{(0)}e'^3\sin(5n't-2nt-3\omega') \\
& + 5a'\mathrm{M}^{(1)}ee'^2\sin(5n't-2nt-\omega-2\omega') \\
& + 6a'\mathrm{M}^{(2)}e^2e'\sin(5n't-2nt-2\omega-\omega') \\
& + 7a'\mathrm{M}^{(3)}e^3\sin(5n't-2nt-3\omega)] \\
& - \frac{5n'+2n}{2}.\mathrm{F}'.\Big[a'^2\frac{d\mathrm{M}^{(0)}}{da'}e'^3\sin(5n't-2nt-3\omega') \\
& + a'^2\frac{d\mathrm{M}^{(1)}}{da'}ee'^2\sin(5n't-2nt)-\omega-2\omega) \\
& + a'^2\frac{d\mathrm{M}^{(2)}}{da'}e^2e'\sin(5n't-2nt)-2\omega-\omega') \\
& + a'^2\frac{d\mathrm{M}^{(3)}}{da'}e^3\sin(5n't-2nt-3\omega)\Big] \\
& - \frac{7n'}{2}.\mathrm{F}.\Big[aa'\frac{d\mathrm{M}^{(0)}}{da}e'^3\sin(5n't-2nt-3\omega') \\
& + aa'\frac{d\mathrm{M}^{(1)}}{da}ee'^2\sin(5n't-2nt-\omega-2\omega') \\
& + aa'\frac{d\mathrm{M}^{(2)}}{da}e^2e'\sin(5n't-2nt-2\omega-\omega') \\
& + aa'\frac{d\mathrm{M}^{(3)}}{da}e^3\sin(5n't-2nt-3\omega)\Big].
\end{aligned}$$

Si l'on fait donc pour abréger

$$\begin{aligned}
\mathrm{A} = {} & \frac{5n'+2n}{2}.\mathrm{G}'.[4a'\,\mathrm{M}^{(0)}e'^3\cos 3\omega' + 5a'\mathrm{M}^{(1)}ee'^2\cos(\omega+2\omega') \\
& + 6a'\mathrm{M}^{(2)}e^2e'\cos(2\omega+\omega') + 7a'\mathrm{M}^{(3)}e^3\cos 3\omega]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- \frac{7n'}{2}.\mathrm{G}.[4a'\mathrm{M}^{(0)}e'^3\cos 3\omega' + 5a'\mathrm{M}^{(1)}ee'^2\cos(\omega + 2\omega') \\
&\qquad + 6a'\mathrm{M}^{(2)}e^2e'\cos(2\omega + \omega') + 7a'\mathrm{M}^{(3)}e^3\cos 3\omega] \\
&- \frac{5n' + 2n}{2}.\mathrm{F}'.\left[a'^2\frac{d\mathrm{M}^{(0)}}{da'}e'^3\cos 3\omega' + a'^2\frac{d\mathrm{M}^{(1)}}{da'}ee'^2\cos(\omega + 2\omega')\right. \\
&\qquad \left. + a'^2\frac{d\mathrm{M}^{(2)}}{da'}e^2e'\cos(2\omega + \omega') + a'^2\frac{d\mathrm{M}^{(3)}}{da'}e^3\cos 3\omega\right] \\
&- \frac{7n'}{2}.\mathrm{F}.\left[aa'\frac{d\mathrm{M}^{(0)}}{da}e'^3\cos 3\omega' + aa'\frac{d\mathrm{M}^{(1)}}{da}ee'^2\cos(\omega + 2\omega')\right. \\
&\qquad \left. + aa'\frac{d\mathrm{M}^{(2)}}{da}e^2e'\cos(2\omega + \omega') + aa'\frac{d\mathrm{M}^{(3)}}{da}e^3\cos 3\omega\right],
\end{aligned}
$$

et qu'on désigne par B ce que devient cette expression, lorsqu'on y change les cosinus en sinus, on aura

$$\frac{a'.d'.\partial\mathrm{R}'}{dt} = \mathrm{A}\sin(5n't - 2nt) - \mathrm{B}\cos(5n't - 2nt).$$

Pour réduire cette expression en nombres, j'ai commencé par former les valeurs numériques des quatre quantités $\mathrm{M}^{(0)}$, $\mathrm{M}^{(1)}$, $\mathrm{M}^{(2)}$, $\mathrm{M}^{(3)}$ et de leurs différences, d'après les formules données par Burckhardt dans les *Mémoires de l'Institut* pour 1808, et j'ai trouvé

$$
\begin{aligned}
\log\ a'\mathrm{M}^{(0)} &= -\ 0.6827236, & \log\ aa'\frac{d\mathrm{M}^{(0)}}{da} &= -\ 1.3468922, \\
a'^2\frac{d\mathrm{M}^{(0)}}{da'} &= +\ 1.4320706, & a'\,\mathrm{M}^{(1)} &= +\ 0.9273726, \\
aa'\frac{d\mathrm{M}^{(1)}}{da} &= +\ 1.6761351, & a'^2\frac{d\mathrm{M}^{(1)}}{da'} &= -\ 1.7474041, \\
a'\,\mathrm{M}^{(2)} &= -\ 0.6936077, & aa'\frac{d\mathrm{M}^{(2)}}{da} &= -\ 1.5142225, \\
a'^2\frac{d\mathrm{M}^{(2)}}{da'} &= +\ 1.5753515, & a'\,\mathrm{M}^{(3)} &= +\ 9.9801955, \\
aa'\frac{d\mathrm{M}^{(3)}}{da} &= +\ 0.8610587, & a'^2\frac{d\mathrm{M}^{(3)}}{da'} &= -\ 0.9147377.
\end{aligned}
$$

On a ensuite, d'après les résultats de la *Mécanique*

céleste,

$$aF = -\,0.00289662, \qquad a'F' = +\,0.001383833,$$
$$G = -\,630''.88387 \text{ Déc.}, \qquad G' = +\,97''.202867 \text{ Déc.},$$

d'où l'on conclura

$$\log F = -\,6.7457908, \qquad \log G = -\,6.9960694,$$
$$F' = +\,6.1616322, \qquad G' = +\,6.1837990.$$

Au moyen de ces valeurs j'ai trouvé

$$\begin{aligned} A = m.(&0.011075 - 0.213760 + 0.041659 + 0.021313 + 0.050496 - 0.974419 \\ &+ 0.189900 + 0.097157 + 0.014773 - 0.268424 + 0.050250 + 0.024885 \\ &+ 0.032733 - 0.614129 + 0.117682 + 0.059282) = -\,m.1.359527, \\ B = m.(&0.114093 - 0.024941 - 0.121993 + 0.012833 + 0.520210 - 0.113692 \\ &- 0.556103 + 0.058499 + 0.152187 - 0.031319 - 0.147150 + 0.014983 \\ &+ 0.337216 - 0.071655 - 0.344620 + 0.035697) = -\,m.0.165755, \end{aligned}$$

on aura donc

$$\frac{a'.d.\delta R'}{mdt} = -\,1.359527 \sin(5n't - 2nt) + 0.165755 \cos(5n't - 2nt),$$

d'où, en multipliant les deux termes de cette expression par le nombre dont le logarithme est $-\,1.0725999$, on tire

$$\delta\zeta' = -\,16''.06895 \sin(5n't - 2nt) + 1''.95914 \cos(5n't - 2nt).$$

On formerait, par une suite d'opérations semblables, la valeur correspondante de $\delta\zeta$, mais on peut se dispenser de ce pénible calcul, en observant que les fonctions $M^{(0)}$, $M^{(1)}$, $M^{(2)}$, $M^{(3)}$, ne contenant pas la quantité $A^{(1)}$, et ne dépendant que des quantités $A^{(4)}$, $A^{(5)}$, $A^{(6)}$, $A^{(7)}$, qui sont les mêmes pour les deux planètes m et m', les valeurs

de $\delta\zeta$ et de $\delta\zeta'$, se trouveront liées, ainsi que nous l'avons démontré précédemment, par l'équation de condition

$$\delta\zeta = -\frac{m'\sqrt{a}}{m\sqrt{a}}.\delta\zeta',$$

on aura donc

$$\delta\zeta = +\ 6''.62968 \sin(5n't - 2nt) - 0''.80830 \cos(5n't - 2nt).$$

On voit que ces deux expressions de $\delta\zeta$ et de $\delta\zeta'$, ont une valeur sensible, quoique aucun géomètre ne se soit occupé jusqu'ici de les déterminer, et que leur existence semble même avoir échappé à l'esprit investigateur de Laplace.

J'ai déterminé par une analyse semblable les inégalités de $\delta\zeta'$, qui résultent de la combinaison par voie de soustraction des argumens $6'nt - 3nt$ et $n't - nt$, ainsi que de celle des argumens $7n't - 5nt$ et $2n't - 3nt$. Je n'en rapporterai ici que les résultats numériques pour ne pas trop étendre les bornes de ce Mémoire : il sera facile de les vérifier. J'ai trouvé, relativement à ces deux combinaisons, les valeurs suivantes

$$\delta\zeta' = \quad 6''.04586 \sin(5n't - 2nt) + 2''.23454 \cos(5n't - 2nt),$$
$$\delta\zeta' = -\ 0''.54808 \sin(5n't - 2nt) + 1''.29603 \cos(5n't - 2nt),$$

et au moyen de l'équation

$$\delta\zeta = -\frac{m}{m'}\sqrt{\frac{a}{a'}}\,\delta\zeta',$$

j'en ai conclu, pour les valeurs correspondantes relatives à Jupiter,

$$\delta\zeta = -\ 1''.49438 \sin(5n't - 2nt) - 0''.92192 \cos(5n't - 2nt),$$
$$\delta\zeta = \quad 0''.22613 \sin(5n't - 2nt) - 0''.53472 \cos(5n't - 2nt).$$

Ces combinaisons doivent donner, il me semble, les termes les plus sensibles de la partie des deux grandes inégalités de Jupiter et de Saturne que nous considérons. Cependant, comme les combinaisons qui produisent de semblables inégalités sont en nombre infini, il pourrait se faire que parmi celles que nous avons négligées, il en existât encore quelqu'une qui eût une valeur appréciable; mais il est probable que toutes ces inégalités sont peu considérables.

En réunissant les parties de $\delta\zeta$ et de $\delta\zeta'$ que nous venons de déterminer à celles qui ont été calculées dans le n° 22, on aura l'expression complète de la partie des deux grandes inégalités des moyens mouvemens de Jupiter et de Saturne qui dépend des cubes et des produits de trois dimensions des excentricités, et qui est du second ordre par rapport aux forces perturbatrices. On aura ainsi

$$\delta\zeta = 3''.76027 \sin(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon)+14''.72268\cos(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon),$$
$$\delta\zeta' = 10''.72775 \sin(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon)-32''.58055\cos(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon).$$

24. On sait que si des valeurs complètes de $\delta\zeta$ et de $\delta\zeta'$ on retranche les termes provenant de la combinaison des argumens o et $5n't-2nt$, la partie restante doit satisfaire à l'équation de condition trouvée par Laplace (*), et qui remplace dans la seconde approximation l'équation, qui existe généralement entre les inégalités à longues périodes des élémens elliptiques de deux planètes m et m', résultant de leur action mutuelle. Mais avant de soumettre à cette vérification les valeurs précédentes, nous allons donner une démonstration très simple de l'équation dont

(*) *Connaissance des Tems* pour 1829.

il s'agit, et nous montrerons en même temps les restrictions que l'on doit apporter dans l'usage que l'on en fera et dans les conclusions qu'on en tire.

Reprenons les valeurs de R et de R′, *Mécanique céleste*, livre II, n° 46

$$R = m'\left(\frac{xx' + yy' + zz'}{r'^3} - \lambda\right),$$
$$R' = m\left(\frac{xx' + yy' + zz'}{r^3} - \lambda\right),$$

en désignant par x, y, z, les trois coordonnées orthogonales relatives à la masse m de Jupiter, par x', y', z', les mêmes coordonnées relatives à la masse m' de Saturne, et en faisant pour abréger

$$\lambda = [(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2]^{-\frac{1}{2}}.$$

Si l'on différentie par rapport aux coordonnées de m la première de ces expressions, et qu'on la multiplie ensuite par $(M + m')\,m$, en nommant M la masse du Soleil, qu'on différentie de même par rapport aux coordonnées de m' la valeur de R′, qu'on multiplie par $(M + m)\,m'$ l'expression résultante, qu'on ajoute ensuite ces deux produits, on trouvera

$$\left.\begin{aligned}&(M + m').m\,dR + (M + m).m'\,d'R' \\ &= (M + m')\,mm'.\left(\frac{x'dx + y'dy + z'dz}{r'^3} - d\lambda\right) \\ &+ (M + m)\,mm'.\left(\frac{xd'x' + yd'y' + zd'z'}{r^3} - d'\lambda\right),\end{aligned}\right\} \quad (E).$$

les caractéristiques d et d', désignant respectivement des différentielles prises par rapport aux coordonnées de m et de m'.

Cela posé, on a pour déterminer le mouvement autour

de M de la planète m, troublé par l'action de m', les trois équations suivantes (*Mécanique céleste*, livre II, n° 9)

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{(M+m)x}{r^3} + \frac{m'x'}{r'^3} - m'\frac{d\lambda}{dx} = 0,$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{(M+m)y}{r^3} + \frac{m'y'}{r'^3} - m'\frac{d\lambda}{dy} = 0,$$
$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{(M+m)z}{r^3} + \frac{m'z'}{r'^3} - m'\frac{d\lambda}{dz} = 0.$$

Le mouvement de m' troublé par l'action de m sera déterminé par les mêmes équations, dans lesquelles on changera ce qui est relatif à m dans ce qui se rapporte à m', et réciproquement.

Si de ces équations on tire les valeurs des six quantités $\frac{(M+m)x}{r^3}$, $\frac{(M+m)y}{r^3}$, etc., et qu'on les substitue dans l'équation (E), qu'on intègre ensuite l'équation résultante, en observant que

$$xdx + ydy + zdz = rdr, \quad x'dx' + y'dy' + z'dz' = r'dr',$$

et que par la nature de la fonction λ, on a

$$\frac{d\lambda}{dx}dx' + \frac{d\lambda}{dy}dy' + \frac{d\lambda}{dz}dz' - \frac{d\lambda}{dx}dx - \frac{d\lambda}{dy}dy - \frac{d\lambda}{dz}dz = -d\lambda,$$
$$\frac{d\lambda}{dx'}dx + \frac{d\lambda}{dy'}dy + \frac{d\lambda}{dz'}dz - \frac{d\lambda}{dx'}dx' - \frac{d\lambda}{dy'}dy' - \frac{d\lambda}{dz'}dz' = -d\lambda,$$

on trouvera

$$\left.\begin{aligned}(M+m')mfdR + (M+m')fd'R' = \text{const.} + mm'\left(\frac{m}{r} + \frac{m'}{r'}\right)\\ - mm'.\frac{dxdx' + dydy' + dzdz'}{dt^2} - (M+m+m').mm'\lambda\end{aligned}\right\} \text{(F)}.$$

Examinons les conséquences de cette équation.

Nous ne considérerons dans les deux membres que les termes qui dépendent de l'argument $5n't - 2nt$, et qui

ayant pour diviseur $5n' - 2n$, sont du troisième ordre relativement aux excentricités et aux inclinaisons. Ces termes, en effet, sont les seuls qui puissent acquérir, par une seconde intégration, la quantité $(5n' - 2n)^2$ pour diviseur dans les valeurs de $\delta\zeta$ et de $\delta\zeta'$. Pour déterminer ces termes, observons que les fonctions

$$-mm'\frac{dxdx' + dydy' + dzdz'}{dt^2}, \quad \text{et} \quad -(M + m + m').mm'\lambda,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{-(M + m + m').mm'}{\sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}},$$

ne renfermant aucun terme de cette espèce, lorsqu'on y substitue pour x, y, z leurs valeurs elliptiques. En effet les coordonnées x, y et z sont simplement fonctions du moyen mouvement nt de m, de même les coordonnées x', y', z', sont fonctions du moyen mouvement $n't$ de m'; il est donc impossible que la combinaison de ces coordonnées, dans le développement des fonctions précédentes, produise aucun terme ayant pour diviseur $5n' - 2n$. Si l'on considère donc simplement les termes de l'ordre m^2 dans l'équation (F), on aura

$$m\int d\mathrm{R} + m'\int d\mathrm{R}' = 0, \qquad \text{(G)}$$

d'où, en vertu des équations (1), n° 1, on conclura en intégrant

$$\zeta = -\frac{m'an}{ma'n'}.\zeta';$$

d'ailleurs, aux quantités près de l'ordre m, on a

$$na\sqrt{a} = n'd\sqrt{a'};$$

on aura donc

$$m\sqrt{a}\,\zeta + m'\sqrt{a'}.\zeta' = 0. \qquad (g)$$

Cette équation très simple qui lie entre elles les parties des quantités ζ et ζ' qui dépendent de la première puissance des forces perturbatrices, est la même que celle qui existe en général entre les inégalités à longues périodes des mouvemens planétaires. Laplace ayant remarqué que les inégalités observées par les astronomes, dans les moyens mouvemens de Jupiter et de Saturne, et en vertu desquelles le premier de ces mouvemens semblait s'accélérer tandis que l'autre se ralentissait, satisfaisaient à très peu près à cette équation, en conclut que ces inégalités, dont on avait si long-temps vainement cherché l'explication devaient résulter nécessairement de l'action mutuelle de ces deux planètes, et cette observation le conduisit, comme on sait, à en trouver la véritable cause et à en déterminer la valeur.

Considérons maintenant les termes du troisième ordre par rapport aux masses dans le second membre de l'équation (F). J'observe d'abord que la fonction $mm'\left(\frac{m}{r}+\frac{m'}{r'}\right)$ étant déjà du troisième ordre, il suffit d'y substituer pour r et r' leurs valeurs elliptiques, et qu'elle ne peut donner par conséquent aucun terme du genre de ceux que nous considérons. Quant à la fonction

$$-mm'.\frac{dxdx'+dydy'+dzdz'}{dt^2},$$

elle n'en donnera pas non plus de semblables, lorsqu'on n'aura égard, parmi les termes de l'ordre m^3, qu'à ceux qui dépendent du cube des excentricités et des inclinaisons.

En effet, en désignant par δ les variations dépendantes de la première puissance de la force perturbatrice, cette fonction ajoutera au second membre de l'équation (F)

la suivante

$$-mm'\delta.\frac{dxdx' + dydy' + dzdz'}{dt^2}.$$

Or, d'après les valeurs elliptiques des coordonnées x, y, z, x', etc., il est facile de s'assurer que chacun des produits $dxdx'$, $dydy'$, $dzdz'$, pourra se développer en une suite de termes de la forme $A\cos(i'n't + int + k)$, i et i' étant des nombres entiers quelconques différens de zéro, et A et k des fonctions des élémens elliptiques de m et de m'. Si l'on substitue maintenant à la place de ces élémens leurs valeurs augmentées des quantités dues aux forces perturbatrices; qu'on observe que d'après les formules qui déterminent ces variations, les inégalités qui dépendent de l'argument $5n't - 2nt$ sont les seules qui aient $5n' - 2n$ pour diviseur : on verra qu'il ne saurait résulter de cette substitution dans $\delta.A\cos(i'n't + int + k)$ aucun terme dépendant de l'argument $5n't - 2nt$, et ayant $5n' - 2n$ pour diviseur, à moins qu'on ne suppose $i' = 10$ et $i = -4$; mais alors A serait du sixième ordre par rapport aux excentricités, quantités que nous négligeons.

Quant au dernier terme de l'équation (F), on peut le réduire au suivant

$$-Mmm'\lambda,$$

puisque la partie de ce terme qui est du troisième ordre ne peut donner aucun terme ayant pour argument $5n't - nt$, et pour diviseur $5n' - 2n$.

Il faut, dans le terme précédent, substituer à la place de λ sa valeur dépendante des forces perturbatrices. Or, si l'on regarde λ comme une fonction des six variables r, v, s, r', v', s', ou des coordonnées polaires des planètes m et m', en remplaçant ces coordonnées par leurs valeurs augmentées des parties dues aux forces perturbatrices, on

aura

$$\delta\lambda = \frac{d\lambda}{dr}.\delta r + \frac{d\lambda}{dv}.\delta v + \frac{d\lambda}{ds}.\delta s + \frac{d\lambda}{dr'}.\delta r' + \frac{d\lambda}{dv'}.\delta v' + \frac{d\lambda}{ds'}.\delta s'.$$

D'après cette expression, il est évident que les seuls termes de δu dépendant de l'argument $5n't - 2nt$, qui puissent avoir $5n' - 2n$ pour diviseur, sont ceux qui résultent de la substitution des valeurs de δr, δv, etc., qui ont déjà pour argument $5n't - 2nt$, combinés avec la partie non périodique de λ. En faisant donc, pour le moment, abstraction de ces termes, on peut regarder comme nul le second membre de l'équation (F), et en désignant par δR et $\delta R'$ les parties de R et de R′ qui dépendent du carré des forces perturbatrices, cette équation donnera, en supposant $M = 1$,

$$mfd.\delta R + m'fd.\delta R' + mm'(fdR + fdR') = 0. \qquad (H)$$

Si l'on ne considère au contraire dans l'équation (F) que les parties qui sont dues à la combinaison des argumens 0 et $5n't - 2nt$, on aura

$$mfd.\delta R + m'fd.\delta' R' = - mm'.\delta\lambda;$$

or, la valeur de R donne

$$m'\lambda = - R + m'\left(\frac{xx' + yy' + zz'}{r'^3}\right);$$

par conséquent,

$$m'\delta\lambda = - \delta R + m'\delta.\left(\frac{xx' + yy' + zz'}{r'^3}\right).$$

Nous ne considérons dans $\delta\lambda$ que les termes qui résultent de la combinaison de la partie non périodique de λ

avec ceux de δr, δv, δs, etc., qui dépendent de l'argument $5n't - 2nt$. Or, la dernière partie de l'équation précédente ne fournit pas de termes semblables; en effet, en substituant pour $\frac{x'}{r'^3}$, $\frac{y'}{r'^3}$, $\frac{z'}{r'^3}$, leurs valeurs $-\frac{d^2x'}{dt^2}$, $-\frac{d^2y'}{dt^2}$, $-\frac{d^2z'}{dt^2}$, relatives au mouvement elliptique, on a

$$\frac{xx' + yy' + zz'}{r'^3} = -\frac{d(xdx' + ydy' + zdz')}{dt^2} + \frac{dxdx' + dydy' + dzdz'}{dt^2},$$

équation qui fait voir que la fonction qui forme le premier membre ne contient aucun terme non périodique ou relatif à l'argument o. On aura donc simplement dans ce cas

$$m'\delta\lambda = -\delta R,$$

et par conséquent

$$mfd.\delta R + m'fd.\delta R' - m\delta R = 0. \qquad (h)$$

En vertu de la relation (G), l'équation (H) peut prendre cette forme

$$mfd.\delta R + m'fd'.\delta R' + m'(m - m')fdR' = 0. \qquad (K)$$

Désignons par $\delta_1\zeta$ et $\delta_1\zeta'$ les parties de $\delta\zeta$ et de $\delta\zeta'$ qui proviennent des diverses combinaisons que nous avons calculées, moins les deux qui se rapportent à celle de l'argument $5n't - 2nt$ avec la partie non périodique de R; on aura en vertu des formules (2), n° 1,

$$\delta_1\zeta = 3an\,fdtfd.\delta R$$
$$\delta_1\zeta' = 3a'n'fdtfd'.\delta R'.$$

On a de plus, par la formule (1), n° 1,

$$\zeta' = 3a'n'fdtfd'R'.$$

L'équation (K), en vertu de ces valeurs et en observant que, aux quantités près de l'ordre m, on a $na\sqrt{a} = n'a'\sqrt{a'}$, donnera en l'intégrant

$$m\sqrt{a}.\delta_{,}\zeta + m'\sqrt{a'}.\delta_{,}\zeta' + (m - m').m'\sqrt{a'}.\zeta' = 0, \qquad (L)$$

équation par laquelle on pourra déterminer la valeur de $\delta_{,}\zeta$, lorsque celle de $\delta_{,}\zeta'$ sera connue, et réciproquement, ou qui servira à vérifier les valeurs de ces quantités, si elles ont été calculées séparément.

Il faut toutefois remarquer que s'il arrivait, comme cela a lieu en effet, qu'une partie des valeurs de $\delta_{,}\zeta$ et de $\delta_{,}\zeta'$, fussent liées par l'équation de condition

$$m\sqrt{a}\,\delta_{,}\zeta + m'\sqrt{a'}\,\delta_{,}\zeta' = 0,$$

toutes les inégalités qui satisferaient à cette équation n'ajouteraient rien à l'équation (L), en sorte qu'on pourrait en faire abstraction sans nuire à son exactitude. Il ne suffit donc pas que les valeurs de $\delta_{,}\zeta$ et de $\delta_{,}\zeta'$, vérifient l'équation (L), pour qu'on doive en conclure que ces valeurs sont exactes; il faut encore qu'on se soit assuré par le calcul direct que l'on n'a omis aucune des parties de ces inégalités qui peuvent acquérir une valeur sensible.

Quant aux parties de $\delta\zeta$ et de $\delta\zeta'$, qui dépendent de la combinaison de l'argument $5n't - 2nt$ avec la partie non périodique de R, en les désignant par $\delta_{,,}\zeta$ et $\delta_{,,}\zeta'$, on aura entre elles l'équation de condition

$$m\sqrt{a}.\delta_{,,}\zeta + m'\sqrt{a'}.\delta_{,,}\zeta' - 3m\int\delta R.dt = 0. \qquad (M)$$

Soumettons à la vérification des deux équations (L) et (M) les valeurs numériques de $\delta\zeta$ et de $\delta\zeta'$ trouvées précédemment.

Les masses de Jupiter et de Saturne que nous avons adoptées donnent

$$m = \frac{1}{1070.5}, \qquad m' = \frac{1}{3512}.$$

On a d'ailleurs

$$\log \frac{a}{a'} = \log \alpha = 9.7366493,$$

d'où l'on conclura

$$\log \frac{m'}{m}\sqrt{\frac{a'}{a}} = 9.6157076, \qquad \log (m - m') = 6.8125155.$$

L'équation (L) donnera ainsi

$$\delta\zeta = -0.412769\ \delta\zeta' - 0.0002680 5\ \zeta'. \quad \text{(N)}$$

On trouve (*Mécanique céleste*, page 140 du 3e volume), en effectuant la correction résultant de la masse, maintenant adoptée pour Saturne, et en déduisant de ζ' la partie qui dépend du carré de la force perturbatrice

$$\zeta' = -2901''.0 \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) - 295''.9 \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon).$$

En faisant la somme des cinq dernières équations renfermées dans le tableau (S), et en y joignant la partie de $\delta\zeta'$, donnée par l'équation (5), on trouve

$$\delta\zeta' = 10''.9864 2 \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) - 40''.1864 9 \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon).$$

Ces valeurs substituées dans l'équation (N), donnent

$$\delta\zeta = -3''.7572 4 \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) + 16''.6670 8 \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon).$$

En additionnant les cinq dernières équations (R), et en

y joignant la valeur de $\delta\zeta$ donnée par l'équation (2), on trouve par le calcul direct

$$\delta_{I}\zeta = -0''.71232\sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) + 17''.00352\cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon).$$

Ces deux valeurs de $\delta_{I}\zeta$ s'accordent entre elles d'une manière suffisante pour montrer l'exactitude de nos calculs. Nous n'avons point soumis à la vérification précédente les valeurs complètes de $\delta\zeta$ et de $\delta\zeta'$ données n° 23, parce que les parties calculées dans le n° 23 n'ajouteraient rien à l'équation (L).

Quant à l'équation (M), j'observe que l'on a, en considérant la partie de δR qui résulte de la partie non périodique de R

$$\delta\mathrm{R} = \frac{m'}{2}\frac{d\mathrm{A}^{(0)}}{da}\delta r + \frac{m'}{2}\frac{d\mathrm{A}^{(0)}}{da'}\delta r';$$

on a d'ailleurs

$$d.\delta\mathrm{R} = \frac{m'}{2}\frac{d\mathrm{A}^{(0)}}{da}d.\delta r,$$
$$d.\delta\mathrm{R}' = \frac{m}{2}\frac{d\mathrm{A}^{(0)}}{da'}d.\delta' r.$$

Si l'on substitue ces valeurs dans l'équation (h), on voit qu'elle est identiquement nulle, d'où l'on peut conclure que les valeurs de $\delta_{II}\zeta$ et $\delta_{II}\zeta'$, qui sont déduites des précédentes, satisfont également à l'équation (N).

Il résulte de cette vérification que les valeurs de $\delta\zeta$ et de $\delta\zeta'$ que nous avons déterminées, ont toute la précision que l'on pouvait désirer. Ces valeurs introduisent dans les expressions des longitudes vraies de Jupiter et de Saturne des inégalités dépendantes de l'argument de la grande inégalité, et du second ordre par rapport à la force perturbatrice, auxquelles il sera nécessaire d'avoir égard.

Mais comme le moyen mouvement est toujours accompagné d'une constante que l'on nomme *la longitude de l'époque*, et que le carré des forces perturbatrices produit dans la variation de cette constante des inégalités du même ordre que celles que nous venons d'examiner, c'est-à-dire dépendantes de l'argument $5n't - 2nt$, et ayant pour diviseur la très petite quantité $(5n' - 2n)^2$, il est indispensable d'y avoir égard, et ce n'est qu'après les avoir déterminées, qu'en joignant leurs valeurs à celles de $\delta\zeta$ et de $\delta\zeta'$, rapportées plus haut, on aura rigoureusement toute la partie sensible des grandes inégalités de Jupiter et de Saturne dépendante du carré des forces perturbatrices.

Inégalités de la longitude de l'époque dépendantes du carré de la force perturbatrice.

25. En désignant par ε la longitude de la planète m, à l'instant d'où l'on compte le temps, ou ce qu'on nomme dans le mouvement elliptique *la longitude de l'époque*, la variation de cet élément dans l'orbite troublée est déterminée par la formule suivante (*Supp.* au 3e volume de la *Mécanique céleste*)

$$d\varepsilon = 2a^2 ndt.\frac{d\mathrm{R}}{da} - \frac{andt\sqrt{1-e^2}}{e}.(1-\sqrt{1-e^2}).\frac{d\mathrm{R}}{de},$$

ou bien en développant et négligeant les termes du troisième ordre relativement aux excentricités

$$d\varepsilon = 2a^2 ndt.\frac{d\mathrm{R}}{da} - \frac{andt}{2}.e\frac{d\mathrm{R}}{de}.$$

Si l'on suppose la fonction R réduite en une suite de sinus ou de cosinus des moyens mouvemens des planètes

m et m', on voit que le terme de ce développement qui a pour argument $5n't - 2nt$, produira dans ε un terme qui aura $5n' - 2n$ pour dénominateur; le terme correspondant du moyen mouvement a pour diviseur le carré de ce nombre, à cause de la double intégration qu'il subit; ce terme est donc, toutes choses égales d'ailleurs, beaucoup plus considérable que le premier, et il fournit en effet la principale partie de la longitude moyenne. Mais dans la seconde approximation les termes de la longitude de l'époque relatifs à l'argument de la grande inégalité, sont divisés par la très petite quantité $(5n' - 2n)^2$, et il n'y a aucune raison pour ne point avoir égard à ces termes, du moment qu'on a cru devoir tenir compte de ceux qui leur correspondent dans l'expression du moyen mouvement.

Si l'on désigne comme précédemment par la caractéristique δ, l'augmentation de chacune des quantités R, a, n, e, due à la force perturbatrice, on aura

$$\left.\begin{aligned}\delta\varepsilon = 2a^2n.\int\frac{d.\delta\mathrm{R}}{da}.dt + an\int\frac{d\mathrm{R}}{da}\delta a - \frac{an}{2}.\int e\frac{d.\delta\mathrm{R}}{de}.dt \\ - \frac{n}{2}.\int\frac{d\mathrm{R}}{de}.\left(a\delta e - \frac{1}{2}e\delta a\right).dt;\end{aligned}\right\}\ (\mathrm{C})$$

et en désignant par ε', a', n', R', ce que deviennent les quantités ε, a, n, R, relativement à la planète m', on aura de même

$$\left.\begin{aligned}\delta\varepsilon' = 2a'^2n'\int\frac{d.\delta\mathrm{R}'}{da'}.dt + a'n'\int\frac{d\mathrm{R}'}{da'}\delta a' - \frac{a'n'}{2}.\int e'\frac{d.\delta\mathrm{R}'}{de}.dt \\ - \frac{n'}{2}.\int\frac{d\mathrm{R}'}{de'}.\left(a'\delta e' - \frac{1}{2}e'\delta a'\right).dt.\end{aligned}\right\}\ (\mathrm{D})$$

Examinons successivement les différens termes de ces deux expressions.

Commençons par $\delta\varepsilon$: j'observe que le premier terme

de la formule (C) ne peut donner dans $\delta\varepsilon$ de termes divisés par $(5n'-2n)^2$, qu'autant qu'on considérera dans δR les termes qui ont déjà pour diviseur $5n'-2n$. Si l'on se borne donc à ces termes, la valeur de δR rapportée n° 3, donnera simplement

$$\delta R = \frac{m'}{2}\cdot\frac{dA^{(0)}}{da}\cdot\delta r + \frac{m'}{2}\cdot\frac{dA^{(0)}}{da'}\cdot\delta r',$$

$\frac{m'}{2}A^{(0)}$ étant la partie non périodique du développement de R, et δr, $\delta r'$, désignant les variations des rayons elliptiques des deux planètes dépendantes de l'argument $5n't-2nt$.

Cette valeur doit être différentiée par rapport à la constante a, sans faire varier celle qui se trouverait comprise implicitement dans les valeurs de δr et $\delta r'$, introduites par les variations des coordonnées de la planète troublée et de la planète perturbatrice; en sorte qu'on aura

$$\frac{d.\delta R}{da} = \frac{m'}{2}\cdot\frac{d^2A^{(0)}}{da^2}\cdot\delta r + \frac{m'}{2}\cdot\frac{d^2A^{(0)}}{dada'}\cdot\delta r'.$$

Supposons aux valeurs de δr et $\delta r'$ cette forme

$$\frac{\delta r}{a^2} = 2f\,[P\sin(5n't-2nt) + P'\cos(5n't-2nt)],$$
$$\frac{\delta r'}{a'^2} = -2f'[P\sin(5n't-2nt) + P'\cos(5n't-2nt)];$$

on aura donc

$$\frac{d.\delta R}{m'da} = \left(fa^2\frac{d^2A^{(0)}}{da^2} - f'a'^2\frac{d^2A^{(0)}}{dada'}\right)[P\sin(5n't-2nt) + P'\cos(5n't-2nt)].$$

On aurait de même, relativement à Saturne,

$$\frac{d.\delta R'}{mda'} = \left(f a^2 \frac{d^2 A^{(0)}}{dada'} - f' a'^2 \frac{d^2 A^{(0)}}{da'^2}\right) [P \sin(5n't - 2nt) + P' \cos(5n't - 2nt)].$$

Pour réduire ces formules en nombres, observons qu'on a (*Mécanique céleste*, n° 49, livre II)

$$aa' \frac{d^2 A^{(0)}}{dada'} = -2a \frac{dA^{(0)}}{da} - a^2 \frac{d^2 A^{(0)}}{da^2},$$
$$a'^2 \frac{d^2 A^{(0)}}{da'^2} = 2A^{(0)} + 4a \frac{dA^{(0)}}{da} + a^2 \frac{d^2 A^{(0)}}{da^2};$$

on a d'ailleurs

$$aa' \frac{dA^{(0)}}{da} = -\alpha \frac{db^{(0)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha}, \qquad a'a^2 \frac{d^2 A^{(0)}}{da^2} = -\alpha^2 \frac{d^2 b^{(0)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^2},$$

d'où l'on a conclu, au moyen des valeurs rapportées dans le tableau I,

$$aa'^2 \frac{d^2 A^{(0)}}{dada'} = 1.737106, \qquad a'a^2 \frac{d^2 A^{(0)}}{da^2} = -0.855012,$$
$$a'^3 \frac{d^2 A^{(0)}}{da'^2} = -6.979669.$$

Les valeurs des quantités $a'P$ et $a'P'$, ont été rapportées n° 3; au moyen de ces valeurs on aura

$$\frac{aa'^2 d.\delta R}{m'da} = -(0.00009345\,5\,af + 0.0001898\,7\,a'f')\sin(5n't - 2nt)$$
$$+ (0.0008747\,6\,af + 0.0017772\,2\,a'f')\cos(5n't - 2nt),$$
$$\frac{a'^3 d.\delta R'}{mda'} = +(0.0001898\,7\,af + 0.0007628\,9\,a'f')\sin(5n't - 2nt)$$
$$-(0.0017772\,3\,af + 0.0071409\,0\,a'f')\cos(5n't - 2nt).$$

On trouve, *Mécanique céleste*, tome 3e, page 24,

$$af = \frac{2m'na}{5n' - 2n}, \qquad a'f' = \frac{5mn'a'}{5n' - 2n};$$

on a d'ailleurs, d'après les valeurs rapportées dans le tableau I,

$$\log \frac{4m'^2n^2a^2}{(5n'-2n)^2 \sin 1''} = 2.04259\,36, \qquad \log \frac{10mm'nn'a}{(5n'-2n)^2 \sin 1''} = 2.82482\,05,$$

d'où, en substituant dans la formule (C) la valeur précédente de $\frac{d.\delta R}{da}$, et en intégrant ensuite, il est aisé de conclure, pour la partie de $\delta\varepsilon$ résultant du premier terme de cette formule,

$$\delta\varepsilon = 1''.283796 \sin(5n't - 2nt) + 0''.137153 \cos(5n't - 2nt).$$

De même, on a par ce qui précède

$$\log \frac{4mm'nn'a}{(5n'-2n)^2 \sin 1''} = 2.42688\,04, \qquad \log \frac{10m^2n^2}{(5n'-2n)^2 \sin 1''} = 3.20910\,33.$$

Au moyen de ces valeurs et de celle de $\frac{a'.d.\delta R'}{da'}$, on trouvera

$$\delta\varepsilon' = -12''.032\,21 \sin(5n't - 2nt) - 1''.285458 \cos(5n't - 2nt)$$

26. Considérons le second terme de la formule (C).

Il est évident que les seuls termes divisés par $(5n'-2n)^2$ qui puissent en résulter dans $\delta\varepsilon$, sont ceux qui dans la valeur de δa ont déjà $(5n'-2n)$ pour diviseur. Or, δa est déterminé par cette formule

$$\delta a = -2a^2 \int d\mathrm{R}.$$

Si l'on suppose donc

$$\mathrm{R} = m'\,\mathrm{P} \sin(5n't - 2nt) + m'\,\mathrm{P}' \cos(5n't - 2nt),$$

d'où l'on tire

$$\int d\mathrm{R} = -\frac{2nm'}{5n'-2n}\cdot[\mathrm{P}\sin(5n't-2nt)+\mathrm{P}'\cos(5n't-2nt)],$$

on aura

$$\delta a = \frac{4m'na^2}{5n'-2n}\cdot[\mathrm{P}\sin(5n't-2nt)+\mathrm{P}'\cos(5n't-2nt)].$$

Il faudra combiner dans $\delta\varepsilon$ la valeur précédente δa avec celle de $\frac{d\mathrm{R}}{da}$ qui résulte de la partie non périodique de R; c'est-à-dire, qu'en ne considérant que le second terme de la formule (C), on aura

$$\delta\varepsilon = \frac{2m'^2a^4n^2}{(5n'-2n)^2}\cdot a\frac{d\mathrm{A}^{(0)}}{da}\cdot[\mathrm{P}'\sin(5n't-2nt)-\mathrm{P}\cos(5n't-2nt)].$$

Ce terme est identiquement le même que le dernier de $\delta\zeta$ calculé n° 3. Il en serait de même du terme correspondant de $\delta\varepsilon'$ qui serait égal au dernier terme de $\delta\zeta'$ calculé n° 4. On aura donc, en ayant égard seulement à ces termes

$$\delta\varepsilon = 0''.024886\sin(5n't-2nt)+0''.0026587\cos(5n't-2nt),$$
$$\delta\varepsilon' = 2''.17020\sin(5n't-2nt)+0''.23185\cos(5n't-2nt).$$

Considérons le troisième terme de l'expression de $\delta\varepsilon$. Il est évident que les seuls termes divisés par $(5n'-2n)^2$ qui puissent en résulter, sont ceux qui proviennent des termes de $\delta\mathrm{R}$ qui sont déjà divisés par $5n'-2n$; or, nous avons vu que ces termes sont donnés par l'équation

$$\delta\mathrm{R} = \frac{m'}{2}\frac{d\mathrm{A}^{(0)}}{da}\delta r + \frac{m'}{2}\frac{d\mathrm{A}^{(0)}}{da'}\delta r'.$$

Pour avoir $\frac{d.\delta R}{de}$ il faut différentier cette expression par rapport à la constante e, sans faire varier δr, et $\delta r'$. On voit qu'alors elle se réduit à zéro; nous n'avons, il est vrai, dans la partie constante du développement de R, considéré que le premier terme, celui qui est indépendant des excentricités, et c'est en effet le seul auquel on doive avoir égard, puisque δr et $\delta r'$ étant déjà du troisième ordre relativement à ces élémens, les autres termes seraient de l'ordre des quantités que nous avons négligées.

Passons enfin au dernier terme de la formule (C).

En n'ayant égard qu'à ce terme, on a

$$\delta\iota = -\frac{n}{2}\int\frac{dR}{de}\left(a\delta e - \frac{1}{2}e\delta a\right)dt.$$

Il est clair que les seuls termes qui puissent avoir $(5n' - 2n)^2$ pour diviseur, sont ceux de δe et δa qui dépendent de l'argument $5n't - 2nt$, combinés avec les termes non périodiques de $\frac{dR}{de}$; or $e\frac{dR}{de}$ est une fonction du second ordre par rapport aux excentricités, et les termes de δa dont il s'agit sont déjà du troisième ordre; il ne résulterait donc de cette combinaison que des termes du cinquième ordre, relativement aux excentricités, quantités que nous négligeons. Bornons-nous par conséquent à considérer les termes de $\delta\varepsilon$ qui naissent de la substitution de la valeur de δe. On a, pour déterminer la variation de l'excentricité (*Mécanique céleste*, supplément au 3e volume),

$$\delta e = \frac{1}{2}aedR + andt\frac{dR}{ed\omega}.$$

La première partie de cette expression ne peut donner

dans $\delta\varepsilon$, aucun terme du genre de ceux que nous calculons, par les mêmes raisons développées plus haut; il suffira donc de considérer la seconde. En n'ayant égard qu'aux termes du développement de R qui dépendent de l'argument $5n't-2nt$, on a (*Mécanique céleste*, tome 3e, page 8)

$$R = m'P\sin(5n't - 2nt) + m'P'\cos(5n't - 2nt),$$

et par le numéro 12 du même livre

$$\frac{dP}{ed\omega} = \frac{dP'}{de}, \qquad \frac{dP'}{ed\omega} = -\frac{dP}{de},$$

d'où l'on conclut

$$\delta e = -\frac{m'an}{5n' - 2n}\cdot\left[\frac{dP}{de}\sin(5n't - 2nt) + \frac{dP}{de'}\cos(5n't - 2nt)\right];$$

on aura donc par la substitution de cette valeur

$$\delta\varepsilon = \frac{m'a^2n^2}{4(5n' - 2n)^2}\cdot\frac{dL}{de}\cdot\left[\frac{dP'}{de}\sin(5n't - 2nt) - \frac{dP}{de}\cos(5n't - 2nt)\right],$$

L désignant ici la partie non périodique du développement de dR, de l'ordre du carré des excentricités. Il ne s'agit plus que de réduire cette formule en nombres, ce qui sera facile, lorsque la valeur numérique de $\frac{dL}{de}$ sera connue. Or, on a, *Mécanique céleste*, tome 3e, page 45,

$$L = \frac{m'}{2}A^{(0)} + \frac{m'}{8}H(e^2 + e'^2) + \frac{m'}{2}.ee'H'\cos(\omega - \omega') + \frac{m'}{8}aa'B^{(1)}\gamma^2;$$

les quantités H et H′ étant déterminées par les équations

$$H = 2a\frac{dA^{(0)}}{da} + a^2\frac{d^2A^{(0)}}{da^2},$$

$$H' = A^{(1)} - a\frac{dA^{(1)}}{da} - \frac{1}{2}a^2\frac{d^2A^{(1)}}{da^2}.$$

Cette valeur de L se rapporte à l'action de la planète m' sur la planète m, mais en la multipliant par $\frac{m}{m'}$, elle s'applique également à l'action de m sur m'; parce que les coefficiens $A^{(0)}$, $B^{(1)}$, demeurent les mêmes dans les deux cas, et que le coefficient $A^{(1)}$ devient relativement à m', $A'^{(1)} = A^{(1)} + \left(\frac{a'}{a^2} - \frac{a}{a'^2}\right)$, ce qui n'altère pas, comme il est aisé de s'en assurer, la valeur du coefficient H'.

L'expression de L donne, en la différentiant,

$$\frac{dL}{ede} = \frac{m'}{4}H + \frac{m'}{2}H'\frac{e'}{e}\cos(\omega' - \omega),$$

$$\frac{dL}{e'de'} = \frac{m'}{4}H + \frac{m'}{2}H'\frac{e}{e'}\cos(\omega' - \omega);$$

on a d'ailleurs

$$a'H = -2\alpha\frac{db^{(0)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha} + \alpha^2\frac{d^2b^{(0)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^2},$$

$$a'H' = -b^{(1)}_{\frac{1}{2}} + \alpha\frac{db^{(1)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha} + \frac{1}{2}\alpha^2\frac{d^2b^{(1)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^2}.$$

Ces formules, au moyen des valeurs rapportées tableau I, donnent

$$a'H = -1.737103, \qquad a'H' = +0.567711;$$

on en conclura aisément

$$\frac{a'dL}{ede} = m'.-0.3641288, \qquad \frac{a'dL}{e'de'} = -m'.0.3829866.$$

Nous avons trouvé par ce qui précède

$$\log a'e\frac{dP}{de} = 7.1477878\,-, \qquad \log a'e\frac{dP'}{de} = 6.8005659\,-,$$

on a d'ailleurs

$$\log\frac{m'^2a^2n^2}{4(5n'-2n)^2\sin 1''} = 0.8384736;$$

au moyen de ces valeurs on aura

$$\delta\varepsilon = 0''.0015859\sin(5n't-2nt) - 0''.0035279\cos(5n't-2nt).$$

27. En suivant la même analyse, on trouve

$$\delta\varepsilon' = \frac{m^2a'^2n'^2}{4(5n'-2n)^2}\cdot\frac{dL}{de'}\cdot\left[\frac{dP'}{de'}\sin(5n't-2nt) - \frac{dP}{de'}\cos(5n't-2nt)\right];$$

on a par ce qui précède

$$\log a'e'\frac{dP}{de'} = 7.2396644\,+, \qquad \log a'e'\frac{dP'}{de'} = 7.3807248\,-,$$

et

$$\log\frac{m^2n'^2}{4(5n'-2n)^2\sin 1''} = 1.6070433;$$

au moyen de ces valeurs, on trouve

$$\delta\varepsilon' = +\,0''.037235\sin(5n't-2nt) + 0''.026908\cos(5n't-2nt).$$

28. En rassemblant les parties de $\delta\varepsilon$ et de $\delta\varepsilon'$, que nous venons de déterminer, on aura pour leurs valeurs complètes

$$\delta\varepsilon = +\,1''.310268\sin(5n't-2nt) + 0''.136284\cos(5n't-2nt),$$
$$\delta\varepsilon' = -\,9''.82477\sin(5n't-2nt) - 1''.02670\cos(5n't-2nt).$$

En joignant ces valeurs à celles de $\delta\zeta$ et de $\delta\zeta'$, données numéros 21 et 22, on aura la variation totale de la longitude moyenne de Jupiter et de Saturne, dépendante de l'argument $5n't - 2nt$ et du carré des forces perturbatrices. Il en résultera une inégalité correspondante dans les mouvemens de ces deux planètes, et comme les variations des autres élémens de l'orbite elliptique n'introduisent dans l'expression de la longitude vraie aucune inégalité de la même espèce, du moins tant qu'on n'a égard qu'à celles qui sont du troisième ordre par rapport aux excentricités et aux inclinaisons des orbites, si l'on nomme v et v' les longitudes vraies de Jupiter et Saturne dans l'orbite troublée, on aura

$$\delta v = 5''.07054 \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) + 14''.85896 \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon),$$
$$\delta v' = 0''.90298 \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) - 33''.60725 \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon).$$

Telles sont donc en définitive les parties des deux grandes inégalités de Jupiter et de Saturne dépendantes du carré de la force perturbatrice qui résultent de notre analyse, ces parties devront s'ajouter à celles qui dépendent de la première puissance de cette force, et qui ont été déterminées avec une exactitude suffisante, *Mécanique céleste*, tome 3e, pages 127, 129, 138 et 139; on aura ainsi les valeurs des deux grandes inégalités de Jupiter et de Saturne qui doivent être substituées à celles qu'on avait employées jusqu'ici dans le calcul des tables astronomiques, et qui serviront à leur donner un plus grand degré de précision.

Il existe encore dans les longitudes vraies de Jupiter et de Saturne des inégalités dépendantes du carré de la force perturbatrice, qui sont relatives au double de l'argument de la grande inégalité, et qui, par conséquent, ont une

période deux fois moins longue. Ces inégalités sont du sixième ordre, par rapport aux excentricités et aux inclinaisons, mais comme elles sont affectées du très petit diviseur $(5n' - 2n)^4$, elles peuvent acquérir par cette raison une valeur sensible. Comme la détermination de ces inégalités offre peu de difficulté, et qu'elles ont été calculées dans la *Mécanique céleste*, nous renverrons sur ce point au sixième livre de cet ouvrage. Jointes à celles que nous avons calculées dans ce Mémoire, ces inégalités donneront toutes les perturbations dont peuvent être affectés les mouvemens de Jupiter et de Saturne en vertu de leur action mutuelle, lorsqu'on n'a égard qu'aux quantités dépendantes du carré de la force perturbatrice.

MÉMOIRE

SUR L'ORGANISATION

DES CIRRIPÈDES.

MÉMOIRE

SUR

L'ORGANISATION

DES CIRRIPÈDES

ET

SUR LEURS RAPPORTS NATURELS

AVEC LES ANIMAUX ARTICULÉS;

PAR G. J. MARTIN-SAINT-ANGE,

Docteur en Médecine, Chevalier de la Légion-d'Honneur.

CHAPITRE PREMIER.

ÉTAT PRÉSENT DE LA SCIENCE SUR LES CIRRIPÈDES.

§ I^er^.

Résumé historique.

De tous les naturalistes, Bruguière paraît être le premier qui ait donné le nom d'Anatife à un genre de mollusque de la classe des Cirripèdes. Gesner, Belon, Langius, Rondelet, désignent ces animaux sous le nom vulgaire de Pouce-Pieds (*Pollicipes*). Aldrovande nomme

l'espèce commune *Concha anatifera;* Argenville forme avec les Anatifes sa famille des Pouce-Pieds; Klein, le genre unique de ses *Polyconchæ,* sous le nom de *Concha anatifera.* Gualtieri fait avec les Anatifes le second genre de ses *Polythomœ conchoïdes,* sous le nom de *Tellina cancellifera,* Telline porte-crabes. Linné réunit les Anatifes et les Balanes en un seul genre, celui du *Lepas.* Klein, Gualtieri, Lister d'Argenville et Bruguière, ne partagent point cette opinion. Favart d'Herbegny considère les Anatifes d'une tout autre manière : il dit que ces animaux font le passage qui conduit aux Crustacés. Lamarck, qui a plus que personne étudié les rapports qui existent entre les Crustacés et les Anatifes, a adopté le nom de ces derniers, et trouvé que leur organisation avait une grande analogie avec celle des Balanes. Malgré son indécision sur le classement des Anatifes et des Balanes, il finit par ranger ces deux groupes parmi les Mollusques acéphales.

Après l'anatomie incomplète qu'en donna Poli, M. Duméril, dans sa *Zoologie analytique,* page 170, établit dans l'ordre des Branchiopodes les genres Anatifier et Balanier, et les regarda comme formant le passage naturel des Mollusques aux Crustacés. En 1814, M. de Blainville adopta la classe des Cirripèdes, dans laquelle figure le genre Anatife de Bruguière, en la comprenant toutefois dans le type des Mollusques. Plus tard, dans un tableau de classification générale, il fit des Nématopodes et des Polyplaxiens, un *entre-type,* de manière que les Cirripèdes qu'il nomme Nématopodes, ont été classés, avec raison, différemment qu'on ne l'avait fait avant lui. En 1815, Oken divisa les Anatifes de Bruguière et de Lamarck en plusieurs genres; il forma la famille des *Lepaden,* et y plaça un genre de Crustacés, les Phronymes de Latreille. De cette manière, les Branchiopodes, les Crustacés et les

Cirripèdes se trouvaient renfermés dans la même classe. Cuvier ne crut pas devoir adopter la division d'Oken, établissant les trois genres *Branta, Mitella* et *Pollicipes* de la classe des *Lepaden.* Goldfuss adopte au contraire les trois genres établis par Oken. Schweiger n'admet que deux genres dans les Cirripèdes, et confond les quatre genres de Lamarck dans le genre Anatife de Bruguière. Enfin, le genre *Branta* d'Oken correspond au genre *Otion* de Leach, adopté par Lamarck et décrit par M. de Blainville, sous le nom d'*Aurifera;* le genre *Mitella* correspond au genre *Pollicipes* de Lamarck, formé des genres *Scapellum* et *Pollicipes* de Leach; et le genre *Lepas* d'Oken revient au genre Anatife de Lamarck, appelé *Pentalasmis* par Leach.

D'après ce court résumé, concernant la simple classification des Anatifes, on voit combien les auteurs ont été partagés sur la détermination du rang que ces animaux doivent occuper. Sans le moindre doute on aurait évité toute la confusion qui en est résultée, si l'on avait su établir par des comparaisons et des rapprochemens convenables, les rapports qui existent entre les organes des Anatifes et ceux des animaux voisins.

On devrait, à la vérité, s'étonner davantage de la lenteur avec laquelle on a marché dans l'étude et l'appréciation des connaissances anatomiques sur les Anatifes. Les erreurs commises à cet égard sont nombreuses, et elles ne s'arrêtent pas même devant les travaux admirables de Cuvier. Ce célèbre naturaliste, qui d'un coup d'œil pénétrait les secrets de la nature, s'est contenté cette fois (à l'égard des Anatifes) de relever simplement les erreurs commises par ses devanciers: il n'a pas cru devoir accorder plus de temps qu'il ne l'a fait, à la description minutieuse de leurs organes; et c'est là ce qu'il nous laisse à faire.

Comme la plupart des auteurs qui ont traité des Anatifes renvoient, pour tout ce qui concerne l'anatomie de ces animaux, aux savantes recherches de Cuvier, il nous a semblé convenable d'exposer brièvement les faits anatomiques qu'il établit, avant de faire connaître les résultats de notre travail. De cette manière, il sera plus facile de nous suivre dans les voies nouvelles où nous conduit la découverte de quelques faits encore inconnus.

§ II.

Analyse des recherches faites par Cuvier.

Après avoir décrit l'Anatife commun à l'extérieur, et ses muscles superficiels, ce célèbre auteur dit (page 9, *Mémoire sur les Mollusques*) : « Immédiatement sous les fibres de ces muscles se trouve une substance composée d'une infinité de petits grains, qui couvre les intestins, et s'étend jusque dans la base des pieds. *Je juge que ce sont les œufs*. Un vaisseau blanc se ramifie dans tout cet ovaire, et reçoit *sans doute les œufs* lorsqu'il en est temps, pour les conduire dans un sinus commun, d'où un canal étroit et simple les mène dans un autre canal beaucoup plus gros, ployé en zigzag, à parois épaisses, glanduleuses, blanches, que les auteurs précédens ont bien connu et qu'ils ont regardé comme le testicule. Je partage leur opinion, et *je pense que les œufs se fécondent en le traversant*. Ce canal perd sa texture glanduleuse à la hauteur de l'anus : il y devient un simple oviducte très mince, qui pénètre dans le tube en forme de trompe, s'unit à son congénère en un canal très mince qui en parcourt toute la longueur et se termine au petit orifice de l'extrémité de ce tube. *C'est par là que sortent les œufs ;* mais avant

de les répandre au dehors, l'animal les conserve assez long-temps en paquets, cachés entre son corps et son manteau, et y formant comme deux ou trois coussins de forme irrégulière. Lorsqu'on les trouve, l'*animal est vide d'œufs et a ses testicules beaucoup moins gorgés, ce qui prouve que la ponte est faite* et la saison de l'amour passée, si toutefois on peut nommer amour cette fécondation solitaire.

Le canal intestinal qui marche entre les deux *testicules* se compose de l'œsophage, auquel aboutissent les deux glandes salivaires de l'estomac et de l'intestin proprement dit. L'estomac présente à l'extérieur des parois toutes bosselées et qui se soutiennent par leur propre élasticité; leur couleur est brune et elles sont enveloppées extérieurement d'une couche glanduleuse. A la partie inférieure de ce viscère, tiennent deux appendices ou cœcum, qui n'en sont que les prolongemens et qui sont bosselés comme lui. A l'intérieur, tous ces organes sont creusés de cellules qui répondent aux bosselures du dehors, et dans le fond desquelles paraît se verser la liqueur bilieuse sécrétée par le tissu glanduleux qui enveloppe l'estomac.

L'*intestin est simple, tout d'une venue*, sans cœcum ni étranglement et sans valvules remarquables à l'intérieur. Il se termine, comme nous l'avons dit, à la base du tube en forme de trompe, après s'être un peu retréci pour former un petit rectum. *Je n'ai trouvé dans l'intestin et l'estomac qu'un magmas, où aucun débris ne m'annonçait la nature des alimens que choisit l'Anatife.*

Le système nerveux des Anatifes est tout-à-fait semblable à celui des animaux articulés. Le cerveau est composé de quatre petits lobes, placés en travers sur l'œsophage, et donnant quatre principaux nerfs qui se rendent aux mus-

cles et aux viscères. Les deux cordons latéraux qui forment, comme à l'ordinaire, un collier autour de l'œsophage, *donnent chacun un nerf;* puis ils *se réunissent* assez bien par le moyen de deux ganglions d'où partent les nerfs de la première paire de pieds. Les deux cordons marchent ensuite parallèlement le long du ventre, entre les bases des pieds, se renflent d'espace en espace en doubles ganglions, et donnent de chacun de ces ganglions les nerfs des parties environnantes.

J'aurais voulu constater et décrire aussi bien le système de la circulation, mais cela ne m'a pas été possible. On distingue encore assez les vaisseaux qui se rendent des branchies vers le dos de l'animal, où l'on aperçoit à travers les tégumens un tronc commun et longitudinal; mais je ne suis pas parvenu à l'isoler ni à voir un véritable cœur.

L'organisation que je viens de décrire dans le *Lepas anatifera,* se retrouve sans différence sensible dans l'*Anserifera,* le *Scapellum,* le *Pollicipes,* le *Mitella,* le *Dentata* Bruguière, et dans l'espèce que ce dernier a représentée planches de l'Encyclopédie. Le corps, proprement dit, des Balanes ressemble parfaitement à celui des Anatifes, ce sont les mêmes pieds et en même nombre, la même bouche, le même tube terminal, etc.; mais seulement les branchies en diffèrent. »

CHAPITRE II.

ORGANISATION DES CIRRIPÈDES.

§ Ier.

Observations faites sur des Anatifes vivans.

Les Anatifes sont fixés sur des corps étrangers (1) et marins, par la base de leur pédicule tubuleux, tendineux, souple, mobile et contractile. Lorsque ces animaux sont plongés dans l'eau, on les voit sortir leurs pattes de la cavité du manteau où elles sont renfermées; celles-ci exécutent des mouvemens toujours dans le même sens et comme pour attirer quelque chose vers leur centre. Cette manœuvre a pour résultat d'entraîner vers la bouche les corpuscules alimentaires qui se trouvent en suspension dans l'eau et que l'animal ne saurait aller chercher.

Si pendant le temps que les Anatifes sont ainsi occupés à se procurer de la nourriture, on vient à toucher leurs pieds ou cirres, aussitôt ils cessent de les faire mouvoir et les retirent en dedans de la coquille, qui alors se ferme complètement. Cependant les Anatifes finissent par ne plus craindre l'approche des doigts ou de tout autre corps, au bout de deux ou trois fois qu'on a répété l'expérience. L'écartement des valves s'exécute lentement et paraît déterminé par l'impulsion que leur communiquent les pieds, autant que par le relâchement du gros muscle destiné à rapprocher les valves l'une de l'autre.

---

(1) Nous avons trouvé plusieurs Anatifes fixés sur le manteau et sur le pédicule de quelques gros Anatifes, mais il est plus fréquent de les trouver attachés aux bois des navires, aux rochers, aux fucus, et quelquefois aussi aux fonds sablonneux.

S'il est vrai de dire que les Anatifes ne changent pas de place (1), ils peuvent du moins diriger l'ouverture du manteau tantôt dans un sens, tantôt dans un autre, en faisant exécuter au pédicule des mouvemens de flexion, de retrait ou d'allongement, de manière à pouvoir présenter la bouche du côté du courant d'eau qui leur paraît préférable.

Lorsque les Anatifes sont hors de l'eau, ils ne sortent plus de leur coquille ou du moins très rarement. Ceux qui montrent à plusieurs reprises leurs pieds, sont précisément ceux qui meurent les premiers : les autres peuvent vivre dix-huit ou vingt-quatre heures. On remarque souvent un retrait considérable du pédicule qui est quelquefois si grand, que la coquille semble implantée immédiatement sur le bois ou les pierres qui les supportent. Cependant le pédicule de l'Anatife a au moins un pouce de longueur, ce qui prouve combien cette partie de l'animal est susceptible de se contracter. L'action des muscles qui fait diminuer le calibre du cylindre est moins énergique, mais elle est aussi très appréciable; de telle manière que les Anatifes se trouvent supportés par un pédicule mobile en tout sens, destiné, sans doute, à faciliter les déplacemens d'ensemble, et nécessaire aussi, comme nous le verrons, à l'accomplissement d'une autre fonction importante, celle de l'expulsion des œufs.

(1) Il est important de faire remarquer que nous voulons parler ici des Anatifes qui ont déjà subi les métamorphoses embryonnaires; car d'après les précieuses recherches publiées par M. Thomson en 1830, ces animaux seraient libres dans le premier âge et auraient des yeux. Mais l'organe de la vision disparaît graduellement chez les Anatifes lorsqu'ils viennent à se fixer. C'est à partir de ce moment que ces êtres perdent aussi l'une des conditions essentielles à l'animalité, la *locomotion;* de telle sorte que, frappés d'abord par un véritable arrêt de développement, ils sont de plus soumis à une transformation de leur organisme qui les dégrade sensiblement.

Si l'on vient à couper le pédicule en travers, comme pour séparer l'animal du point où il est fixé, on voit sortir une assez grande quantité de liquide; mais bientôt le point où la section a été pratiquée se resserre, se ride et se plisse fortement, ce qui empêche l'eau de couler davantage. Nul doute que cette section n'est point une chose grave pour l'animal, et que ce pédicule puisse se coller de nouveau sur un corps quelconque. La section d'une ou de plusieurs pattes, ou cirres, n'empêche pas non plus l'animal de vivre; seulement on le voit alors se retirer quelque temps dans sa coquille ou manteau. Après la séparation d'une patte, il sort une gouttelette de liquide blanchâtre qui s'accumule insensiblement et sans saccade aucune.

Lorsque le pédicule est fendu longitudinalement, on voit dans sa cavité une substance granuleuse d'une couleur bleu de ciel foncé. Sur plusieurs centaines d'Anatifes que nous avons examinées, tous offraient la même particularité; chez tous aussi l'on retrouvait dans le manteau une substance granuleuse d'une couleur semblable à celle que nous venons d'indiquer; seulement la substance bleue est toujours disposée en flocons ou en masse dans le pédicule, tandis que dans le manteau elle affecte la forme laminée, aplatie, que l'on a comparée à des coussins, malgré le peu d'analogie. Ces deux lames peu épaisses, de couleur bleue, entourent le corps de l'Anatife, se croisent en arrière, et sont fixées dans le fond du manteau par un repli membraneux très mince, formé par l'adossement de ses feuillets internes. Ce repli présente une petite gouttière, dans laquelle est reçu le bord terminal formé par une réunion de corpuscules ovoïdes et bleus : on pourrait croire que ces granulations sont placées entre deux membranules transparentes, faisant suite aux bords frangés de la petite

gouttière, mais il n'en est pas ainsi : toutes ces granulations peuvent être enlevées sans qu'il y ait la moindre déchirure du bord frangé et de la gouttière qui semble les loger; quant à leur mode d'union, il paraît dépendre de la matière muqueuse qui entoure chaque grain.

Il est important de faire observer que la coloration de la substance granuleuse qui se rencontre dans le pédicule et dans la cavité du manteau, ne s'observe que sur les Anatifes frais, et qui n'ont pas été en contact avec l'alcool. Toutes celles qui ont été conservées dans l'esprit-de-vin, le rum, etc., offrent, il est vrai, les mêmes granulations, mais la couleur est rosée, d'une nuance à peu près analogue à celle d'un muscle décoloré.

L'injection au vernis, poussée dans le centre du pédicule, pénètre à travers la substance bleue jusque dans le corps de l'animal d'une part, et de l'autre, elle arrive dans la cavité du manteau par des conduits qui seront bientôt indiqués. L'injection que l'on fait passer par une petite ouverture pratiquée sur l'un des cirres, pénètre dans toutes les parties du corps, soit qu'on ait dirigé l'instrument du côté terminal des cirres, soit qu'il ait été placé dans le sens inverse. On remarque surtout que la matière de l'injection a pénétré dans les deux canaux de chaque cirre, et dans un vaisseau dorsal irrégulièrement renflé qui se trouve à la base de tous les pieds du côté correspondant au dos de l'animal; elle passe aussi dans un espèce de sinus situé au-devant du tube digestif.

§ II.

Des tégumens des Anatifes.

Suivant les espèces, la première enveloppe est tantôt solide, tantôt formée de plaques ou de coquilles, tantôt

enfin elle est entièrement dépourvue de parties écailleuses. La fente qui existe entre les valves, et par où sort en grande partie le corps de l'Anatife, se ferme lorsque l'animal rentre dans son manteau; les bords des valves se joignent alors très exactement dans toute leur étendue, sans laisser apercevoir au dehors la moindre partie du corps de l'animal.

Le pédicule des Anatifes n'est jamais garni de plaques écailleuses; on y remarque toujours des duplicatures; des rides transversales indiquent sa nature contractile et les changemens de dimensions qu'il peut éprouver suivant certaines circonstances. Au-dessous de cette première enveloppe générale, on trouve une seconde membrane peu adhérente à la première, mais d'une nature différente, suivant qu'on l'étudie dans la partie renflée ou dans le pédicule de l'Anatife. Dans le premier cas, la membrane qui tapisse l'intérieur des valves est translucide, mince et noirâtre; elle se porte vers le pédicule d'une part, et s'étend de l'autre jusque sur les bords libres des valves : là elle adhère fortement pour se replier ensuite sur elle-même, comme le font les séreuses, et forme ce que l'on appelle la cavité du manteau, la membrane réfléchie étant le manteau proprement dit.

Les parois du second tube cylindrique, renfermées dans le pédicule à enveloppe cornée, sont musculaires; on y remarque des fibres longitudinales très prononcées, et des fibres transversales ou circulaires moins fortement dessinées : toutes ces fibres s'arrêtent au point où le pédicule commence à s'élargir pour former le renflement qui contient le corps de l'Anatife. On voit clairement que la paroi du second tube cylindrique du pédicule se continue avec celle qui constitue le manteau, et cependant la structure anatomique est différente, du moins en apparence; car en

examinant plus attentivement, on aperçoit que les fibres musculaires sont comme sur ajoutées à cette seconde paroi du pédicule. Malgré la continuité de ces enveloppes membraneuses, il n'existe point de communication entre la cavité du manteau et celle du second cylindre du pédicule. Ce fait important n'a pas été signalé par les anatomistes qui ont admis une communication libre (1).

Il y a plus, c'est que la cavité du second cylindre du pédicule n'a même point d'issue dans l'arrière-cavité du manteau, c'est-à-dire dans l'espace compris entre les deux feuillets réfléchis de la même membrane; car une cloison excessivement mince, mais visible, existe au point où le pédicule se renfle, ce qui intercepte évidemment toute communication. D'après cela, on doit conclure que ce qui se trouve logé dans le pédicule ne saurait passer dans une autre cavité. Cependant nous avons déjà remarqué que la substance bleue du pédicule se retrouvait dans le manteau; observons de plus en ce moment que la quantité de grains ovoïdes, renfermés dans le pédicule, est très variable, suivant qu'il y a plus ou moins de substance analogue dans le manteau. Cette circonstance remarquable, qui fait voir qu'il existe réellement une voie de communication autre cependant que celle admise généralement, méritait un examen anatomique particulier. Les recherches auxquelles nous nous sommes livré à cet égard, paraissent nous avoir fourni une explication satisfaisante. En effet, nous avons trouvé qu'il existe, dans la seconde membrane qui tapisse la partie renflée de l'Anatife, un canal fort long, qui va du

(1) Les belles préparations en cire que l'on voit dans les galeries d'anatomie comparée, au Jardin des Plantes de Paris, montrent précisément les œufs cheminant du pédicule vers le manteau, comme s'il existait une communication libre entre ces deux cavités, ce qui est anatomiquement inadmissible, d'après nos recherches.

pédicule à l'extrémité des valves, et qui longe tout le bord postérieur de l'animal. C'est par ce canal que l'injection poussée dans le centre du pédicule est parvenue *souvent* jusque dans la cavité du manteau. Nous y avons plusieurs fois aussi aperçu des grains bleus, surtout dans la partie la plus évasée qui correspond au pédicule. C'est donc par cette espèce d'oviducte, et non par une communication directe, que les granulations passent du pédicule dans la cavité du manteau : elles ne peuvent pas y arriver par un autre conduit, car nous savons qu'il n'y a pas de communication possible entre les deux cavités.

Les enveloppes que nous venons de décrire ne sont pas les seules destinées à recouvrir le corps de l'Anatife : il existe une troisième tunique propre, qui est appliquée immédiatement sur le corps de l'animal, et qui se continue même avec la partie cornée des cirres. Cette troisième membrane (JJ, fig. 4, Pl. I^re^) isole entièrement le corps de l'Anatife, et ne laisse pour toute communication avec la cavité du pédicule, qu'un vaisseau longitudinal (*b*) destiné à nourrir ce dernier et les œufs qu'il contient. Ainsi, le corps de l'Anatife est recouvert immédiatement par une enveloppe propre, puis par une seconde membrane qui forme la cavité du manteau en se repliant sur elle-même, et enfin par les coquilles ou une enveloppe cornée. Toutes ces membranes s'insèrent sur le bord de l'échancrure des valves et sur le muscle qui sert à rapprocher les bords libres de l'ouverture du manteau.

Le corps de l'Anatife, retiré de sa cavité, présente sur les côtés plusieurs sillons qui correspondent au nombre des pieds : chaque segment ou anneau du corps soutient une paire de pattes (Pl. I et II, fig. 5, 6, 17, 18, 19). Chaque pied est composé d'une partie cylindrique non articulée, et garnie de soies, sur laquelle se trouvent deux

prolongemens cornés, de forme aplatie, articulés un grand nombre de fois, et se terminant en une pointe très fine et garnie de soies à chaque articulation. Ces prolongemens, que l'on a appelés cirres, sont tantôt plus longs, tantôt plus courts que la partie cylindrique qui les supporte, suivant les espèces d'Anatifes que l'on examine. Ainsi, l'espèce la plus commune (Pl. II, fig. 18, 19) a les cirres beaucoup plus longs que le corps cylindrique qui les supporte; l'inverse a lieu chez l'Anatife sans coquille, nommé improprement Triton. Le nombre des branchies varie aussi suivant les espèces; l'Anatife commun en a quatre seulement; celui à oreilles (*Lepas aurita Gm*) en a seize; l'Anatife à enveloppe cornée jaune, ou le Triton, en a quatorze, dont quatre à la base de chaque pied-mâchoire, etc., etc.

§ III.

Description des muscles.

Le dos de l'Anatife est recouvert par un muscle peaucier qui l'enveloppe entièrement : les fibres de ce muscle, en se portant vers les pieds, se divisent en autant de faisceaux qu'il y a de membres articulés (Pl. II, fig. 17); les petits tendons qui en résultent se croisent au-devant de la ligne médiane, de manière que les tendons provenant du côté gauche du corps, font mouvoir les pattes droites *et vice versâ*.

Le muscle peaucier envoie en outre des prolongemens de fibres qui s'attachent sur le pourtour des muscles transverses des valves, lesquelles servent à porter le corps de l'Anatife hors de la cavité du manteau. Au-dessous de ces muscles larges, on en trouve deux très petits (JJ),

longs et étroits, placés de chaque côté de la ligne médiane, et servant à relever la lèvre supérieure et les mandibules. Immédiatement au-dessous de ces petits muscles, se trouvent les deux ganglions nerveux qui entourent l'œsophage et qui constituent ce que l'on a nommé le cerveau. Viennent après cela six autres muscles, trois de chaque côté, destinés à faire mouvoir les trois paires de mâchoires. Ces muscles prennent leur point fixe sur un tendon à extrémités charnues qui traverse de part en part le renflement supérieur de l'Anatife, dans un point libre situé entre la bouche et l'estomac. Enfin, le gros muscle (S) qui sert à rapprocher les deux valves, est aussi le point où convergent la plupart des fibres musculaires de l'Anatife.

§ IV.

Organes de la digestion.

Bouche. — Cette partie est dirigée en bas si l'on admet la position constamment renversée de l'Anatife. Elle est au contraire dirigée en haut, et placée au-dessus de l'estomac, si l'on fait attention que le pédicule peut rendre cette position possible en se contractant fortement d'un seul côté, ou bien en supposant que l'Anatife soit implanté sur un morceau de bois flottant. Dans tous les cas, la courbure que présente le corps des Anatifes pédiculés fait que l'extrémité buccale se rapproche beaucoup de l'orifice anale (Pl. II, fig. 19).

Lorsque la bouche est isolée des parties environnantes, elle présente un renflement considérable que l'on pourrait regarder comme étant la tête; cependant on n'y distingue qu'une lèvre supérieure, des mandibules, trois paires de mâchoires et une petite langue (Pl. I et II, fig. 9, fig. 3 et D').

Toutes ces pièces ont de l'analogie avec celles qui composent la bouche des Crustacés en général, et plus particulièrement avec celles des Phyllosomes (Pl. II, fig. D''). La bouche des Anatifes est soutenue par un pédicule étroit, cylindrique, long d'environ une ligne, et entouré d'un muscle constricteur à fibres très apparentes, qui représente parfaitement un œsophage. Dans sa cavité, il est garni d'une membrane cornée, analogue à celle qui constitue les mandibules : cette membrane se continue d'une part avec la lèvre supérieure, de l'autre, elle se termine dans l'estomac en s'évasant comme une cloche (Pl. II, fig. D). Cette singulière disposition de la membrane interne de l'œsophage rend compte de la forme toujours bombée que présente l'estomac, puisque ses parois se trouvent appliquées sur l'évasement corné du tuyau œsophagien qui sert à boucher les sinus de l'estomac.

Immédiatement après l'œsophage vient un renflement considérable, d'une forme un peu conique, hérissé d'éminences comparables aux globules pulmonaires des grenouilles. La coloration de l'estomac, à l'extérieur, ressemble beaucoup à celle du foie; elle est due en effet à une couche de substance glanduleuse que l'on a comparée à la substance grise de ce dernier organe. En admettant cette analogie, il faut aussi admettre que la sécrétion biliaire n'est point conduite dans le canal digestif par un appareil particulier; on ne retrouve ici aucun vaisseau, aucun vestige de canal hépatique, de telle sorte que si la sécrétion de la bile peut s'effectuer dans la substance grise qui entoure l'estomac, ce n'est que par transsudation ou par une infinité de petits conduits imperceptibles. Outre la partie renflée que nous venons de décrire, il existe encore une espèce d'appendice stomacal, un véritable prolongement renflé et bilobé, communiquant avec la première cavité

de l'estomac par un pédicule étroit et fort court (Pl. II, fig. 1, d''). La structure, la forme générale, la coloration et la disposition mamelonnée de la surface extérieure de cette partie, sont tout-à-fait semblables à celles de l'estomac, et doivent être regardées comme faisant partie du même organe. La cavité de l'estomac et de son appendice est parsemée d'une multitude de petits enfoncemens ou poches, qui correspondent aux saillies mamelonnées de la surface externe. On ne distingue aucune espèce de tunique interne ou de membrane muqueuse, si ce n'est un feuillet excessivement mince que l'on peut détacher par la macération; encore n'est-ce que partiellement que l'on obtient ce résultat.

L'intestin qui fait suite à l'estomac est très évasé à son origine : il se rétrécit bientôt en forme de cône, se contourne de manière à décrire un *S* italique, et avant de se terminer par l'anus, il se dilate pour former un petit rectum. Toute la cavité de l'intestin présente des parois lisses, sans aucune espèce de valvules ni de replis : seulement la membrane interne est plus distincte que dans l'estomac. Mais ce qu'il y a de remarquable dans cet intestin, c'est la présence d'un second tube en forme de cornue, évasé par le haut, rétréci et terminé en cul-de-sac par le bas. Ce second tube ne paraît pas avoir des connexions immédiates avec les autres parties, il est libre de toutes espèces d'adhérence et comme flottant dans une autre cavité. Son extrémité supérieure, qui correspond à l'estomac, présente la même disposition que le bord frangé du pavillon de la trompe de Fallope chez les vertébrés : chaque prolongement est terminé par un renflement plus ou moins volumineux, et va se loger dans l'une des petites cavités stomacales. C'est par ce seul moyen que cette cornue membraneuse, à parois minces et transparentes, se

soutient dans la cavité intestinale, quoique toujours remplie de matières alimentaires qui la rendent plus lourde (Pl. II, fig. 2 et 3).

§ V.

Appareil de la circulation du sang.

Depuis Poli, anatomiste italien, on a répété que les Anatifes ont un cœur et des vaisseaux; cependant, malgré la plus grande attention et le plus vif désir que nous avions de découvrir l'organe central de la circulation, il nous a été impossible de retrouver un véritable cœur. Toutefois il existe sur le dos de l'animal une espèce de vaisseau dorsal, renflé irrégulièrement en plusieurs points, et aboutissant aux conduits vasculaires qui existent dans chaque pied. Ces conduits ne sont pas de véritables vaisseaux à parois distinctes: ils sont creusés dans la substance même des organes, et peuvent être comparés aux trachées des insectes. Les branchies semblent aussi traversées par des ramifications vasculaires, mais elles n'ont aucune espèce de tunique propre, et rentrent dans les conditions des doubles conduits existant dans les pieds. Enfin, le canal antérieur du pédicule est le seul que l'on puisse nommer vaisseau, à cause de sa forme cylindrique et de son isolement. Cuvier, qui le regardait, avec raison, comme le vaisseau nourricier du pédicule, l'a décrit et figuré avec soin dans son *Mémoire sur les Mollusques Cirripèdes*.

§ VI.

Du système nerveux.

L'illustre auteur du *Règne animal* a comparé la disposition des ganglions nerveux des Anatifes à l'appareil sen-

sitif des Articulés. En effet, une série de renflemens nommés ganglions, est située par paires sur la partie antérieure du canal digestif et immédiatement sous l'épiderme. Leur nombre, leur forme et leurs rapports méritent d'être indiqués avec soin, à cause de plusieurs inexactitudes qui se rencontrent dans les planches qu'on en a données.

Les deux premiers ganglions, que l'on a nommés cervicaux, se réunissent sur l'œsophage par un petit cordon nerveux très court (Pl. II, fig. 8). De ces ganglions et de la partie nerveuse qui les réunit partent trois branches, une de chaque ganglion, et la troisième très mince du corps nerveux médian. Ces nerfs se distribuent à tous les muscles de l'Anatife; de l'autre côté, les ganglions représentant le cerveau donnent deux grosses branches qui, en se portant vers la ligne médiane, entourent et circonscrivent le canal alimentaire. Dans ce trajet d'environ deux lignes et demie, ces nerfs fournissent un petit filet pour chaque glande salivaire, et un ramuscule qui va à l'œsophage. Un peu plus bas, ils donnent une branche anastomotique, allant toujours de chaque côté à un ganglion non encore indiqué, et qui est situé plus profondément sur les côtés de l'estomac et au-dessous des vésicules salivaires. D'après leur position, on pourrait nommer ces ganglions, *cervicaux*. Ils envoient une branche assez forte qui se dirige vers les pattes, se rapproche de la ligne médiane et se réunit avec les branches provenant du cerveau, en formant un ganglion de chaque côté. De cette seconde paire de ganglions partent plusieurs branches, les unes internes, allant à l'estomac, les autres externes, au nombre de deux, allant aux pieds-mâchoires. Il faut ici remarquer que de tous les pieds des Anatifes, la première paire, qui représente à elle seule les six pieds-mâchoires des Crustacés décapodes, a au moins deux branches nerveuses

pour un pied, tandis que tous les autres pieds n'ont qu'un rameau nerveux qui se subdivise en deux filets, un pour chaque cirre. Environ une ligne et demie au-dessous de la seconde paire de ganglions, se trouve la troisième paire, dont les renflemens nerveux, très rapprochés les uns des autres, sont presque confondus, et donnent une branche assez forte aux pieds qui leur correspondent. La quatrième et la cinquième paire de ganglions se forment à des distances plus rapprochées. De tous ces ganglions naissent, outre les branches destinées aux pieds, des petits ramuscules qui se distribuent aux organes de la digestion et à ceux de la génération. Enfin, la sixième paire de ganglions se confond presque avec la précédente. Les deux renflemens qui la constituent sont entièrement réunis, et donnent naissance à quatre grosses branches destinées aux deux dernières paires de pieds; ce qui n'avait pas encore été indiqué. On a aussi figuré et dit que le prolongement *proboscidiforme* qui existe entre les derniers pieds ne reçoit qu'un filet nerveux, tandis qu'il y a deux branches nerveuses qui s'y distribuent et qui se détachent du milieu des deux branches destinées à la dernière paire de pieds. Ce fait peut être de quelque valeur et devient ici important à noter sous le rapport de la disposition symétrique du système ganglionnaire et de sa dualité complète.

§ VII.

Appareil de la génération.

Nous avons déjà dit qu'une substance granuleuse, de couleur bleu de ciel, se trouve dans le pédicule des Anatifes; que cette même substance se voit aussi dans le manteau. Or, tous ces grains, vus au microscope, offrent

une forme régulière ovoïde, d'un volume plus ou moins grand, suivant l'époque de leur développement. Ceux contenus dans le pédicule sont toujours plus petits que ceux renfermés dans le manteau (1). Cette différence est surtout remarquable lorsqu'on examine le tissu lamineux d'un pédicule, en apparence vide : les ovules sont alors très petits et enveloppés dans quelques replis membraneux très minces et de forme variable (Pl. I, fig. 11). Il n'y a donc aucun doute que ce soient là les œufs des Anatifes, et que le pédicule soit la partie de l'animal correspondante à la queue de certains crustacés. Quant à l'appareil générateur mâle de ces animaux hermaphrodites, l'étendue considérable qu'il occupe, et sa structure remarquable, sont tellement extraordinaires, qu'il a induit en erreur tous les anatomistes qui ont cru y reconnaître les œufs. Les testicules des Anatifes sont placés de chaque côté du canal digestif, depuis l'estomac jusqu'à l'anus, et depuis le dos jusqu'à la base des pieds. Toutes les granulations blanches qui les composent, sont soutenues par un pédicule, et réunies en groupes par des ramifications allant toutes aboutir à un tronc commun très apparent. Pour bien étudier cet appareil glanduleux, il faut couper l'animal en deux parties égales, et sur la ligne médiane; on relève ensuite la moitié de chaque paroi intestinale, et l'on voit alors une préparation des plus achevées (Pl. II, fig. 4 et 5). Un gros tube serpentin, dont

(1) Lamarck dit au contraire, page 381 de son *Histoire naturelle des animaux sans vertèbres :* « Les Anatifes reçoivent dans leur tube les œufs qui se » séparent de leur double ovaire. Ils s'y perfectionnent, et comme ce tube » n'est pas simple et qu'il a des parties musculeuses à l'intérieur, les œufs » remontent ensuite dans la coquille et sont rejetés au dehors. » Dans tout cela il n'est point dit par quelles voies les œufs cheminent ni où sont placés les ovaires.

la grosse extrémité est située sous l'estomac, se contourne plusieurs fois, diminue de calibre à mesure qu'il approche de l'anus, et lorsqu'il y est arrivé, se réunit avec celui du côté opposé. Le canal qui en résulte va s'ouvrir à l'extrémité du prolongement en trompe. Dans tout son trajet, le tube serpentin ne reçoit aucune branche; le renflement supérieur seulement reçoit deux ou trois troncs provenant de la réunion des pédicules glanduleux. Il est si facile de suivre ces branches jusqu'aux granulations, que l'on a peine à croire qu'on ne les ait pas observées avec exactitude. Cependant on a dit que tous les troncs blanchâtres offraient des orifices béans pour recevoir les œufs. Cuvier a même dessiné plusieurs de ces troncs principaux, ouverts du côté des granulations qu'il avait prises pour des œufs, parce qu'il lui importait alors de les faire sortir de ce lieu. Mais il suffit, pour se convaincre de la non existence de ces orifices béans, de faire macérer une moitié de la préparation : alors on voit plus distinctement encore que tous les grains sont soutenus par des pédicules, comme une grappe de raisin (Pl. II, fig. 6 et 7).

D'après cela, il demeure bien établi que l'appareil glanduleux dont il vient d'être question, est le véritable testicule, et que le tube serpentin représente la vésicule spermatique. Cela est d'autant plus exact, que nous avons souvent remarqué que cette vésicule séminale est vide à certaines époques, et que cette vacuité ou cette atrophie ne coïncide ni avec la disparition, ni même avec la diminution sensible du volume des granulations.

CHAPITRE III.

RECHERCHES PHYSIOLOGIQUES.

§ Ier.

Fonctions de l'appareil digestif.

A en juger par la forme et par la structure des parties qui entrent dans la composition de la bouche, on peut présumer que la nourriture des Anatifes doit être analogue à celle des Crustacés. La lèvre supérieure, les mandibules et les trois paires de mâchoires sont disposées de telle sorte, que si une portion volumineuse de substance alimentaire se présentait à l'orifice buccal, elle pourrait être divisée en plusieurs morceaux par le moyen des pointes crochues qui existent sur le bord libre de la première paire de mâchoires.

Les cirres, dans ce cas, servent à assujettir le corps nutritif, et c'est une chose bien remarquable que de voir avec quelle facilité ces animaux s'en rendent maîtres. Les cirres, quoique cornés, semblent doués d'une sensation exquise du toucher : ils sont pour ces animaux ce que les antennes sont pour les insectes; tout corps qui les touche est perçu et retenu au milieu de leurs nombreuses palpes. Les Anatifes que nous avons observés ont présenté ceci de remarquable, c'est que tous les petits objets qui se trouvent près d'eux, sont indistinctement portés vers la bouche qui ne fait que s'entr'ouvrir et les recevoir sans hésitation. Cependant il existe une petite langue située entre les deux dernières mâchoires, c'est-à-dire au point où commence l'œsophage. Cet organe aurait-il donc perdu la propriété qui lui est assignée généralement? se-

rait-il resté assez rudimentaire pour avoir converti sa fonction en une autre? Nous sommes porté à le croire. En effet, il nous semble que la petite langue, à cause de sa disposition et de ses rapports, remplit plutôt les fonctions d'une valvule qui permettrait aux alimens de passer dans l'œsophage, pour s'opposer ensuite à l'entrée de l'eau dans le même canal. Dans tous les cas, les alimens de nature quelconque traversent l'œsophage qui, comme nous l'avons dit, est garni dans son intérieur d'une membrane cornée, se terminant dans l'estomac par un évasement considérable. Ce tuyau cylindrique, qui ne paraît avoir aucune espèce d'action sur le bol alimentaire, semble plutôt destiné à protéger les parois musculaires de l'œsophage contre l'action des corps durs, pierreux et anguleux, qui doivent le traverser : les parois musculaires, au contraire, agissent puissamment sur les corps qui traversent le canal œsophagien, et peuvent déterminer son occlusion momentanée.

D'après cette disposition anatomique des fibres musculaires qui circonscrivent l'œsophage dans une espèce de boutonnière, on peut aussi facilement déduire que les mêmes muscles peuvent s'opposer également à l'entrée de l'eau dans la cavité de l'estomac, après y avoir laissé passer le bol alimentaire. Nous avons dit, en parlant de la terminaison cornée du cylindre contenu dans l'œsophage, que ces parois évasées servaient de point d'appui ou de charpente à celles de l'estomac ; mais il nous semble que sa véritable fonction est d'empêcher les alimens d'arriver directement dans l'estomac, et de les diriger dans la cornue à bord frangé. Cela est confirmé par le fait même; car il suffit d'examiner l'intérieur du tube intestinal d'un Anatife, pour s'assurer que tous les alimens sont contenus dans cette cornue ou sac, sauf quel-

ques parties pierreuses placées au dehors et dans le canal digestif.

Il semblerait, d'après cela, que les alimens reçus indistinctement dans la cornue ou réservoir commun, passeraient plus tard dans la cavité stomacale pour y subir les modifications convenables, ce qui lui donnerait quelque analogie avec l'appareil stomacal des Ruminans. On conçoit facilement, du reste, comment les alimens peuvent passer dans l'estomac. Les bords libres de l'évasement corné ne pouvant pas s'appliquer sur toute la surface interne de cet organe, il en résulte que la partie inférieure peut communiquer avec la cornue intestinale (1). Une fois parvenus dans les cellules de l'estomac, les alimens doivent déterminer sur ces parois une excitation quelconque, ayant pour résultat de faire affluer les sucs gastriques. Ces sucs, avons-nous dit, sont la bile et la salive, qui, sécrétés par des glandes particulières, arriveraient dans l'estomac par des voies inconnues. En supposant ainsi la chylification terminée, on ne voit point comment les parties nutritives parviennent et s'assimilent aux organes qu'elles doivent alimenter. Il est bien certain cependant que dans la cavité intestinale il n'existe aucune valvule qui puisse s'en emparer. Ce serait donc plutôt dans l'estomac que s'effectuerait cette transformation, et que se ferait, par une espèce d'endosmose, la nutrition des Anatifes.

Quant aux matières devenues excrémentielles, elles passent dans la cavité intestinale pour sortir par l'anus.

---

(1) Les Anatifes, après avoir passé plusieurs heures à attirer vers eux les parties qui doivent remplir la cornue intestinale, cessent de se mouvoir, rentrent dans leurs coquilles et y restent long-temps sans en sortir. Nous pensons que les alimens passent alors dans l'estomac pour y être modifiés.

§ II.

Circulation.

La circulation des Anatifes présente de l'analogie avec celle des Crustacés en général. Le sang passe d'abord dans le vaisseau dorsal ; de là il pénètre dans les conduits des pieds, revient aux organes, par le double canal qui existe dans chaque cirre, les traverse et s'accumule dans un espèce de sinus longitudinal, placé au-devant du canal digestif. C'est de ce lieu que le cercle circulatoire recommence; dans son trajet, le sang trouve les branchies situées à la base des pieds, comme chez le plus grand nombre des Crustacés, ce qui sert à le modifier continuellement par l'oxigène qu'elles retirent de l'eau.

§ III.

Génération.

Les fonctions des organes génitaux sont principalement celles que l'on a moins bien expliquées, sans doute, à cause des connaissances insuffisantes que l'on avait sur l'anatomie des Anatifes. D'après nos recherches, il paraît certain que les œufs se développent dans le pédicule de l'animal; car on en trouve chez de très jeunes sujets, et lorsque la saison de la ponte est entièrement terminée. Ces œufs, enveloppés dans une espèce de tissu lamelleux, prennent de l'accroissement, rompent leur enveloppe celluleuse, et passent ensuite dans le manteau par le canal que nous avons dit exister le long de son bord postérieur. Le mécanisme par lequel les ovules y parviennent est fort curieux. L'Anatife contracte fortement les muscles de son pédicule, le retrécit et le rend si court, que les œufs, pressés de toutes parts, sont obligés de pas-

ser à travers le canal qui doit les conduire dans le manteau. Arrivés dans cette poche, ils se fixent sur un repli membraneux qui a été indiqué, et se réunissent successivement les uns aux autres, de manière à former deux larges coussins placés autour du corps. Lorsque la cavité du manteau est remplie entièrement, si l'on examine le tube en forme de trompe, dans lequel passe le canal spermatique, on voit qu'il a presque le double de sa longueur ordinaire, qu'il est replié fortement sur lui-même, et engagé entre le pied-mâchoire et le premier pied thoracique pour aller porter la liqueur séminale sur les œufs. Une liqueur blanche sort du tube lorsqu'on le comprime légèrement : elle est destinée à féconder les œufs.

La sécrétion spermatique se trouve ici en rapport avec le volume considérable qu'occupe l'appareil générateur mâle, puisqu'elle doit servir à la fécondation de plusieurs milliers d'œufs. Ainsi la fonction génératrice s'exécute dans le même animal par un double appareil sexuel, et s'explique clairement par les données anatomiques que nous avons fait connaître.

On ne saurait donc admettre que les *œufs doivent traverser les testicules pour se féconder*. Cette dernière supposition, admise par Cuvier et plusieurs autres naturalistes, devient anatomiquement impossible, et n'est point heureusement expliquée par la physiologie. Après la fécondation, tous les œufs doivent sortir du manteau par groupes de plusieurs centaines à la fois ; du moins nous admettons cela, parce que ces animaux se trouvent toujours en grand nombre sur un même lieu. Les œufs se séparent au moyen de l'eau, et se fixent quelquefois sur le pédicule même de l'Anatife (1).

(1) Cette dernière circonstance a pu faire croire à Everard Home que les

CHAPITRE IV.

DES RAPPORTS NATURELS DES CIRRIPÈDES ET DU RANG QU'ILS DOIVENT OCCUPER DANS LA SÉRIE ANIMALE.

§ Ier.

Caractères des Cirripèdes.

Avant de discuter et d'établir les rapports qui existent entre certains Articulés et les Anatifes, nous allons assigner les caractères généraux des Cirripèdes.

Toutes les espèces de cette classe sont fixées, les unes par un pédicule, elles constituent les Anatifes proprement dites; les autres sans pédicule, ce sont les Balanes. Une enveloppe nommée manteau renferme le corps, qui présente des traces évidentes de divisions circulaires ou anneaux. La bouche est composée de mâchoires latérales; l'estomac est boursouflé par une multitude de petites cavités qui paraissent remplir les fonctions du foie; l'intestin, simple en général, présente une cornue membraneuse, renfermée dans la cavité intestinale. Il existe, le long du ventre, des filets nommés cirres, disposés par paires, composés d'une multitude de petites articulations ciliées, représentant des espèces de pieds ou de nageoires, comme celles qu'on voit sous la queue de plusieurs Crustacés. Entre les deux derniers cirres est un long tube charnu et annulé qui sert à porter la liqueur sperma-

---

Anatifes se reproduisaient par une espèce de germination. Aussi a-t-il représenté dans son bel ouvrage les divers points du pédicule des Anatifes qui, selon lui, auraient été perforés par les jeunes rejetons. Cette idée ne lui serait jamais venue à l'esprit s'il avait eu connaissance des recherches de M. Thomson.

tique sur les œufs; à la base de ce tube et vers le dos est l'ouverture de l'anus. La disposition du corps fait que les cirres sont toujours placés à l'orifice de leur enveloppe, et la bouche dans la cavité qui les renferme. Le système nerveux forme sous le ventre une série de ganglions bien symétriques.

La circulation se fait dans des cavités sans parois distinctes; il y a un vaisseau dorsal double, mais point de cœur proprement dit. Les branchies sont toujours situées sur les parties latérales du corps, et fixées à la base des pieds. L'ovaire est situé dans le pédicule (chez les Anatifes). Les testicules sont placés sur les parties latérales du tube digestif; leurs glandes séparées et granuleuses versent la sécrétion spermatique dans un double canal serpentin, qui est le réservoir, ou l'analogue de la vésicule séminale; ces deux vésicules se terminent en se joignant par un petit canal très mince qui se prolonge dans le tube terminal pour s'ouvrir à son extrémité.

§ II.

Rapports des Cirripèdes.

Nous devons maintenant, en nous appuyant sur les faits précédemment exposés, rechercher avec quels animaux les Cirripèdes offrent les rapports les plus multipliés et les plus intimes, et par suite déterminer quel rang ils doivent occuper dans la série animale.

Lamarck, en cherchant leur classement, les rejetait évidemment des Mollusques, parce qu'il y voyait un système ganglionnaire, des pieds articulés à peau cornée, et plusieurs paires de mâchoires. D'un autre côté, le rapprochement qu'il en faisait avec les Annelides ne lui paraissait pas naturel. L'existence du manteau, l'absence de fais-

ceaux de soies et d'anneaux transverses qu'il ne retrouvait pas sur le corps des Anatifes, en étaient la cause. Enfin, il pensait que des animaux qui n'ont point de tête, point d'yeux, et dont le corps se trouve enfermé dans une véritable coquille, ne pouvaient être non plus des Crustacés.

Cependant, malgré l'exactitude de ses vues, le célèbre auteur de l'ouvrage sur les animaux sans vertèbres n'a pas cru devoir placer les Cirripèdes dans la grande classe des Articulés : cela tient, il nous semble, au peu de valeur qu'il a donné aux différentes analogies, surtout à celles qui existent sous les rapports anatomiques et physiologiques. Ainsi, un point de départ plus stable acquiert plus de valeur que toute configuration extérieure.

Le système nerveux ganglionnaire, symétriquement placé sur le canal digestif des Cirripèdes, conduit déjà à un changement d'organisation qui sert à généraliser la classe des Articulés. La disposition articulée des pieds, celle du corps qui, quoique moins évidente, est cependant assez sensible, montre aussi que la nature passe ici d'un degré d'organisation à un autre; la disposition de la bouche offre une analogie qui s'étend non-seulement à la forme, mais qui va même jusqu'au nombre des pièces que l'on retrouve chez quelques Crustacés; la ressemblance de la circulation avec celle d'un grand nombre d'Articulés, l'existence de branchies à la base des pieds, comme chez les Crustacés, et enfin quelques autres rapprochemens d'une importance secondaire, forment les caractères propres aux Anatifes, et communs aux Articulés. Il est presque superflu de dire que ces caractères sont tous en opposition avec ceux assignés aux Mollusques. Chez ceux-ci le système nerveux, par exemple, est composé d'un certain nombre de masses médullaires dispersées en différens points du

corps, au lieu de présenter la série régulière et symétrique des ganglions, comme cela a lieu dans les Anatifes et les Articulés. La circulation est toujours aidée au moins par un ventricule charnu, aortique, tandis que les Anatifes n'ont point de cœur proprement dit. Quant à la disposition articulée des pattes et du corps, il y a encore bien moins de ressemblance. Il est donc très facile de séparer les Cirripèdes des Mollusques. Toutefois cela ne suffit pas pour retrouver l'ordre de classement qui leur est le plus convenable. Placés dans l'embranchement des Articulés, ils ont des rapports variés avec chaque classe de cette troisième grande division établie dans le *Règne animal* de Cuvier. Or, il s'agit de connaître et d'évaluer les rapports qui les lient plus intimement avec telle ou telle autre classe. Pour y parvenir, il est nécessaire d'exposer brièvement les caractères les plus généraux que l'on a assignés aux animaux articulés. Sans contredit le système nerveux est celui par lequel ces animaux se ressemblent le plus. Leurs mâchoires, lorsqu'ils en ont, sont toujours latérales; elles se meuvent de dehors en dedans, et non de haut en bas. Enfin, la plupart de ces animaux peuvent changer de place, soit par la marche, la course, le saut, la natation, le vol ou la reptation.

On voit d'après cela, et au premier abord, que les Cirripèdes sont privés de la faculté locomotrice; qu'ils ont moins de rapport avec les deux dernières classes, les Arachnides et les Insectes, qu'avec les deux premières, les Annelides et les Crustacés. En effet, parmi ces derniers on trouve quelques espèces qui, comme les Cirripèdes, sont privées de locomotion, telles que les Crustacés parasites et certains Annelides. C'est donc avec ces derniers qu'il faut actuellement les comparer, et arriver, par déduction, au rang qui leur appartient.

Sous le point de vue du système nerveux (1) il y a une égale analogie entre celui des Cirripèdes et le système nerveux, soit des Annelides, soit de certains Crustacés inférieurs; mais leur circulation, leurs pieds articulés et leurs bouches, surtout, ont beaucoup plus de rapport avec les Crustacés en général. D'un autre côté, les organes de la reproduction sont toujours réunis et constituent l'hermaphrodisme, tandis que chez les Crustacés ils sont séparés; il manque aux Cirripèdes des soies sur les divisions qui établissent le premier degré de formation des anneaux du corps; mais ce caractère d'une importance secondaire ne se retrouve pas chez tous les Annelides. Quant à l'enveloppe externe des Cirripèdes, qui est tantôt cornée, tantôt univalve, tantôt multivalve, elle aurait

(1) La dualité du système nerveux des Anatifes, la segmentation évidente du corps et la présence d'une série de ganglions correspondant au centre de ces divisions, sont des caractères si importans, qu'à eux seuls ils devraient fournir des bases solides de classification, puisque le système nerveux est toujours, selon nous, le régulateur et le véritable représentant des degrés divers de l'animalité. Toutefois il ne faut pas confondre la disposition symétrique des ganglions œsophagiens avec la *dualité* du système nerveux, *offrant des renflemens de distance en distance, et correspondant aux divisions du corps :* sans cela tous les Mollusques se trouveraient indistinctement avoir le système nerveux symétrique. C'est donc d'une série de ganglions sur la ligne médiane qu'il s'agit; or, cela n'existe sur aucun Mollusque; d'où il résulte en définitive que la place que doivent occuper les Cirripèdes reste déterminée sur des bases et des données anatomiques non encore infirmées. Il existe sans doute des rapprochemens à établir entre ce système ganglionnaire, qui est semblable à celui des Annelides, et celui des ganglions rachidiens des vertébrés; il peut aussi y avoir quelques rapports entre les ganglions épars des Mollusques et ceux de l'appareil viscéral des vertébrés; mais ce sont là autant de questions à résoudre et qui ne trouveront de solution satisfaisante que lorsqu'on aura établi rigoureusement à quelle série du système ganglionnaire des vertébrés, correspondent les nerfs des invertébrés. Cette appréciation des faits n'aura pour résultat que de faciliter la détermination des diverses espèces, détermination qui restera toujours basée sur la nature et les fonctions du système nerveux.

plus d'analogie avec l'enveloppe de certaines espèces de Crustacés (1), notamment avec celles des Cypris et des Limnadia, qu'avec celles de quelques Annelides. Ainsi, à part la circonstance de l'hermaphrodisme, caractère qui les rapproche des Annelides, les Cirripèdes ont plus de rapport avec les Crustacés. C'est donc entre ces deux classes qu'ils se trouvent naturellement placés, en terminant la série des Crustacés et en formant le passage de cette classe à celle des Annelides, que nous regardons comme la dernière des Articulés.

Le résultat définitif de ce travail conduit ainsi à une nouvelle classification des Cirripèdes. Le rang que nous venons de leur assigner se trouve heureusement déterminé dans un classement des animaux que M. le professseur Ampère fit connaître dans ses leçons au Collége de France, en établissant que le règne animal se compose de deux séries parallèles qui vont en se dégradant successivement, et qui présentent une analogie très marquée entre leurs divisions et subdivisions correspondantes. Cette analogie n'était interrompue, à l'égard des Céphalopodes et des Cirripèdes, que par la nécessité où il croyait être de les ranger dans la même division. Lorsque nous communiquâmes notre travail à ce savant célèbre, il remarqua qu'en assignant aux Cirripèdes la place que nous venons d'indiquer, la correspondance des deux séries devenait aussi complète que le permettait la différence de l'organisation géné-

(1) M. le professeur Burmeister établit, dans un savant Mémoire envoyé tout récemment à l'Institut, que la coquille des Anatifes a plus de ressemblance avec l'enveloppe extérieure des Crustacés qu'avec celle des Mollusques. Ce fait important détruit le rapprochement qui existait sous ce rapport entre les Mollusques et les Cirripèdes.

rale des animaux qui leur appartiennent. C'est ce que met en évidence le tableau suivant (1).

	1re SÉRIE.	2e SÉRIE.	
Animaux vertébrés.	Mammifères.	Arachnides.	Animaux articulés à sexes séparés.
	Oiseaux.	Insectes.	
	Reptiles.	Myriapodes.	
	Poissons.	Crustacés.	
Mollusques à tête distincte.	Céphalopodes.	Cirripèdes.	Articulés hermaphrodites.
	Ptéropodes.	Annelides à pieds.	
	Gastéropodes.	Annelides sans pieds.	
Mollusques acéphalés.	Acéphales.	Échinodermes.	Animaux rayonnés.
	Brachiopodes.	Acalèphes.	
	Ascidiens simples.	Polypes simples.	
	Ascidiens composés.	Polypes composés.	

Zoophytes Amorphes.

Dans les deux séries de ce tableau, la correspondance dont nous venons de parler s'établit, à l'égard des premières divisions, entre les Vertébrés d'une part, et les Articulés de l'autre; entre les Mollusques à tête distincte, et les Articulés hermaphrodites; enfin entre les Mollusques acéphalés, et les animaux rayonnés également dépourvus de tête distincte.

A l'égard des subdivisions, cette correspondance consiste en ce que :

1°. Les Mammifères, d'une part, et les Arachnides de l'autre, se rapprochent par la concentration du système

(1) Nous publions ici ce tableau, non-seulement tel que M. Ampère l'avait présenté dans son cours au Collége de France, mais encore avec quelques modifications et quelques développemens qu'il a cru devoir admettre depuis que nous lui avons communiqué nos recherches sur les Cirripèdes. Nous en devons la première communication à la bienveillance dont veut bien nous honorer cet illustre savant.

nerveux et des organes respiratoires, autant du moins qu'un vertébré peut ressembler à un articulé;

2°. Les Oiseaux répondent aux Insectes, non-seulement par la faculté qu'ils ont de voler, mais encore par le mode de respiration. En effet, les poumons perforés des Oiseaux laissent pénétrer l'air dans presque toutes les parties du corps, de même que les trachées des Insectes le conduisent dans tous les points où se trouve le fluide qui tient lieu de sang;

3°. L'analogie des Reptiles et surtout des Ophydiens, avec les Myriapodes, a été signalée par plusieurs naturalistes, notamment par l'illustre Cuvier. Elle se manifeste à la fois par l'allongement du corps et l'infériorité de l'intelligence;

4°. L'analogie des Poissons avec les Crustacés est plus frappante encore, puisque les premiers, parmi les vertébrés, et les seconds, parmi les articulés à sexes séparés, sont également caractérisés par la respiration branchiale. Ils présentent en outre d'autres analogies dans l'ensemble de l'organisation, et dans l'usage de certaines parties;

5°. Les Céphalopodes répondent aux Cirripèdes par la présence du manteau et par la mollesse du corps, où il n'y a de partie solide que des supports calcaires dont la structure lamelleuse est toute différente de celle des véritables os;

6°. Les Ptéropodes ont des nageoires membraneuses qui servent à la locomotion, de même que les Annelides à pieds ont des soies placées sur les côtés du corps, et qui sont destinées au même usage;

7°. Les Gastéropodes, qui sont obligés de se traîner pour ainsi dire sur le ventre, sont analogues, sous ce rapport, aux Annelides sans pieds, auxquels nous réunis-

sons les intestinaux qui ne nous paraissent pas en différer assez pour que l'on doive en former une classe à part;

8°. C'est aux Acéphales, dans la première série, et aux Échinodermes dans la seconde, que la tête cesse d'être distincte : caractère commun qui place ces deux classes au même rang dans leurs séries respctives;

9°. Viennent ensuite les Brachiopodes et les Acalèphes, qui se distinguent également, les premiers, des Acéphales, les seconds, des Échinodermes, par l'addition d'appendices mobiles, et par leur terminaison inférieure en un pédicule;

10°. Enfin, l'infériorité de leur organisation et cette circonstance de présenter des animaux composés, semblables d'ailleurs à ceux qui sont simples, établissent suffisamment la correspondance entre les Ascidiens et les Polypes, en les plaçant au dernier rang de leurs séries respectives.

Il ne reste plus dans le règne animal que ces êtres, de forme en quelque sorte indéterminée, qui, n'appartenant en propre à aucune des deux séries, sont comme la souche commune sur laquelle elles s'élèvent toutes deux.

Résumé des faits principaux.

La bouche des Cirripèdes pédiculés est composée de pièces parfaitement comparables à celle de la bouche de plusieurs Crustacés, et notamment des Phyllosomes : la lèvre supérieure, les palpes, les mandibules sont même tellement analogues, que la ressemblance s'étend jusqu'à la forme.

Les trois pieds-mâchoires qu'on rencontre le plus ordinairement chez les Crustacés, se retrouvent confondus en un seul pied-mâchoire qui reçoit deux troncs nerveux : à sa base se trouvent toujours deux à quatre branchies.

Les dix pieds ordinaires des Crustacés sont fidèlement représentés dans les Anatifes : à la base de plusieurs d'entre eux se trouvent des branchies disposées comme celles de certains Crustacés, et les repètent même quelquefois par le nombre.

Il existe dans chaque pied un double canal propre à établir un courant circulatoire, et traversant toutes les articulations des cirres.

Le corps est composé d'un certain nombre d'anneaux ou d'articulations bien distinctes, dont chacun supporte une paire de pieds. A l'intérieur du corps existent un vaisseau dorsal déjà indiqué, semblable à celui d'un grand nombre d'Articulés, et une double série de ganglions, dont le nombre est égal, d'après nos recherches, à celui des pattes ; il en existe en outre une autre paire sur les parties latérales de l'estomac.

Le pédicule peut être regardé comme analogue à la queue de plusieurs Crustacés : c'est dans sa cavité et non comme on l'a dit, sur le dos, que se trouvent les œufs ; ceux-ci passent ensuite, par un conduit non encore indiqué, dans l'enveloppe qui, par sa ressemblance avec le manteau des Mollusques, établit la seule analogie possible entre les Cirripèdes et ces derniers animaux. Les organes placés sur le dos, que Cuvier avait décrits comme les œufs, sont l'appareil générateur mâle, dont la disposition est, comme on l'a vu, très remarquable.

Enfin, l'estomac et le canal intestinal renferment à l'intérieur un sac membraneux en forme de cornue, dont

la disposition et les usages établissent aussi, d'après les savantes recherches de M. Serres, un rapprochement de plus entre les Cirripèdes et les Annelides. Nous proposons donc, comme dernier résultat de notre travail, de placer la classe des Cirripèdes à la suite des Crustacés, afin d'établir le passage naturel entre ces Articulés supérieurs et les Annelides.

EXPLICATION DES PLANCHES.

PLANCHE I.

Fig. 1. Anatife jaune sans coquille : A est une production gélatineuse ou une continuation de l'enveloppe cornée, qui sert à fixer le pédicule; B est la première membrane du pédicule, B′ un petit Anatife de grandeur naturelle qui s'était développé sur le pédicule même de l'Anatife mère, C la partie convexe et le renflement qui contient le corps de l'animal, D′ la fente de l'enveloppe cornée, par laquelle sortent les pieds ou cirres F; le point E indique la terminaison du pédicule et le lieu où les œufs s'arrêtent; G sont les œufs arrivés dans le manteau.

Fig. 2. Les mêmes lettres ont la même indication que pour la figure précédente. H est la partie des pieds qui soutient les cirres F; le corps de l'animal est vu retiré le plus possible de sa cavité. On remarque à la base des pieds H quatre branchies; et entre ces pieds et ceux placés de l'autre côté, on voit le tube recourbé qui sert à porter la liqueur séminale dans le manteau.

Fig. 3. Le même Anatife, dont on a enlevé une moitié de la première enveloppe, afin de mieux voir l'intérieur. Le pédicule contient un second cylindre terminé en cul-de-sac par son extrémité inférieure, et recouvert de l'autre par une membrane très mince. On y remarque des fibres musculaires longitudinales et transversales. *ee* indique le canal qui porte les œufs du pédicule dans le manteau, *b* celui qui sert de vaisseau nourricier au pédicule et aux œufs; *gg* est la membrane du manteau qui intercepte toute espèce de communication directe entre le pédicule et la cavité du manteau; J est le corps de l'Anatife renfermé dans une enveloppe propre.

Fig. 4. La même coupe que la précédente, représentant toutes les membranes qui servent à envelopper le corps de l'Anatife. BB est le tuyau cylindrique musculeux ouvert, et dans lequel

on aperçoit les œufs, *ee* le trajet du canal oviducte pratiqué dans l'épaisseur même de la deuxième enveloppe *ggg*. Cette enveloppe ouverte se réfléchit sur elle-même, à la manière des membranes céreuses, pour contourner le corps de l'Anatife et l'envelopper de toutes parts; JJJ la membrane propre du corps de l'animal; c'est dans cette cavité que le canal *b* communique, et c'est entre cette membrane propre et celle de la seconde enveloppe *g'g'g'* réfléchie que se trouvent les œufs; d'où il résulte que la cavité du manteau n'a aucune communication avec le pédicule, si ce n'est par le canal oviducte *e*.

Fig. 5. Elle représente l'Anatife retiré de ses enveloppes et vu par son dos. FFF sont les cirres, KK les branchies, *h* l'anus, J le renflement stomacal.

Fig. 6. L'Anatife vu par sa face antérieure. D la bouche, FF les cirres, H l'extrémité du tube séminal, K les branchies, M les parties des pieds qui supportent les cirres, *ss* le muscle qui sert à rapprocher les valves. On voit sur la ligne médiane un espèce de canal sur lequel les tendons de chaque paire de pieds se croisent.

Fig. 7. L'un des pieds grossi; FF les cirres et leurs nombreuses articulations garnies de soies, L le canal dorsal, M le canal interne des pieds, KK une des branchies.

Fig. 8. La même figure représentant une coupe verticale des cirres pour montrer le double canal qui les sillonne; *f* le canal dorsal qui communique avec le conduit plus large L; *f'* le canal interne de chaque cirre communiquant dans le conduit M. Le petit signe ↠ indique le cours du sang.

Fig. 9. La bouche grossie, vue d'ensemble; on y aperçoit au milieu une petite langue rudimentaire. OPQ sont les trois paires de mâchoires vues séparément et grossies, R est la lèvre supérieure divisée artificiellement en deux parties égales: sur cette lèvre on remarque des soies provenant des mandibules.

Fig. 10. Les œufs trouvés dans le pédicule de l'Anatife représenté fig. 2. Ils sont peu développés et entourés d'un tissu lamelleux, disposés en rayons irréguliers et renflés aux extrémités.

Fig. 11. Un autre groupe d'œufs plus développés et retirés du pédicule de l'Anatife représenté fig. 1.

Fig. 12. Les œufs des Anatifes trouvés dans le manteau; ils sont bien plus développés que ceux trouvés dans le pédicule, et ils ont aussi une forme ovoïde plus prononcée.

PLANCHE II.

Fig. 1. Elle représente la disposition du canal intestinal des Anatifes communs ; cette disposition anatomique, ainsi que toutes celles que nous allons indiquer sur cette même espèce, se retrouvent exactement conformes à celles des Anatifes sans coquilles, que nous avons représentés planche I. D est la bouche vue de côté, *d* l'œsophage, *d'* l'estomac, *d''* le pédicule qui fait communiquer cet organe avec une espèce de cœcum *d'''*, de même structure et de même forme que l'estomac; T est le canal intestinal offrant deux courbures naturelles, *h* l'orifice du rectum, UU les vésicules séminales se réunissant en un seul canal très fin, et terminées en U' par un petit orifice.

Fig. 2. Le même canal intestinal redressé et ouvert. *t'* est un sac membraneux très évasé en haut, et envoyant des prolongemens dans les cellules de l'estomac. La fig. D représente la bouche et la membrane cornée interne de l'œsophage, qui se dilate dans l'estomac, sous forme de cloche D'.

Fig. 3. Représente tout l'appareil digestif ouvert sur la ligne médiane, pour montrer les cellules de l'estomac et les parties qu'il renferme; R la lèvre supérieure et ses mandibules, OPQ les trois paires de mâchoires, *d* la cavité de l'œsophage, *d'''* les cellules de l'appendice stomacal, T la cavité du canal intestinal, T' le sac membraneux qui se trouve dans sa cavité, *ttt* les appendices frangés du bord supérieur du sac, qui se logent dans les cellules de l'estomac, lorsque les organes sont en place; *t'* l'extrémité inférieure du sac membraneux.

Fig. 4. Coupe sur la ligne médiane, pour montrer l'appareil générateur mâle. L'intestin T a été coupé pour mettre à découvert la vésicule séminale U. Celle-ci est renflée à sa partie

supérieure, où aboutissent les conduits qui vont aux glandes du testicule, et se termine par un canal étroit qui passe sur le côté de l'anus *h*. U′ est l'extrémité du tube garni de soies et contenant dans sa cavité le canal spermatique.

Fig. 5. La même préparation dessinée du côté opposé, et laissant voir la continuation de la vésicule séminale jusqu'à l'extrémité du tube U′.

Fig. 6. La partie renflée de la vésicule séminale ; U est une ramification de vaisseaux bleus conduisant à des granulations distinctes et séparées du testicule *uuu*.

Fig. 7. Intérieur de la vésicule séminale et des granulations du testicule *uuu*, en supposant une coupe faite sur le même plan.

Fig. 8. Disposition du système nerveux. N° 1, le premier ganglion œsophagien, qui a été désigné sous le nom de cerveau. De ces ganglions réunis partent les branches *vv′v″* destinées à tous les muscles de la partie dorsale, et deux filets extrêmement minces qui vont, le premier, de chaque côté, à la vésicule salivaire V ; le second a un ganglion nouveau Z. Le n° 2 est le second ganglion envoyant deux branches nerveuses à chaque pied-mâchoire F, et des ramuscules à l'œsophage. Les n^{os} 3, 4, 5 et 6, correspondent aux autres ganglions. Le n° 6 fournit aux deux dernières paires de pieds. C'est des rameaux qui vont aux derniers pieds, et non des ganglions mêmes, que se détachent deux filets *y* et *g′* qui vont jusqu'à l'extrémité U′ du tube. Le point *x* correspond au centre de l'œsophage qui a été enlevé.

Fig. 9. Partie impaire de la coquille offrant une bifurcation à son extrémité *c′*.

Fig. 10. La même pièce vue du côté opposé.

Fig. 11. La petite valve supérieure vue de son côté extérieur.

Fig. 12. La même, vue en dedans.

Fig. 13. Le grande valve latérale vue de son côté externe.

Fig. 14. La même, vue en dedans.

Fig. 15. Le bord dorsal et inférieur de la grande valve gauche, offrant une petite charnière *c*.

Fig. 16. La valve droite sur laquelle on remarque un prolonge-

ment C de la coquille; c'est sur cette pièce que s'appuie le bord correspondant de la valve gauche, et au moyen de laquelle il peut s'exécuter quelque mouvement.

Fig. 17. L'anatife vu de côté pour montrer ses muscles qui se terminent par des tendons J″, en même nombre que les pattes. J′ le muscle peaucier qui recouvre l'estomac, *j* deux petits muscles releveurs de la lèvre supérieure, KK les branchies, *h* l'anus, U′ l'extrémité du tube articulé et garni de soies.

Fig. 18. L'Anatife vu par la face antérieure pour montrer la disposition véritablement articulée du corps, dont chaque anneau correspond à une paire de pattes; S le muscle qui sert à rapprocher les valves, U′ le tube articulé qui contient le canal spermatique.

Fig. 19. L'Anatife vu de côté et enveloppé de sa membrane propre, sous laquelle se trouve la vésicule salivaire. V le ganglion cervical qui est plus bas, et *v′* le nerf qui part du cerveau pour aller aux muscles peauciers; nous avons figuré ces organes sur l'enveloppe propre, pour en faire bien connaître les rapports. J sont les deux muscles releveurs de la lèvre supérieure, KK les branchies, *h* un tubercule corné qui se trouve sur chaque côté de l'orifice de l'anus, U′ l'extrémité du tube garni de soies et perforé.

Enfin les figures D′ et D″ représentent, la première, la bouche de l'Anatife, la seconde celle des Phyllosomes; elles indiquent l'analogie qui existe entre le nombre des pièces, tant sous le rapport de leur composition que sous le rapport de leur ressemblance. *a* est la lèvre supérieure, *b* les mandibules, *c* les deux premières mâchoires, *d* les deux secondes, *e* les deux troisièmes; *f* est la langue rudimentaire de l'Anatife.

MÉMOIRE

POUR SERVIR

A L'HISTOIRE DU TAPIR,

ET DESCRIPTION D'UNE ESPÈCE NOUVELLE

APPARTENANT AUX HAUTES RÉGIONS DE LA CORDILLÈRE DES ANDES;

PAR M. ROULIN,

Docteur en Médecine.

Lu à l'Académie le 9 février 1829.

Quelques-uns des animaux les plus remarquables du nouveau continent furent observés par les premiers navigateurs qui visitèrent les côtes de ce pays et ne tardèrent pas à être connus en Europe. L'Oppossum (1),

---

(1) L'Oppossum avait été vu en Espagne dès l'année 1500, V. Pinzon ayant rapporté de la côte de Paria une femelle qui fut présentée à Ferdinand et à Isabelle. L'auteur du *Novo-Mondo* donne une assez juste idée de cet animal, en comparant ses diverses parties avec celles d'animaux connus; ainsi l'on trouve, dans sa description, le museau pointu, la longue queue, les oreilles nues et arrondies, les pouces libres aux pieds de devant et de derrière, et enfin la poche singulière où les petits trouvent un refuge après leur naissance. « *Videro un novo animale quasi monstruoso che haveva el corpo e muso de volpe e la groppa e li piedi drietto de simia e quelli davanti quasi come de homo; le orecchie come la notola : et a sotto el ventre uno altro ventre di fora come una tascha dove asconde soi figlioli dapo nasciuti.... Uno de questi tali animali insieme con soi figlioli fo portato de Sibilia a Granata a li Serenissimi Re. Tamen in nave morite i figlioli : et el grande in Spagna : li quali si morti forono visti da molte e diverse persone.* » (Cap. CXIII.) On ne sait pas au juste la date de la première édition du *Novo-Mondo*, mais on en a une traduction partielle en allemand qui est de 1506, et une latine bien complète,

le Pecari (1), les grands singes à queue prenante (2) sont déjà désignés très clairement dans des relations de voyages publiés vers 1505; ce n'est que dans des ouvrages postérieurs de quelques années que se trouvent les premières indications relatives au Tapir.

Quoique ce mammifère, le plus grand de tous ceux qui appartiennent à l'Amérique méridionale, soit assez commun sur presque tous les points de la côte ferme où abordèrent successivement Colomb, Vespuce, Peralonso Niño, Pinzon et Cabral (3), il paraît que son existence

---

mais très mauvaise, de l'année 1508. Je cite d'après la réimpression italienne faite à Milan en 1519.

(1) Le Pecari est indiqué comme un sanglier sans queue, portant sur le dos une ouverture par laquelle il semble respirer et qui exhale une très mauvaise odeur.

(2) Ces animaux, différant beaucoup au premier aspect des magots qu'on avait coutume de voir en Espagne, ne sont point désignés dans les anciennes relations sous le nom de singes, mais sous celui de chats (*gatos mamones*); cette épithète *mamon*, qu'on applique quelquefois aux enfans qui, après avoir été sevrés, conservent l'habitude de *tetter à vide*, semble faire allusion aux mouvemens presque continuels des babines qu'on observe chez les singes. Cependant quelques auteurs écrivent *mimon*, qui signifierait *bouffon*.

(3) Il est probable que les navigateurs ont eu plus d'une fois occasion de voir quelques parties du Tapir et qu'ils les auront rapportées à d'autres animaux; Vespuce compte les ours parmi les quadrupèdes de la côte du Brésil. « *Non sono cacciatori, penso perche essendo li de molte generationi de animali silvestri maxime de lioni et ursi... non hanno ardire .. exponersi a tanti pericoli.* » (*Paesi novamente retrovati et Novo-Mondo, etc., cap. CXVII.*) On ne trouve point d'ours sur le littoral; mais certaines peaux de Tapir, noires et velues, ont pu être aisément prises pour des peaux d'ours.

Les grands os qu'observa Colomb dans son premier voyage près du port de Nipe (pointe N E de l'île de Cuba), et qu'il crut appartenir à une tête de vache, provenaient probablement de pièces boucanées de Tapir que les Caribes avaient apportées de la côte de Paria pour leur servir de provision pendant le voyage. On pourrait supposer que ces os étaient ceux de quelque grand ruminant de la Floride, mais quoique la distance de la pointe de cette presqu'île à Cuba soit peu considérable, il n'y avait guère de communication entre les deux pays, tandis que de la côte ferme aux grandes Antilles il y en avait perpétuellement par les expéditions dévastatrices des Caribes.

resta ignorée jusqu'à l'époque des expéditions qui eurent pour résultat la fondation de la colonie du Darien. Ces expéditions furent, comme on le sait, très malheureuses, et les hommes qui en faisaient partie, sans cesse menacés de mourir de faim, eurent de pressans motifs pour s'enquérir des ressources que présentait le pays : le Tapir, dont la chair servait souvent d'aliment aux naturels, ne dut pas échapper long-temps à leur attention.

Les premiers renseignemens sur cet animal purent parvenir en Europe vers la fin de l'année 1510, et dès l'année

---

Un historien très judicieux, mais qui ne peut faire autorité en pareil cas, M. Irving, pense que ces os provenaient du lamentin, animal qui se trouve sur les côtes des grandes Antilles. « *These are supposed to have been sculls of the manati or sea-calf found on this coast.* » Il n'y a rien qui ressemble moins à la tête osseuse de la vache que celle du lamentin, et il est impossible même à l'observateur le moins attentif de prendre l'une pour l'autre. La conjecture de M. Irving n'a sans doute d'autre fondement que le nom de *sea-calf*, nom qui correspond à celui de *vache-marine*, que nos colons donnent aussi quelquefois à l'animal. L'idée de vache et celle de grosses mamelles se liant naturellement dans l'esprit d'un européen, et l'existence de mamelles devant surtout préoccuper quand elle se trouvait chez des animaux qu'on prenait pour des poissons, on conçoit fort bien comment le nom de *vache marine* a pu être donné à des cétacés herbivores tels que les dugongs et les lamentins. La condition de mammifère se trouve de même rappelée dans le nom de *manati*, nom sous lequel le lamentin était connu dans les grandes Antilles et sur une partie de la côte ferme.

On a dit souvent que ce mot, qui est celui que les Espagnols emploient aujourd'hui, avait été formé par eux et venait de *mano*, main. M. de Humboldt a montré (*Voyages aux reg. équinox.*, chap. 18) qu'une telle étymologie est insoutenable. Le mot est indien, et déjà donné comme tel par Fernand Colomb, qui eut occasion de voir l'animal lorsqu'il accompagna son père dans son quatrième voyage. (*Historia del Almirante*, cap. 89.) Or, dans plusieurs dialectes des Antilles et encore aujourd'hui dans le galibi de la Guyane, qui est un mélange de ces langues et du guarani, le mot *manati* signifie mamelles. (*Voy.* Boyer, *Voyage du sieur de Bretigny*, page 415; Biet, *Voyage de la France équin.*, page 420.) « *Manati be kéirou*, ses mamelles ne sont point encore abattues », dit le P. Raymond Breton (*Dict. Caraïbe*, page 349); *Manattoui* est suivant lui le nom de l'animal. Suivant Harcourt, il porte dans la langue des *yaios* de la Guyane le nom de *Cojumero*, mais dans cette langue, *Manatii* signifie encore mamelle. Il est étrange qu'un rapprochement si naturel n'ait jusqu'à présent été fait par aucun naturaliste.

1511 l'auteur des *Décades océaniques* en fit usage pour une description fort inexacte sans doute, mais reconnaissable à un trait caractéristique, l'existence de la trompe (1).

Une description beaucoup meilleure (quoique ce caractère n'y soit point indiqué, et qu'on n'y trouve même presque aucun de ceux auxquels les zoologistes attachent aujourd'hui le plus d'importance), c'est celle que donna en 1526 Oviedo dans le *Sommaire de l'Histoire naturelle et générale des Indes* (2). L'auteur connaissait fort bien

(1) « Les sombres forêts de ce pays (du Darien) sont peuplées non-seulement » de tigres, de lions et d'autres animaux également connus ou au moins » décrits par d'excellens écrivains, mais aussi de plusieurs bêtes monstrueuses. » Il en est une surtout dans la création de laquelle la nature semble avoir » voulu montrer tout son savoir-faire. Cette bête, égale en grosseur à un » bœuf, porte trompe éléphantine et n'est point un éléphant, a couleur bovine et n'est point un bœuf, ongle chevalin et n'est point un cheval. Elle » a aussi les oreilles de l'éléphant moins pendantes et moins larges toutefois, » mais plus larges encore que celles des autres animaux. » (P. Martyr, 2e Déc., liv. 9.)

(2) « On trouve à la Terre-Ferme un animal appelé, par les Indiens, *Beori*, et auquel nos chrétiens ont donné, en raison de l'épaisseur de son cuir, le nom de *Danta*. Ce nom, au reste, est tout aussi impropre que celui de *tigre* qu'ils donnent à l'*ochi*. Le Beori est de la taille d'une moyenne mule; il a le poil d'un brun foncé (*pardo muy oscuro*) et plus épais que celui du buffle; il n'a point de cornes, et ainsi c'est tout-à-fait à tort que quelques personnes lui donnent le nom de vache. Sa chair est bonne à manger, quoique plus mollasse que la viande de bœuf; mais un excellent morceau c'est le pied; seulement, il faut qu'il cuise vingt-quatre heures de suite, après quoi c'est un mets qu'on peut présenter au plus délicat et qui est de très facile digestion.

» On force le Beori avec des chiens, mais quand ils ont fait prise, il faut que le chasseur vienne promptement à leur aide et tâche de frapper l'animal avant qu'il ait eu le temps de gagner l'eau, car s'il en est proche il court s'y jeter, et une fois là il a bon marché des chiens, qu'il déchire à belles dents; j'en ai vu emporter d'une seule morsure la jambe et l'épaule d'un lévrier, ou arracher à un autre un lambeau de peau long de deux empans, tout comme l'eût pu faire un écorcheur. Sur la terre ils n'en pourraient faire autant impunément. Jusqu'à présent le cuir de ces animaux n'est d'aucun usage pour les chrétiens, qui ne connaissent pas la manière de le préparer, mais il est au moins aussi épais que le cuir de buffle. » (Oviedo, *Sumario*, etc., cap. XII, Tolède, 1526.)

le Tapir, et tout ce qu'il en dit est parfaitement juste; mais il ne dit que ce qu'il croit pouvoir être utile aux gens qui iront comme lui courir les hasards au Nouveau-Monde. Il passe sur tous les détails de forme, et il se contente d'indiquer la taille et la couleur de la bête, afin qu'on puisse la reconnaître de loin si on la rencontre au bois. Elle vaut la peine d'être poursuivie, car sa chair est bonne à manger, et Oviedo dit comment on doit l'attaquer; il dit aussi la manière dont elle se défend, parce qu'il importe au chasseur de le savoir pour ne pas exposer inutilement la vie de ses chiens.

On trouverait probablement une plus ample description dans le grand ouvrage qu'Oviedo avait préparé, et dont toute la partie relative à la terre-ferme est restée jusqu'à ce jour inédite. Le *Sommaire* fut écrit pendant un voyage que l'auteur fit en Espagne et sur de simples souvenirs.

Un autre écrivain à qui l'on doit de précieux renseignemens sur tous les pays compris entre l'isthme du Darien et les frontières du Chili, Cieça de Léon, dans sa chronique du Pérou, nomme plusieurs fois le Tapir. Il ne le décrit pas, il est vrai, parce qu'il n'a pas eu occasion de le voir, mais il nous apprend, ce qu'on ignorait jusque là, que cet animal n'existe pas seulement dans les provinces voisines de l'Océan atlantique, et qu'on le trouve également dans celles qui bordent la mer du Sud, au-delà même de l'équateur (1). Un passage de son livre montre de plus qu'on avait dès lors quelque connaissance de la disposition que présentent les couleurs de la robe dans le jeune âge (2).

Cieça avait publié son livre en 1553, et la même année

(1) *La Chronica del Peru.* Chap. IX et XLIII.

(2) « Quelques personnes disent que ces animaux ont du rapport avec le zèbre, du moins par l'apparence extérieure. » Chap. VI.

parut l'*Histoire générale des Indes,* où il est aussi question du Tapir. L'auteur, Lopez de Gomara, en parle même en trois endroits de son ouvrage, mais il en fait trois animaux différens. D'abord il le place dans la province du Darien et il en donne une description qui ne diffère presque de celle de P. Martyr qu'en ce qui concerne la forme du pied; du reste, de même que l'auteur des *Décades*, il oublie de lui assigner un nom (1). Il le compte ensuite parmi les animaux de la province de Cumana, et, sous le nom de *Capa* (2), il le décrit un peu mieux. Enfin, à l'occasion du voyage de Magellan, il le fait reparaître sous le nom plus connu d'*Anta* (3), le représentant ici comme un animal qui a quelque ressemblance avec la vache, et qui habite les environs de Rio-Janeiro. Dans le même chapitre, le nom d'*Anta* est encore deux fois employé: l'une pour un quadrupède commun aux environs du port Saint-Julien (côte des Patagons), l'autre pour un animal qui se trouve sur les bords du détroit de Magellan, et dont la fiente sert aux indigènes pour calfeutrer leurs canots d'écorce. Le premier animal est comparé par Gomara à un âne sauvage; mais on sait par d'autres historiens que c'est du Guanaco qu'il s'agit. Quant au second,

(1) « On y trouve (au Darien) des vaches sans cornes, lesquelles bien » qu'ayant le pied fourchu ressemblent à des mules et ont de grandes » oreilles; elles ont, à ce qu'on dit, une petite trompe à la manière de l'é- » léphant; elles sont brunes; leur chair est bonne à manger. » (Gomara, *Hist. gén. des Indes*, chap. LXVII.)

(2) « Les naturels de la province de Cumana sont continuellement occupés » à la chasse et y sont très habiles... Ils prennent un animal qu'ils nomment » *Capa*, lequel est plus grand qu'un âne, velu, noir et très méchant, quoi- » que s'enfuyant devant l'homme. Il a le pied fait comme un soulier français, » c'est-à-dire étroit vers le talon, large et arrondi par devant; il court sur » les chiens d'Europe et les tue, même quand ils sont trois ou quatre en- » semble. » (Gomara, *Hist. gén.*, chap. LXXX.)

(3) (Gomara, *Hist. gén.*, chap. XCII.)

c'est probablement un grand quadrupède qui a été vu plusieurs fois aux environs du détroit, mais que les naturalistes ne connaissent point encore; peut-être est-ce celui que Molina a désigné sous le nom de *Huemul* (*equus bisulcus*).

Pour ce chapitre, Gomara a puisé ses principaux renseignemens dans une lettre adressée par Maximilien Transilvain, au cardinal de Salzbourg; il paraît avoir aussi fait usage de quelques extraits de l'Histoire écrite par P. Martyr, et perdue avant l'impression, dans le sac de Rome. Il eût évité toute confusion, s'il se fût borné à suivre la relation de Pigafetta, dont il existait alors en Espagne plusieurs copies manuscrites, et dont on avait depuis plus de vingt ans une traduction française imprimée à Paris (1).

---

(1) Le mot *Anta* ne se trouve nulle part dans la lettre de Transilvain, et dans la relation de Pigafetta, il ne s'applique qu'à un animal du Brésil, au Tapir. « Là furent rafraîchis de batates, pines douces (*pinas dulces*, ananas), chair de Anta, comme de vache ». (Le voy. et navig. aux îles de Moluques.)

Transilvain compare à des ânes sauvages certains quadrupèdes vus au port de Saint-Julien, mais Pigafetta les décrit assez bien pour qu'il soit impossible de n'y pas reconnaître les *Huanacos*, qu'on sait en effet être très communs dans ces parages. « La bête, dit-il, a la tête et les oreilles grandes comme une » mule, et le col et le corps comme un chameau, et la queue comme un » cheval »; il y avait probablement dans le texte comme un poulain. Un autre trait bien caractéristique, mais que le traducteur a omis, c'est que le cri de l'animal est une sorte de hennissement.

On a cru que Pigafetta disait que les Patagons avaient des ânes pour bêtes de somme, cela tient à une des bévues du traducteur. Voici le passage dans l'édition française : « Les nôtres leur firent signe (aux Patagons) de venir aux » navires, et ils prindrent seulement leurs arcs et mirent leurs femmes » sur des ânes, et les mirent en sûreté. » Maintenant voici ce que disait l'original : « Nos gens leur firent signe de venir aux navires, et qu'ils les aideraient à transporter leurs effets. Ils y vinrent, ne portant que leurs arcs et leurs flèches; pour le bagage, ils le firent emporter par leurs femmes, qu'ils chargèrent comme des bourriques. »

La traduction de Pigafetta, faite par Fabre, d'après le manuscrit original

En 1556, Thevet donna dans ses *Singularités de la France antarctique*, une description du Tapir, la première où se trouve indiquée l'étrange brièveté de la queue de l'animal. Cette description, fort incomplète du reste, fut reproduite en 1563, par l'auteur, dans sa *Cosmographie générale*, avec quelques changemens de rédaction dont un semble représenter le Tapir comme cornu (1).

Jean de Lery, qui en 1578 fit paraître la relation de son voyage au Brésil, dans l'intention avouée de relever les erreurs ou les mensonges de Thevet, ne fut pas heureux dans les corrections qu'il fit à l'article du Tapir, donnant à cet animal des oreilles pendantes, des jambes grêles et un pied non fourchu « ains de la propre forme de celui d'un âne ». A ces différences près, sa description semble avoir été copiée sur celle de Thevet.

Lery désigne l'animal sous le nom de *Tapiroussou*, Thevet sous celui de *Tapihire*. Les deux mots sont empruntés à la langue des Indiens de Rio-Janeiro, mais l'un et l'autre un peu altérés.

---

que l'auteur avait présenté à la mère de François Ier, fut imprimé par Simon de Colines, vers 1526 ou 1530.

La lettre de Transilvain avait été imprimée à Rome en 1524, sous ce titre : *M. Transilvani, Cæsaris a secretis, epistola ad M. card. Salzenburgensem de admirabili et novissimâ in orientem navigatione.*

(1) Thevet avait fait le voyage du Brésil, mais il n'y était resté qu'un mois, et, pendant tout ce temps, malade, de sorte qu'il ne put presque rien observer par lui-même. La description qu'il donne du Tapir lui avait été certainement communiquée, et il paraît même qu'il ne la comprit pas très bien; ainsi il disait dans son premier ouvrage, page 649 : « Cette bête a le pied fourchu, » avec une corne fort longue, autant presque devant comme derrière. » Malgré la mauvaise construction de la phrase, il est clair qu'il n'est ici question que de la corne du pied. Mais dans sa *Cosmographie*, l'auteur fait disparaître l'ambiguité en introduisant une erreur. « Elle (cette bête) n'a point de queue, » sinon bien peu, et icelle sans poil tout ainsi que celle de l'agoutin ci-dessus » décrit; aussi le pied fourchu, et cornue, et le poil rougeâtre comme celui » d'une vache... (*Cosmogr.*, livr. 21, chap. 12.)

Pour compléter la liste des écrivains qui, dans le seizième siècle, ont parlé du Tapir, nous nommerons encore le célèbre auteur de l'*Histoire naturelle et morale des Indes*, Acosta, et un autre jésuite dont les ouvrages eurent aussi dans leur temps une grande réputation, le P. Maffei.

Ce dernier n'avait jamais quitté l'Europe, mais il avait pu consulter de nombreuses relations sur l'Amérique déposées aux archives de Lisbonne. Il est le premier qui ait fait connaître les habitudes nocturnes du Tapir; du reste, la description qu'il donne de cet animal est très mauvaise; c'est la lèvre inférieure qu'il suppose prolongée, et se méprenant grossièrement sur le mot de trompe employé par les auteurs qu'il consultait, il allonge cette lèvre inférieure *en forme de trompette* (1).

Acosta, quoique ayant habité assez long-temps l'Amérique méridionale, et ayant recueilli pendant son séjour beaucoup de renseignemens sur l'Histoire naturelle, paraît n'avoir jamais eu occasion de voir le Tapir. Ce qu'il en dit se réduit à quelques lignes assez insignifiantes (2).

Un auteur dont l'ouvrage parut tout au commence-

---

(1) « *Antæ sunt etiam, gentis vocabulo, ad mulæ similitudinem sed minores et rostro tenuiore, inferiore autem labro tubæ instar oblongo, rotundis auribus, brevi caudâ, reliquum cineræ corpus. Eædem luci-fugæ sunt. Non nisi noctu ad pabulum prodeunt : ubi diluxit in sua se se condunt latibula.* » (Maffei, *Hist. ind.*, Florence, 1588.)

Ce passage, reproduit dans un extrait des tables géographiques de Bertius, imprimé à la suite d'une traduction française de la description des Indes d'Herrera, a été mal à propos attribué à cet historien par Buffon.

(2) « De même que les *Sainos* (pecaris) sont semblables aux porcs, quoique plus petits, ainsi les *Dantas* (Tapirs) ressemblent à de petites vaches, quoiqu'elles se rapprochent peut-être encore davantage des mules, en ce qu'elles n'ont point de cornes. La peau de ces animaux est fort estimée pour faire des collets et des cuirasses, et elle est si dure qu'elle résiste à quelque coup que ce soit ». (Acosta, *Hist. nat. y mor. de las Indias*, Séville, 1590, lib. IV, cap. 38.)

ment du siècle suivant, l'historien Herrera ajouta au contraire plusieurs traits importans à la description du Tapir: ainsi il fit remarquer la petitesse des yeux, le retrécissement du front et la disposition des articulations des membres, qui sont très bas placées comme chez l'éléphant; enfin il indiqua la présence d'un doigt de plus aux pieds de devant qu'à ceux de derrière, mais il en donna aux uns et aux autres un de trop. Ces détails se trouvent dans la quatrième décade en un chapitre où l'auteur traite de la province de Verapaz (1). Dans la première décade il avait déjà parlé de l'animal d'après Oviedo, et ajoutant seulement une particularité relative au mélange de poils blancs parmi les poils de couleur obscure qui forment le fond de la robe, mais sans dire que c'est un caractère propre aux femelles (2). Dans ce chapitre, au reste, l'auteur fit le même double emploi que nous avons signalé dans Gomara: il reproduisit la description de P. Martyr immédiatement après celle d'Oviedo, et sans s'apercevoir qu'elles se rapportaient toutes les deux au même quadrupède. Il renchérit même sur les exagérations de l'auteur des *Décades océaniques*, en donnant à l'animal des oreilles *non moins larges* que celles de l'éléphant (3).

---

(1) (*Hist. des Indes occid.*, Déc. IV, lib. X, cap. 13.) Herrera dit dans ce paragraphe que la peau du Tapir est tellement épaisse que si l'on cherche à en prendre un pli sur le dos, c'est à peine si ce pli peut tenir dans la main, étant épais de dix travers de doigts. Il y a déjà là passablement d'exagération, mais la phrase est tournée et ponctuée de telle sorte, qu'il paraît que c'est la peau elle-même et non le pli qui a cette prodigieuse épaisseur.

(2) « On y trouve (dans le Darien) des dantes dont la taille est celle d'une moyenne mule, dont le pelage est de couleur foncée et glacé de blanc, *plateado escuro.* » (Décade I, lib. X, cap. IX.)

(3) « On y a trouvé (dans le Darien), entre autres animaux monstrueux, un qui avait la taille du bœuf, le museau d'éléphant, le poil de bœuf, les ongles de cheval. Il avait les oreilles tombantes et non moins larges que celles de l'éléphant. » (*Ibid.*)

Nous croyons inutile de passer ici en revue une foule d'ouvrages qui parurent dans la première moitié du dix-septième siècle et où il était aussi question du Tapir. Ce qu'ils contiennent de neuf se réduit à très peu de choses, et se trouve d'ailleurs recueilli dans une importante compilation publiée en 1633, l'*Orbis novus* de Laët.

Laët parle du Tapir en plusieurs endroits de son livre (1); il en parle sous différens noms, et il reproduit les diverses descriptions données par les auteurs que nous avons indiqués précédemment ; mais il sait que la plupart de ces descriptions appartiennent à un même animal. Ne pouvant déterminer, d'après ses propres observations, quelle était la meilleure, il agissait beaucoup plus sagement en les reproduisant toutes successivement, qu'en essayant de les combiner.

Aux noms déjà cités Laët joint celui de *Maïpouri* d'après Harcourt, qui l'avait trouvé employé à Cayenne, et, d'après le P. Claude d'Abbeville, celui de *Tapiyre-ete* qui était usité par les Indiens de l'embouchure de l'Amazone. Il

(1) Liv. VII, chap. 7, province de Veragua, description d'après Herrera, nom du Beori pris mal à propos à Oviedo. — Liv. VIII, chap. 8, province du Darien; description d'après P. Martyr; point de nom. Laët ne reconnaît pas plus le Tapir dans cette indication, que ne l'avaient fait tous les auteurs précédens.—Liv. X, chap. 5, au Pérou; d'après Garcilasso; point de nom et rien qui montre que Laët ait reconnu l'animal. — Liv. XV, chap. 5, au Brésil, sous les noms de *Tapyrete*, *Tapiroussou* et *Tapihire;* d'après un auteur portugais, Lery et Thevet; la description d'après ce dernier; les habitudes d'après le premier. « *Natandi et urinandi peritissimum est animal, statim pedit fundum, et ubi longius processerit, emergit rursus.* » — Liv. XVI, à l'embouchure des Amazones, sous le nom de *Tapiyre-ete*, d'après le P. Claude d'Abbeville. — Liv. XVII, chap. 13. A Cayenne et sur les bords de l'Oyapock; sous les noms de *Maypouri* et *Maipuri;* d'après des relations manuscrites belges et d'après l'ouvrage imprimé de l'anglais Harcourt. — Liv. XVIII, chap. 4, dans la province du Cumana; sous le nom de *Capa;* d'après Gomara : il ne reconnaît pas le Tapir dans cet animal.

transporte d'ailleurs maladroitement le nom de Beori (1) qu'Oviedo dit être le nom de l'animal à la terre-ferme, à la description donnée par Herrera pour la province de Veragua. C'est ce passage qui a induit en erreur plusieurs naturalistes modernes et leur a fait dire que le Tapir était appelé Beori par les naturels de la Nouvelle-Espagne.

Laët a pris quelques détails à l'ouvrage manuscrit d'un auteur portugais qui désigne l'animal par le nom de *Tapyrete*, et donne comme synonyme latin celui d'*Alce;* cet écrivain dit que le Tapir marche au fond des eaux, et c'est peut-être en raison de cette habitude qu'on a voulu depuis le placer dans le même genre que l'hippopotame. Il paraît au reste qu'on a de bonne heure établi un rapprochement entre les deux espèces, puisque Herrera dit que le Tapir a rendu aux naturels du Nouveau-Monde le même service que l'hippopotame à ceux de l'ancien, en leur enseignant l'usage de la saignée.

Deux ans après la publication de l'*Orbis novus* parut l'Histoire naturelle du jésuite Nieremberg, où le Tapir forme l'objet d'un chapitre (2) composé de fragmens pris au P. Simon, à Jean de Lery et à Hernandez, qui lui-même n'avait fait que traduire le texte d'Oviedo. Ce n'est

---

(1) Oviedo donne le nom de *Beori* comme étant employé par les Indiens de la terre-ferme. Or, sous cette dénomination il ne comprend pas la Nouvelle-Espagne, c'est ce qui est bien prouvé par divers passages de son livre, et entre autres par celui où décrivant les mœurs des Indiens, il dit : « Je ne » prétends point qu'il en soit ainsi à la Nouvelle-Espagne, bien qu'à la rigueur » le mot de terre-ferme dût aussi s'appliquer à ce pays. » Il est évident que l'auteur, en parlant d'un animal qu'il a eu mainte occasion d'observer, le désigne par le nom usité dans le pays où il l'a vu et non par celui qui pouvait être employé au Mexique, où il n'avait jamais été. A l'époque où Oviedo écrivait son sommaire, en 1525, les noms mexicains des animaux ne pouvaient être encore très répandus : la prise de Mexico n'eut lieu que le 13 août 1521.

(2) *J. E. Nierembergii,... physiologiæ professoris Historia naturæ maxime peregrinæ.* Anvers, 1535. Lib. IX, cap. 65.

pas, au reste, pour ce chapitre, qui n'a rien de neuf, que je cite la compilation de Nieremberg, mais pour un autre emprunt qu'a fait l'auteur à l'ouvrage alors inédit d'Hernandez (1). La description du *Tlacaxolotl*, donnée par ce médecin, est une fusion monstrueuse de deux descriptions appartenant à des animaux très différens. La taille comparable à celle du taureau, la forte croupe, les ongles de bœuf aux pieds de derrière et à ceux de devant (2), le cou robuste, la grosse tête, le museau allongé, la peau épaisse et comme impénétrable, voilà ce qui appartient au Tapir. La face arrondie, le visage presque humain, la grosse et longue queue, sont des traits qui appartiennent à quelque grande espèce d'Alouatte. Enfin, aux deux animaux conviennent également bien les indications suivantes : poil fauve et mal couché, oreilles élargies, dents redoutables, goût prononcé pour les fruits du cacaotier et du cerisier mexicain (*quapachtli*), dégâts commis parfois dans des lieux cultivés (3).

Ces habitudes dévastatrices expliquent comment un

(1) Nieremberg, lib. IX, chap. II.

(2). Le texte dit *aux mains ;* mais parmi les Espagnols le mot main s'emploie en parlant des pieds de devant des quadrupèdes. C'est toujours celui dont on se sert pour le cheval.

(3) C'est mal à propos que Sonini a cru devoir contredire sur ce point l'assertion de d'Azara (art. *Tapir* du *Dict.* de Déterville). De ce qu'à la Guyane on ne trouve les Tapirs qu'à une grande distance de Cayenne, ce n'est pas une raison pour refuser de croire qu'au Paraguay ces animaux approchent souvent des villages, et viennent de nuit jusque dans les plantations. Ce qu'ils fuient, c'est bien moins le voisinage des habitations que le bruit des armes à feu : or dans le territoire des missions, ce bruit ne vient pas souvent les troubler. Il en est de même dans le haut Orénoque, aussi y ai-je trouvé les Tapirs bien moins sauvages que dans les provinces intérieures de la Nouvelle-Grenade.

Certains indiens de la rive gauche de l'Orénoque, les *Piaroas*, semblent considérer le Tapir comme un génie protecteur. Non-seulement ils ne le tuent jamais sans une extrême nécessité, mais encore ils cherchent à l'attirer près des plantations (*conucos*) qu'ils forment au milieu des bois, en y cultivant les

nom qui signifie *voracité, gloutonnerie,* a pu être donné, dans un certain canton, au Singe, et dans un autre, au Tapir (1).

La possibilité d'une fusion de caractères appartenant à des êtres aussi dissemblables ne sera point contestée par les naturalistes voyageurs, qui savent bien que, même avec la connaissance des lois de l'organisation, on s'expose à commettre d'étranges erreurs, lorsqu'on cherche à combiner les renseignemens qui se rattachent à un même nom ou à deux noms qu'on croit synonymes.

Il y a certainement très peu de ressemblance entre un Tapir et un Lamentin, cependant Dampier a mêlé des traits appartenant aux deux animaux, lorsqu'il a voulu décrire, d'après les informations obtenues de ses compagnons les flibustiers, un quadrupède dont il avait vu les traces au Darien, et qui lui avait été désigné sous le nom de *vache montagnarde.* La confusion naissait, suivant toute apparence, du nom de *vache marine,* qui s'applique quelquefois au Lamentin, quoique le plus souvent il désigne le Morse (2).

---

fruits qu'il préfère. Si un Piaroa trouve, le matin, ses ananas mangés par un Tapir, il s'en réjouit comme d'un heureux augure.

(1) Voyez, au mot *Tlacaçolloil,* le *Vocabulaire mexicain* du P. Molina, p. 115. (Mexico, an 1571). Si le mot n'est pas écrit ici tout-à-fait de la même manière, il ne faut pas s'en étonner : les Espagnols n'avaient point de lettre ni de combinaison de lettres pour rendre une articulation de la langue Mexicaine qui correspond à notre *ch*, et ils ont employé tantôt le *c* et tantôt l'*x*. Dans quelques-unes des premières relations de la conquête de la Nouvelle-Espagne, on trouve *Mecico* au lieu de Mexico. Les Indiens prononçaient *Mechico.*

(2) « La vache montagnarde est de la grosseur d'un taureau de deux ans; elle ressemble à une vache pour la figure du corps, mais sa *tête est beaucoup plus grosse, plus ramassée et plus ronde,* et sans cornes; elle a le *mufle court,* les yeux ronds et très grands; elle a de grosses babines, mais pas aussi fortes que celles d'une vache ordinaire. Ses oreilles sont plus longues à proportion de sa tête que celles d'une vache. Elle a le col épais et court, les jambes plus courtes que celles de nos vaches; sa queue est médiocrement

Revenant à Nieremberg et à son chapitre sur le Tapir, je ferai remarquer que non-seulement il n'y a rien mis

longue, peu garnie de poils et sans touffe au bout. Elle a le corps tout couvert d'un gros poil clair-semé. *Sa peau est de l'épaisseur de deux pouces ou environ.* Elle a une chair rouge à grain fin, une graisse blanche, et tout ensemble, c'est un manger sain et agréable. *Il y en a qui pèsent jusqu'à cinq ou six cents livres.*

» On trouve toujours cette vache dans les bois près de quelque grande rivière. *Elle se nourrit d'une sorte d'herbe ou mousse longue qui croît en abondance sur les bords des rivières,* mais elle ne paît jamais dans les savanes comme font les autres vaches. Lorsqu'elle est bien rassasiée, elle se couche pour dormir tout au bord de la rivière, et au moindre bruit elle se jette dans l'eau, où elle plonge jusqu'au fond, quelque quantité d'eau qu'il y ait, et là elle marche comme sur un terrain sec. Elle ne saurait courir fort vite, aussi ne s'éloigne-t-elle jamais de la rivière, dont elle fait toujours son asile en cas de danger.

» On trouve aussi de ces vaches dans les rivières de la baie d'Honduras et de tout le pays voisin jusqu'à la rivière de Darien; plusieurs de mes compagnons y en ont vu et ils connaissaient bien leurs traces, que je vis moi-même à l'isthme de Darien, mais que je n'aurais pas remarquées s'ils ne m'y avaient fait prendre garde, n'ayant vu de ma vie aucune de ces bêtes, ni de leurs traces, que cette seule fois. » (Dampier. *Voyage à la baie de Campêche.*)

Les parties écrites en caractère italique indiquent les traits qui me semblent empruntés au Lamentin; l'habitude de se coucher au bord de l'eau pour dormir et de s'y jeter au moindre bruit, me paraît appartenir à un troisième animal le Cabiai, ou *Capybara,* qui, en raison de sa taille, de sa forme générale, de sa couleur et surtout de son allure, peut à quelque distance être pris pour un jeune Tapir. (« *Incedit dorso incurvato ut Capybara* », dit Marcgraff en parlant de notre Pachyderme.) On a prétendu, il est vrai, que le Lamentin sort aussi de l'eau pour paître et dormir sur la rive, mais cela est démenti par les meilleurs observateurs.

Dampier connaissait le Lamentin, et il l'a décrit avec assez d'exactitude au 3e chapitre de son premier voyage à l'isthme de Darien; il savait que cet animal est désigné quelquefois par le nom de Vache marine, ainsi la confusion que nous avons signalée dans sa description de la Vache montagnarde ne doit pas lui être attribuée, mais à ceux dont il reçut ses informations. Quelques circonstances ont pu concourir avec la ressemblance des noms à causer la méprise de ces hommes. Les deux animaux peuvent se rencontrer l'un et l'autre dans les rivières de l'isthme; l'un, lorsqu'il est poursuivi, se jette à l'eau; l'autre s'y enfonce avec bruit quand on le surprend paissant l'herbe qui pend des bords de la berge : tous les deux sont remarquables par l'épaisseur de leur peau; tous les deux fournissent une chaire bonne à manger.

qui ne se trouvât déjà dans des ouvrages très répandus (1), mais qu'ayant à choisir entre diverses versions, il a le plus souvent pris la mauvaise. Il devenait, au reste, fort difficile, en présence de tant de données contradictoires, de savoir à quoi s'arrêter, et désormais les travaux de compilation, même en les supposant faits avec plus de critique que ceux de Nieremberg, ne pouvaient guère éclaircir la question. De nouveaux renseignemens partiels n'eussent probablement servi qu'à accroître la confusion (2); pour y mettre fin il fallait une description

---

Le nom de *Vache montagnarde* semble indiquer un animal qui habite les montagnes, mais l'expression espagnole qu'on a cru rendre par celle-là (*Vaca montes* ou *vaca del monte*) signifie simplement *vache sauvage, vache des bois*. C'est pour rendre l'expression de *vaca brava*, qui a exactement le même sens, que le P. Claude d'Abbeville a employé celle de *vache brave* Cela se comprenait de son temps; et encore au dix-huitième siècle le bœuf sauvage des environs de Montpellier était appelé *bœuf brave* ou *brau*.

(1) Nieremberg donne au Tapir le nom de *Doucanare*, qu'il dit avoir pris de Léry; il n'y a là probablement qu'une faute d'impression; mais Jonston a reproduit ce mot, qui par une seconde faute d'impression est devenu *Doueanare*.

(2) Parmi les auteurs qui ont fait connaître de nouveaux faits relatifs à l'histoire du Tapir, on ne doit pas oublier le P. Ruiz, dont l'ouvrage (*Conquêtes spirituelles, faites par les jésuites au Paraguay*) parut en 1639.

Ruiz avait long-temps habité des pays où le Tapir est très commun, cependant dans ce qu'il rapporte de cet animal, le faux et le vrai se trouvent mêlés presqu'en égale proportion. Ainsi, par une confusion dont j'indiquerai plus tard la cause, il transporte à cet animal plusieurs des traits fabuleux qui appartiennent originairement à l'histoire de l'Élan : il le représente comme sujet au mal caduc, et se guérissant par l'attouchement de son pied gauche antérieur, dont il a fait ainsi connaître aux hommes la propriété anti-épileptique. D'un autre côté, c'est dans ce livre qu'on trouve la première indication d'un fait singulier, mais depuis confirmé par le témoignage des meilleurs observateurs : je veux parler de l'habitude qu'a le Tapir, dans certains cantons, de manger une sorte d'argile imprégnée de sel. Ruiz, d'ailleurs, avance sans raison que l'animal mange de cette terre pendant la nuit, et de l'herbe pendant le jour. (*Conquist. espir. hecha por los PP. de la C^a de J. en el Paraguay*, Madrid, 1639.)

Le Tapir, comme on le sait, n'est pas le seul herbivore chez qui l'on ait observé cette étrange habitude, et dans l'Amérique du nord, lorsqu'il se trouve des bancs d'argile salée dans les lieux fréquentés par les bisons et les orignals, on voit sur les parties où la couche se trouve à nu, des traces nombreuses de dents de ces animaux.

faite tout entière par un seul observateur, par un naturaliste qui portât son attention sur certaines particularités que ne remarquent point les voyageurs ordinaires. On en eut une qui remplissait toutes ces conditions, et les remplissait beaucoup mieux qu'on n'eût dû l'attendre de l'état de la science à cette époque, lorsqu'en 1648 parut l'*Histoire naturelle du Brésil* (1).

Marcgraff, comme on le sait, mourut avant d'avoir pu mettre la dernière main à cet ouvrage, et les notes qu'il avait laissées en partant pour l'Afrique se trouvèrent dans un assez grand désordre. Les plus importantes avaient été

A l'époque où le P. Ruiz quittait le Paraguay pour se rendre en Espagne, un autre jésuite, le P. Acuña, descendait l'Amazone, et constatait l'existence du Tapir dans presque toute l'étendue de pays parcourue par ce grand fleuve. Son livre contient d'ailleurs peu de détails sur cet animal; il donne cependant une plus juste idée de la taille, en la comparant à celle d'un mulet d'un an. (*Nuevo descubr. del gran Rio de las Amazonas*, Madrid, 1641, n° XXVIII, p. 12, verso.)

(1) « Tapiierete *brasiliensibus*, *lusitanis* Anta, *animal quadrupes, magnitudine juvenci semestris : figura corporis quodam modo ad porcum accedens, capite etiam tali, verum crassiori, oblongo, superius in acumen desinente, promuscide super os præeminente, quam validissimo nervo contrahere et extendere potest : in promuscide autem sunt fissuræ oblongæ. Inferior oris pars brevior est superiore. Maxillæ ambæ anterius fastigiatæ, et in quolibet decem dentes incisorii superne et inferne; hinc per certum spatium, utraque maxilla caret dentibus, sequuntur dein molares grandes omnes, in quolibet latere quinque, ita ut habeat viginti molares et viginti incisores. Oculos habet parvos, porcinos : aures obrotundas majusculas, quas versus anteriora surrigit : crura vix longiora porcinis, at crassiuscula : in anterioribus pedibus quatuor ungulas, in posterioribus tres; media inter eas major est in omnibus pedibus; in prioribus pedibus, tribus quarta parvula exterius est ad juncta; sunt autem ungulæ nigricantes, non solidæ sed cavæ et quæ detrahi possunt. Caret cauda et ejus loco processum habet nudum pilis, conicum, parvum, more cutian. Mas membrum genitale longe exserere potest instar cercopitheci : incedit dorso incurvato ut capybara. Cutem solidam habet instar alcis, pilos breves. Color pilorum in junioribus est umbræ lucidæ maculis variegatus albicantibus ut capreolus; in adultis fuscus sive nigricans sine maculis. Animal interdiu dormit in opacis silvis latitans. Noctu aut mane egreditur, pabuli causâ. Optime potest natare. Vescitur gramine, arundine saccariferâ, brassicâ, etc. Caro ejus comeditur sed ingrati saporis est.*

écrites en chiffres, dont heureusement on retrouva la clé; d'autres n'étaient que de simples indications pour mémoire. Laët, à qui ces notes furent remises par le comte Maurice de Nassau, eut donc à s'occuper non-seulement du classement de ces matériaux, mais encore d'une partie de la rédaction : il s'acquitta de cette pénible tâche avec beaucoup de talent et de succès; cependant, comme il n'avait pas vu la plupart des objets décrits, comme il n'était pas naturaliste, il ne put éviter de commettre quelques erreurs, soit en lisant le manuscrit, soit en traduisant ce qui était écrit en langue vulgaire.

C'est probablement à cette cause qu'il faut attribuer une partie des défauts, d'ailleurs peu nombreux, qui se remarquent dans la description du Tapir, et il en est que l'auteur n'eût certainement pas laissé passer, s'il eût publié lui-même ses observations: tel est celui qui se rapporte au nombre des dents. On concevrait que Marcgraff se fût trompé sur le nombre des molaires, en supposant que l'animal observé par lui n'eût pas encore toutes ses dents ou en eût déjà perdu; on comprendrait qu'il n'eût pas reconnu les canines et eût compté huit incisives au lieu de six à chaque mâchoire, la canine, chez cet animal, se distinguant à peine par sa forme de l'incisive voisine, et étant même moins volumineuse; mais cela ne ferait encore que seize incisives en tout, et non pas vingt. Il faut donc croire ou que la note a été prise sur un animal vivant, trop indocile pour se laisser examiner la bouche, et dans ce cas, l'auteur, en faisant paraître son livre, eût donné la détermination comme douteuse (1), ou

(1) Laet dit dans sa préface que les papiers de Marcgraff qui lui furent remis par le comte Maurice de Nassau, ne se composaient guère que de notes brutes (*commentarii indigesti atque imperfecti*) qui n'étaient point classées, et se

bien qu'il y a eu mauvaise lecture de la part de l'éditeur. Plusieurs indices portent à croire que Laët a rédigé en totalité ou en partie ce paragraphe, qui du reste est remarquable par son élégante concision ; il me paraît évident, par exemple, que ce n'est pas Marcgraff qui a écrit cette phrase : *In promuscide autem sunt fissuræ oblongæ*, phrase qui ne peut avoir aucun sens pour le lecteur s'il n'a pas vu l'animal, mais qui dans le texte original désignait sans doute d'une manière moins vague la forme étroite et allongée des narines à l'état de repos.

Malgré ces défauts, qui du reste ne furent aperçus qu'après plus d'un siècle, la description de Marcgraff était évidemment bien supérieure à celles qu'on avait eues jusque là, et il semblait qu'elle dût les faire oublier toutes. Cependant, lorsqu'en 1653, Jonston publia son *Histoire des Quadrupèdes*, il ne lui parut pas suffisant d'avoir reproduit textuellement cette description à l'article du porc, il inséra dans un appendice consacré aux animaux douteux (1) tout le chapitre de Nieremberg ; ne sachant pas si le Tapir devait être rangé parmi les fissipèdes ou parmi les solipèdes.

---

suivaient dans l'ordre où elles avaient été recueillies. « *Nam auctor, nullo servato ordine, et herbas, et frutices atque arbores promiscuerat, prout venerant ad manus.* »

Il dut souvent trouver sur le même objet plusieurs notes prises à différens temps, et en les combinant, il écarta tout ce qui faisait double emploi. Pison, qui eut plus tard accès aux papiers de Marcgraff, ne dédaigna pas ces rognures : je suis à peu près certain qu'il y a pris textuellement pour sa description du Tapir, ce trait caractéristique : *Ore dentato in utrâque maxilla.* Ce trait, qui suffit seul pour séparer le Tapir des ruminans, avait une grande valeur aux yeux d'un zoologiste comme Marcgraff ; Pison ne pouvait en sentir l'importance.

(1) « *De quibusdam exoticis quadrupedibus iisque dubiis... dubiis inquam, nam ad quod genus referri proprie adhuc mecum delibero.* » Le premier dont il parle est le monstrueux Tlacaxolotl, qu'il n'a pas reconnu pour un Tapir, et qui devait en effet lui sembler très difficile à bien classer.

Pison, en 1658, fit paraître son *Histoire naturelle et médicale du Brésil*, ouvrage dans lequel la partie zoologique était prise presque entièrement des travaux publiés ou inédits de Marcgraff (1). Quoique la description du Tapir donnée par le naturaliste saxon ne contînt aucun détail oiseux, il voulut l'abréger; il le fit maladroitement, et de manière à donner de fausses notions sur l'animal, à faire croire, par exemple, que les pieds avaient la même conformation que ceux du cochon.

Ray, qui était plus en état que Pison d'apprécier Marcgraff, n'eut garde de le mutiler ainsi, et quoique dans un ouvrage du genre du *Synopsis quadrupedum*, il eût été excusable de ne mettre qu'un abrégé de la description du Tapir, il crut devoir la reproduire tout entière (2), sauf deux passages que la rédaction de Laët rendait obscurs

---

(1) Pison ne pouvait pas se dispenser de nommer Marcgraff, dont les travaux étaient publiés depuis dix ans; mais il n'en parle que dans sa préface, et comme d'un homme qu'il employait à faire les observations les moins importantes, afin de pouvoir lui-même consacrer tout son temps à celles d'un ordre plus élevé. Tout en le traitant d'élève très instruit et très zélé, il cherche évidemment à le rabaisser. « *Ideoque ut telam hanc felicius pertexerem partem oneris derivaram in domesticos meos, præcæteris in doctissimum et diligentissimum D. G. Markgravium mathesios et medicinæ candidatum quem in Indias meum adduxeram, ut, præter exercitia astronomica et geographica pensiculate observaret externas potissimum figuras illarum rerum naturalium, quarum ego virtutes internas præsidiaque medica firmandæ vel restituendæ valetudini nata, sollicite experirer.* »

Par les additions que Pison a faites à ses *Observations sur l'extérieur des animaux*, on peut juger de ce qu'eût été cette partie de l'ouvrage s'il y eût travaillé seul. Par exemple, dans le livre V, qu'il annonce comme contenant les résultats de ses dissections, ce qu'il ajoute à l'article de Marcgraff sur le Tapir, c'est, pour la partie anatomique, que le mâle est pourvu d'une bourse dans laquelle il porte à son tour les petits, et, pour la thérapeutique, que la queue de l'animal réduite en poudre et prise à la dose de deux gros, est un excellent détersif des reins et de la vessie.

(2) Ray, *Synops. quadruped.*, Lond., 1693, page. 126.

pour lui. Le premier, dont j'ai déjà parlé, est celui qui a rapport à la forme des narines; l'autre est celui-ci : *Mas membrum genitale longè exserere potest instar cercopitheci.* L'auteur avait probablement voulu dire : « *Mas membrum genitale sœpius præbet longè exsertum instar cercopitheci*, et exprimé ainsi, c'est un caractère vrai. Comme le Tapir est le seul des quadrupèdes américains qui le présente, les indigènes eux-mêmes l'avaient remarqué, ainsi qu'on peut le voir par le nom qu'ils donnaient au caneficier (1).

Ray, en indiquant les ressemblances qu'a le Tapir avec le cochon sous le rapport de la forme, ne l'avait pas cependant placé dans le même groupe, mais l'avait fait entrer dans celui des ongulés anormaux près du rhinocéros et de l'hippopotame. Barrère l'en tira pour le comprendre parmi les porcs, sous la dénomination de *sus aquaticus multisulcus* (2).

On pardonnerait à Barrère d'avoir mal classé le Tapir, si d'ailleurs il l'avait bien décrit, comme son séjour à Cayenne lui fournissait les moyens de le faire; mais le peu qu'il en dit n'est propre qu'à donner de fausses idées : ainsi il le compare encore à un mulet; il attribue à l'adulte une robe qui n'est que la livrée du jeune, enfin il le représente comme un amphibie qui vit plus dans l'eau que sur terre, où il va seulement de temps en temps pour brouter.

---

(1) « TAPII AQUAINA *dicen a la caña fistula, tomando lo de la semejança del miembro genital del Tapii.* » (*Ruiz. Tesoro de la lengua guarani.*) Il faut probablement lire *tapiraquaina*, puisque le mot *tapii* quand il est suivi d'un autre dans un nom composé, prend la terminaison *ra* ou *re;* on trouve en effet dans d'autres auteurs, tantôt *Tapyracoana* (Pison, *De facult. simpl.*, page 80), et tantôt *Tapyra coaynana* (Marcgr., *Hist. plantar.*, page 34.)

(2) Barrère (*Essai sur l'Histoire nat. de la France équinox*: Paris, 1741, page 160).

Le père Gumilla dit aussi que le Tapir se plaît autant à demeurer au fond de l'eau que sur la terre (1).

La description donnée par Gumilla est beaucoup plus étendue que celle de Barrère, mais on ne peut pas dire qu'elle soit meilleure (2); cependant dans l'une et dans l'autre on trouve quelque chose de nouveau; ainsi, la première fait connaître le cri de l'animal, qui est une espèce de sifflement grêle comparable à celui du chamois; l'autre nous apprend comment le Tapir se laisse tromper par l'imitation de ce cri, et arrive ainsi jusqu'à la portée des flèches du chasseur (3). C'est encore dans Gumilla qu'on voit la première indication des sentiers que l'animal fraye en passant et repassant toujours par les mêmes points (4), et celle d'une particularité d'organisation fort remarquable et cependant négligée par tous les écrivains antérieurs, à

(1) « Il vit aussi volontiers au fond de la rivière ou du lac que sur la terre; » il est vrai que pour paître l'herbe qui est sa nourriture favorite, et qui se » nomme *gamalote*, il vient toujours à terre. » (Gumilla, *El Orinoco ilustrado*, Madrid, 1741, chap. 19, page 201.)

Les ouvrages de Gumilla et de Barrère parurent la même année : ainsi dans ce qu'ils ont de commun, l'un n'a pu rien prendre à l'autre.

(2) Les principales fautes dans la description de Gumilla, sont : de compter trois ongles aux pieds de devant comme à ceux de derrière, de donner à l'animal une queue grêle et tortillée comme celle du cochon, enfin de ne rien dire de la trompe.

(3) La facilité avec laquelle le Tapir se laisse attirer par l'appeau du chasseur, est un fait connu dans la Guyane française aussi bien que dans la Guyane espagnole. C'est donc à tort que d'Azara a repris Buffon de l'avoir avancé sur la foi de de Laborde.

(4) C'est encore un des faits qui ont été confirmés par le témoignage de Laborde, et contestés mal à propos par d'Azara. Le Tapir, quand il vit dans un canton où il n'est pas trop inquiété, revient presque toujours au même lieu pour dormir, et, de cet emplacement à celui où il a coutume d'entrer à l'eau, on trouve fréquemment une sorte de sentier indiqué non-seulement par les traces que les pieds laissent sur le sol, mais encore par l'écartement des broussailles. Cela était bien connu des naturels même avant la conquête; au Paraguay ils donnaient à la voie lactée le nom de *Mborebi rape* (sentier de Tapir), comme chez nous les gens du peuple le nomment le chemin de Saint

l'exception de Marcgraff (1); je veux parler de la lame verticale qui fait saillie au-dessus du front, sorte de coûtre dont le Tapir se sert pour diviser les buissons et qu'il présente en avant lorsque effrayé par quelque bruit il s'enfonce tête baissée dans les taillis, en galopant brusquement à la manière du sanglier de nos forêts (2).

En disant quel moyen emploie le Tapir pour se dégager des griffes du jaguar, le P. Gumilla donnait assez à entendre que cet animal devait être doué d'une grande force musculaire; déjà au reste un autre jésuite en avait parlé d'une manière plus frappante et cependant sans rien exagérer. « On tue le Tapir à coups de flèches, dit le P. Lozano dans sa description du grand Chaco (3), ou bien on le prend dans des piéges; car de vouloir l'enlacer, comme on fait pour le tigre, ce serait par trop dangereux, puisque sa vigueur est telle, que loin d'être arrêté par le *laço*, il entraîne après lui et le cheval et le cavalier. »

La description que Lozano donna du Tapir n'était guère que la répétition de ce qui se trouvait dans des ou-

---

Jacques. — « MBOREBI RAPE, *camino de antas; y asi llaman la via lactea.* » (Ruiz, *Tesoro de la lengua guarani*, page 216, recto.)

(1) « *Figurâ corporis quodam modo ad porcum accedens, capite etiam tali, verum crassiori, oblongo, superius in acumen desinente.* » Marcgr., lib. VI, cap. VI).

(2) « La tête du Tapir (*Ante*) ressemble jusqu'à un certain point à celle du » cochon; elle présente au milieu du front un os fort avec lequel l'animal » enfonce les broussailles (*malesa*) et rompt les branches qui se trouvent » sur son passage dans les forêts. Le tigre se met en embuscade près des » sentiers par lesquels les Tapirs vont à la pâture, saute sur le premier » qui passe, et s'y cramponne des quatre pattes. Si c'est en un lieu dé- » couvert, le Tapir est perdu; mais s'il y a tout près de là quelque bois ou » quelque taillis, c'est sur le tigre que retombe tout le mal, parce que le Tapir » court comme un furieux, met la tête par le plus fourré, et continue avec » une telle impétuosité, que si le tigre n'a pas lâché prise tout d'abord, il » meurt fracassé par le choc des branches et déchiré par les épines. »

(3) *Descripcion chorographica del terreno, Rios, arboles y animales del Gran Chaco, Gualamba*, etc., Cordoue, 1733, page 38 et 39.

vrages antérieurs, et notamment dans celui de Ruiz (*voyez* page 572, note 2). Il paraît cependant qu'il avait vu quelques parties de l'animal; ainsi il savait fort bien que le nombre des doigts n'est pas le même au train de devant qu'au train de derrière, mais il crut que les pieds où il voyait quatre doigts étaient les pieds postérieurs.

Ce qu'il raconta des mœurs de l'animal était aussi pris presque entièrement du livre de Ruiz, et rendu en général d'une manière assez peu fidèle (1); il fut au reste lui-même étrangement travesti par un troisième jésuite, par le P. Charlevoix, dont l'ouvrage, plus généralement connu en Europe, induisit en erreur divers naturalistes, et entre autres Buffon (2).

Le P. Charlevoix, dans son *Histoire du Paraguay*,

---

(1) « Les Tapirs, dit le P. Ruiz, mangent pendant le jour des herbes, et » la nuit une sorte d'argile salée. Dans quelques-uns des lieux où se trouve » cette terre, les foulées de Tapir sont aussi nombreuses que celles des » vaches dans les parcs où on les renferme (*corrales*). Les chasseurs viennent » de nuit à ces argilières (*barreros*), et, quand ils voient qu'ils en sont tout près, » ils font paraître subitement une torche enflammée : le Tapir est d'abord » ébloui par la clarté, et l'on profite de ce moment pour le tuer. Les chas- » seurs continuent ainsi toute la nuit, et le matin, à l'aide des traces, ils re- » trouvent les bêtes mortes à peu de distance du lieu où elles ont été frap- » pées. » (Ant. Ruiz, *Conq. esp.*, page 4, recto.)

Voici maintenant comment Lozano a entendu ce passage. Après avoir parlé des différentes manières de chasser le Tapir, il ajoute : « On dit encore que » comme ces animaux se réunissent pour passer la nuit dans un même lieu, » à la manière des bœufs, qui reviennent chaque soir dormir à la bouverie » (*boeriz*), si l'on se présente tout à coup dans ce lieu avec des lumières, » ils sont éblouis par cette clarté, et l'on a le temps de les tuer. » (*Descrip. chorogr.*, page 38.)

Charlevoix enfin dit : « La chasse de l'Anta (Tapir) ne se fait que la nuit et elle est fort aisée; on va attendre ces animaux dans leurs retraites où ils se rendent volontairement en troupes, et quand on les voit venir, on va au-devant d'eux avec des torches allumées, qui les éblouissent de telle sorte, qu'ils se renversent les uns sur les autres, etc. »

(2) « Il marche ordinairement de compagnie et quelquefois en grande troupe. » (Buffon, tome XI, in-4°, page 448.)

a donné deux descriptions du Tapir, descriptions qui renferment, outre les erreurs commises par les auteurs sur lesquels il s'appuie, toutes celles qui peuvent résulter d'une connaissance imparfaite de la langue. Ainsi, c'est faute d'avoir connu la valeur du mot *mano* (main) employé par Ruiz, qu'il a dit que le Tapir se sert des deux pieds de devant « comme font les singes et les castors, et avec la même facilité » ; il n'a pas non plus compris, ou tout au moins il n'a pas fait comprendre le P. Lozano, lorsqu'il a dit que l'animal « a les pieds de devant fendus en deux, et ceux de derrière en trois (1). »

Quelques autres erreurs paraissent être le résultat d'une lecture peu attentive du texte original ; ainsi Charlevoix ne dit point, ce que Ruiz avait eu cependant bien soin d'indiquer, que l'argile mangée par les Tapirs est une terre imprégnée de sel (2).

Ces argiles salées ne se trouvant à découvert qu'en des cantons très circonscrits, les Tapirs y viennent de fort loin, et peuvent s'y rencontrer plusieurs à la fois, surtout pendant la nuit, qui est le temps de leur plus grande activité. Ruiz ne dit pas autre chose, et c'est à tort que Charlevoix en a conclu que ces animaux se réunissaient en troupe pour passer la nuit. Lozano au reste avait déjà commis la même erreur, et plus tard Gmelin la repéta, en donnant au Tapir, dans la 14^{e} édition du *Systema naturæ* de Linnée, l'épithète de *gregarius* (3).

---

(1) Lozano dit : « Il a les sabots comme la vache, mais avec cette différence qu'aux pieds de derrière il y a trois séparations (ce qui fait quatre doigts) et deux seulement aux pieds de devant. »

(2) « L'Ante broute l'herbe pendant le jour, et la nuit il mange une espèce » d'argile qu'il trouve dans les marais où il se retire au coucher du soleil. » (Charlevoix, *Hist. du Paraguay*, tome I, page 33.)

(3) Linnée ne trouvait pas apparemment dans tout ce qui avait été écrit

Peu d'années après la publication du livre de Charlevoix, Buffon fut conduit par la fausse interprétation d'un passage de Belon à placer à la suite de l'histoire du zébu ce qu'il savait de relatif au Tapir. A cette époque il n'en avait vu que quelques dépouilles incomplètes; aussi ne put-il faire que rappeler ce qu'on avait dit avant lui; il donna seulement une nouvelle figure de l'animal d'après un dessin que La Condamine avait rapporté de Quito. L'image est moins grossière que celle qui avait paru avec le livre de Marcgraff, mais elle est tout aussi peu fidèle, surtout si l'on admet, comme on l'a fait jusqu'ici, qu'elle représente le Tapir de l'espèce commune.

La description et la figure se trouvent dans le onzième volume de l'*Histoire des Quadrupèdes,* qui parut en 1764(1), et elles furent reproduites peu de temps après sans aucun changement dans l'édition de Hollande; mais dans le quinzième volume de cette même édition publié en 1771, Allamand introduisit des additions très importantes, ayant eu l'occasion d'examiner un jeune Tapir mâle qui était arrivé depuis peu à la ménagerie du prince d'Orange, et ayant reçu en même temps de bonnes observations faites sur un individu femelle qu'on montrait à cette époque dans les foires. Allamand reconnut la justesse de la description donnée par Marcgraff, et il n'eut qu'à la

---

sur le Tapir, des données suffisantes pour lui assigner sa véritable place dans le cadre zoologique. Cependant Brisson ayant, en 1756, fait entrer le Tapir dans son tableau du règne animal, Linnée, en 1758, lui donna également place dans la 10e édition de son *Systema naturæ,* mais encore avec hésitation. « *Animal dubium, hippopotamo genere proximum, præeunte Raio.* Il le fit même disparaître de la 12e édition.

(1) Ce volume, sorti des presses de l'Imprimerie royale, porte sur le titre le millésime MDCCLIV, mais l'erreur est rendue évidente, non-seulement par les citations, dont quelques-unes se rapportent à des ouvrages publiés en 1756 et 1758, mais encore par la date du volume précédent.

développer un peu davantage. Il ne put s'assurer du nombre des dents; cependant il lui sembla qu'il y avait moins d'incisives que ne l'avait cru le naturaliste saxon (1).

Allamand donna les dimensions des deux individus, qui n'étaient ni l'un ni l'autre adultes; il en donna aussi des figures qui sont assez mauvaises, quoique Pennant les déclare excellentes.

La femelle est représentée assise et avec la trompe entièrement retirée, de manière à dépasser à peine la lèvre inférieure. C'est probablement ce qui a fait supposer à Pennant, puis à Gmelin, que le mâle seul est pourvu de cet organe, lequel, à la vérité, est généralement chez lui plus développé (2).

Allamand ne paraît pas avoir eu connaissance d'une figure qui avait été donnée antérieurement aux siennes, mais postérieurement à celle de Buffon. On la trouve dans un re-

---

(1) « Il ne m'a pas été possible de compter ses dents incisives, il ne les découvrait pas assez long-temps pour que je pusse m'assurer de leur nombre, » et quand je voulais lui relever le nez pour les mieux voir, il secouait » fortement la tête et m'obligeait à lâcher prise. Il m'a semblé cependant » qu'il y en avait huit à chaque mâchoire... Les dents canines ne m'ont point » paru les surpasser en grandeur, et ne sortaient point hors de la bouche » comme la figure donnée par M. de La Condamine à M. de Buffon semble- » rait le faire croire; quant aux dents mâchelières, je n'ai pu les apercevoir. » Ceci a rapport au mâle; quant à la femelle, dont on ne parvint pas non plus à compter les incisives, l'observateur anonyme remarqua « qu'elle a deux » dents canines à chaque mâchoire, et que celles de la mâchoire supérieure » sont plus grandes que celles d'en bas »; ce qui est vrai.

(2) « *Tapiir, — Long nosed... — with the nose extended far beyond the* » *lower jaw and forming in the male a sort of proboscis capable of being* » *contracted or extended at pleasure... The nose of the female is destituted* » *of proboscis and the jaws are of equal lengths.* » (Pennant, *Quadr*, tome 1, page 148.)

« *Nasus mari elongatus in proboscidem tenuem, extensilem, lateribus sul-* » *catam, ultra maxillam inferiorem prominentem.* » (Gmelin, *Syst. nat.*, édit. XIV, Gœttingen, 1788, page 216.)

cueil publié en 1767 par les héritiers de Knorr (1). Le dessin qui servit pour cette planche était fait évidemment par un homme qui avait vu l'animal; mais le graveur avait ensuite corrigé ce qui lui semblait peu exact, réunissant par exemple les doigts de manière à ce qu'il n'en restât que deux à chaque pied. Cependant on peut reconnaître encore les traces de l'ancienne division. Dans cette figure, qui est coloriée, le fond brun du pelage est semé d'un assez grand nombre de taches plus claires qui semblent être un reste de la livrée du jeune âge.

Ce ne fut qu'en 1784 qu'on eut enfin une bonne représentation du Tapir; elle parut dans le sixième volume du *Supplément à l'Histoire des Quadrupèdes*. Buffon l'avait fait faire par un habile dessinateur, d'après un jeune animal qui avait vécu quelque temps à Paris. Dans ce sixième volume, Buffon donnait, outre les additions d'Allamand, quelques détails qui lui avaient été transmis par de Laborde, médecin du roi à Cayenne, d'autres qui étaient extraits d'un Mémoire adressé en 1774 à l'Académie des

(1) Knorr. *Deliciæ naturæ selectæ*, 1766-7, tome 2, planche K, n° 13. La planche précédente représente encore l'animal et dans la même position, avec cette seule différence que la tête est un peu plus de face, et que la trompe, au lieu d'être contractée, montre le boutoir dans son entier. Cette figure est donnée pour celle d'un hippopotame, les éditeurs ayant supposé, d'après la nomenclature adoptée par Linnée dans la 10e édition du *Systema naturæ* (*hipp. amphib.* et *hipp. terrestris*), qu'il devait exister une grande ressemblance dans les formes des deux animaux. Les dessins originaux se trouvaient l'un et l'autre dans le cabinet de J. Trew, mais ils n'avaient pas sans doute appartenu dans l'origine à la même personne, et il pouvait y avoir des différences dans l'inscription qu'ils portaient: peut-être l'un d'eux portait-il le nom de cheval marin, nom sous lequel le Tapir qui avait servi de modèle était désigné par l'homme qui le montrait en Hollande en 1704, et il aura été très aisé de confondre ce mot avec celui de cheval de rivière ou hippopotame. Les éditeurs au reste avouent qu'il n'y a pas grande confiance à avoir dans les descriptions et dans les figures qu'on a données des deux animaux.

Sciences, par Bajon, chirurgien du roi dans la même colonie; enfin les résultats d'observations faites au Muséum d'histoire naturelle.

La communication de Laborde n'ajoutait que peu de choses à ce qu'on savait déjà. On y apprenait cependant que la femelle ne met bas qu'un petit dont elle prend soin pendant long-temps; et ce fait n'avait été jusque là indiqué par personne. On y trouvait aussi des détails, intéressans encore après la courte indication fournie par Gumilla, sur les sentiers que l'animal se forme dans les bois et sur l'impétuosité avec laquelle il parcourt la nuit ces routes connues, renversant tout ce qui se trouve accidentellement placé sur son passage. D'un autre côté, cette communication contenait quelques assertions un peu suspectes : ainsi quand l'auteur dit que le Tapir blessé se retourne sur la barque d'où est parti le coup, et essaie de la renverser, il est bien difficile de ne pas voir là une réminiscence de l'histoire de l'hippopotame.

Le Mémoire de Bajon, beaucoup plus important que celui de Laborde, contenait un assez grand nombre de détails entièrement neufs ou qui servaient à confirmer des observations regardées encore comme douteuses; ainsi il faisait connaître l'époque du rut et les combats que se livrent les mâles à cette occasion, la durée de la gestation, l'espèce d'emplacement que choisit la femelle pour mettre bas, les lieux où en général ces animaux se tiennent de préférence pendant le jour, et le temps plus ou moins long qu'ils passent dans leur gîte selon la différence des saisons.

Plusieurs des détails relatifs aux formes extérieures avaient aussi l'intérêt de la nouveauté; mais ce qui distinguait surtout le travail de Bajon, c'était une série d'observations sur la structure des organes internes; malheu-

reusement au lieu de les présenter *in extenso*, et telles qu'il les avait recueillies, il se contenta souvent d'établir des rapprochemens entre les organes du Tapir et ceux de nos animaux domestiques; et comme l'anatomie de ces derniers ne lui était pas suffisamment connue, il s'exprima quelquefois de manière à donner une très fausse idée de ce qu'il avait pourtant très bien vu.

A l'époque où ce Mémoire parvint en France, on avait le moyen de contrôler plusieurs des faits qui y étaient énoncés, car peu de temps auparavant on avait disséqué au Muséum d'histoire naturelle un Tapir envoyé vivant d'Amérique. Buffon put donc reconnaître que Bajon s'était trompé en assimilant l'appareil digestif du Tapir à celui des ruminans; mais il ne connut pas le fait très curieux qui avait été la cause de cette erreur, l'existence d'un cœcum présentant intérieurement la structure du *bonnet*.

Tous les naturalistes s'étant accordés depuis la publication du livre de Marcgraff à donner vingt dents au Tapir, Bajon n'avait pas osé affirmer que ce nombre était inexact, et il s'était borné à dire qu'on en trouvait quelquefois un différent. Allamand, de son côté, avait cru voir moins de dix incisives à chaque mâchoire; ainsi cela exigeait une vérification, et rien n'était plus aisé que de la faire, puisqu'on avait les pièces au Muséum (1).

---

(1) M. Geoffroy ayant retrouvé, en 1797, ces pièces dans les galeries du Muséum, et ne connaissant point alors le travail imprimé de Bajon, s'empressa de faire connaître une vérité qu'il était fondé à regarder comme nouvelle. Il en fit l'objet d'une communication à la Société philomatique, communication dont il est fait mention au Bulletin de la Société, tome I, page 96. M. Geoffroy n'avait parlé que des incisives et des canines, parce qu'il n'avait eu à sa disposition que deux échantillons provenant de jeunes individus chez lesquels il était évident que la dentition n'était pas achevée. M. Cuvier, dans le *Tableau élémentaire de l'Histoire des animaux*, publié l'année suivante, reproduisit cette observation, ce qui n'empêcha pas que dans une

Buffon, au lieu d'examiner lui-même ces pièces, donna ordre à Mertrud de voir combien il y avait de dents; Mertrud trouva douze incisives, mais comme il crut que c'était un cas exceptionnel, il ne jugea pas nécessaire d'en parler, et il se contenta de traduire le passage de Marcgraff. Le résultat fut qu'on vit paraître dans le tome VI du *Supplément*, page 20, la note suivante, qui semblait ne plus laisser lieu à aucun doute raisonnable:

« M. Allamand n'a pu voir toutes les dents incisives du » Tapir, mais nous les avons vues, et elles sont au nombre » de dix en haut et de dix en bas. »

A l'époque où cette note fut écrite, le nombre des incisives du Tapir se trouvait correctement indiqué dans un livre publié à Paris depuis peu de temps et sur lequel diverses circonstances semblaient devoir appeler plus particulièrement l'attention de Buffon.

Bajon, pendant un séjour de douze années à Cayenne, avait recueilli un grand nombre de faits relatifs, soit à l'histoire naturelle, soit à la médecine, et il en avait fait l'objet de diverses communications adressées à l'Académie des Sciences et à l'Académie de Chirurgie, dont il était correspondant.

De retour en France, il réunit ces différens travaux, les développa, y ajouta les résultats d'observations subséquentes, et en forma deux volumes de mélanges (1) qui parurent à la fin de 1777 et au commencement de 1778.

---

foule de traités d'histoire naturelle, publiés bien postérieurement, on ne continuât à donner au Tapir dix incisives à chaque mâchoire. Cette erreur se trouve répétée jusqu'en 1825, dans un ouvrage composé par ordre du gouvernement, pour l'usage des colléges.

(1) *Mémoires pour servir à l'Histoire de Cayenne et de la Guyane française*, etc., par M. Bajon, correspondant de l'Académie royale des Sciences de Paris et de celle de Chirurgie. Paris, 1777 et 1778.

Le Mémoire sur le Tapir était reproduit dans le second volume, mais avec de grandes améliorations. Il paraît que Buffon ne prit pas connaissance de cette publication, puisqu'il n'en profita point pour son article supplémentaire, qui cependant ne fut écrit que vers 1782. Ce qui rend la chose assez étrange, c'est que les deux volumes de Bajon avaient été soumis avant l'impression à l'approbation de l'Académie, et que dans un des rapports fait par Daubenton et M. de Jussieu (A. L.), les recherches sur le Tapir étaient spécialement désignées (1).

Ces recherches, qui, par une fatalité singulière, paraissent avoir échappé à l'attention de tous les naturalistes, puisqu'elles ne sont citées par personne, sont pourtant très supérieures à tout ce qu'on avait eu jusque là sur le même sujet, supérieures encore à beaucoup de ce qui s'est fait depuis. Je ne sais même si aujourd'hui on trouverait sur la disposition et la structure du canal intestinal chez le Tapir américain, quelque chose de plus exact et de plus complet que ce qu'a donné Bajon. Je dis exact quant au sens, car souvent l'expression est très impropre (2).

---

(1) « Nous pensons que ce second volume du Mémoire de M. Bajon est aussi » bon et aussi utile que le premier, et qu'il mérite d'être approuvé par l'Aca- » démie, et imprimé sous son privilége. » *Signé* DAUBENTON et A. L. DE JUSSIEU, 25 février 1778.

(2) La description de Bajon bien comprise, s'accorde parfaitement avec celle qu'a donnée sir Everard Home pour le Tapir indien, même en ce qui concerne les proportions de grandeur des parties comparées entre elles et avec les dimensions générales. Cependant l'individu qui a fait le sujet de l'observation de M. Home, avait l'estomac et les deux autres renflemens un peu moins amples, ce qui provenait peut-être de ce qu'il avait vécu quelque temps en captivité, et que, faisant usage d'alimens plus nourrissans à volume égal que ceux qu'il trouvait à l'état sauvage, les cavités digestives avaient cessé d'être soumises aux distensions ordinaires. L'état maladif peut apporter de plus grands changemens encore, comme le montrent les résultats de l'autopsie faite par M. Yarrel, sur un Tapir américain qui mourut épuisé en arrivant à Londres.

En lisant la description de sir Everard Home (*Transact of the Roy. Soc.*,

Quoique cette fois il ne paraisse plus croire que l'animal rumine, il fait encore usage, en décrivant les organes digestifs, des termes qui s'emploient pour les ruminans, et il les applique même fort mal. Ainsi quand il nomme le troisième estomac, il y a lieu de croire que c'est du second ou du bonnet qu'il entend parler; mais comme en même temps il indique le croisement des lames de la tunique interne, il n'en résulte réellement aucune confusion pour un naturaliste. Il désigne encore, comme dans son premier Mémoire, sous le nom d'*estomacs,* deux renflemens du canal, situés l'un à la terminaison de l'intestin grêle, l'autre dans la longueur du colon. Mais qu'importe le mot employé pourvu qu'on ait de la chose une juste idée; or, on l'a certainement après avoir lu sa description, qui donne exactement les dimensions, la figure, les rapports et la disposition tant interne qu'externe des diverses parties du tube intestinal.

Dans la note adressée à l'Académie, Bajon, comme on l'a vu, parlait de variation dans le nombre des dents; il en parle encore dans le Mémoire imprimé en 1778, mais cette fois les différences paraissent ne porter que sur le nombre des molaires, et l'on conçoit que celles-là peuvent dépendre de l'âge. Considérant le cas ordinaire, il donne à chaque mâchoire vingt-deux dents, savoir : six incisives,

---

ann. 1821, page 279), on voit que le langage de Bajon est jusqu'à un certain point excusable, puisque celui de l'habile anatomiste anglais s'en rapproche souvent, sans cesser toutefois d'être juste. Bajon, par exemple, dit qu'à l'ouverture du bas-ventre on aperçoit des *poches très volumineuses qui représentent plusieurs estomacs.* Home, parlant de la dilatation que présente le colon, dit qu'elle ressemble à un estomac. Le premier dit que dans le *sac qui tient lieu du cœcum* la membrane interne plus grande que l'externe, forme des plis qui sont quelquefois hauts de six lignes, et s'entrecroisent comme dans une portion de l'estomac des ruminans. L'autre, en décrivant le *cœcum,* dit qu'il est intérieurement *honey combed* (à manières de rayons d'abeilles), expression qui s'emploie habituellement pour exprimer la disposition alvéolaire de l'intérieur du *bonnet.*

deux canines (1) et quatorze molaires. Il n'y a réellement en bas que douze molaires, mais on est très exposé à se tromper sur ce point quand on examine des sujets chez lesquels la seconde dentition n'est pas terminée, et, ainsi que le remarque Bajon lui-même, elle ne s'achève que fort tard. Les plus grands anatomistes ont partagé cette erreur, et jusqu'au commencement du dix-neuvième siècle, ils ont cru le nombre des dents égal aux deux mâchoires; c'est ce dont on a la preuve dans les notes jointes à l'histoire des quadrupèdes du Paraguay (2).

Le livre de d'Azara, dont la traduction française, publiée avant l'original espagnol, parut en 1801, commence par l'histoire du Tapir. Cette histoire, qui renferme moins d'erreurs peut-être que celle donnée par Bajon, contient aussi beaucoup moins de renseignemens importans, surtout en ce qui concerne les habitudes de l'animal à l'état de liberté. D'Azara se montre d'ailleurs dans ce chapitre, comme dans tout le reste de l'ouvrage, déterminé à ne reconnaître pour vrai que ce qu'il a vu ou ce qu'on lui a conté pendant son séjour au Paraguay, rejetant sans autres motifs beaucoup de faits attestés par de bons observateurs, même quand ils n'ont rien que de très compa-

(1) Bajon donne une fausse idée de la figure et de la taille des canines chez le Tapir, en les assimilant à celles du cochon; il est même à remarquer qu'à la mâchoire supérieure, la canine est plus petite que l'incisive voisine. La canine inférieure, quoique assez forte, ne dépasse point les lèvres, comme l'indique la figure jointe à son Mémoire. Cette figure, au reste, est fort mauvaise; c'est une copie de celle qu'avait d'abord donnée Buffon, et dans laquelle on s'est contenté de figurer la crinière et d'allonger la trompe et les doigts: ce dernier changement la rendait encore plus défectueuse qu'elle ne l'était d'abord.

(2) *Essais sur l'Histoire naturelle des Quadrupèdes de la province du Paraguay*, par don F. d'Azara, traduits sur le manuscrit inédit de l'auteur, par Moreau-Saint-Méry. Paris, 1801, tome I^er^, page 9, notes *a* et *b*.

Dans le *Dict. des Sciences nat.*, vol. LII (publié en 1828), p. 227, on donne encore au Tapir américain sept molaires, en haut et en bas, de chaque côté.

tible avec ce qu'il admet. Ainsi il refuse au Tapir la faculté de plonger (1); il ne veut pas croire qu'il se défende avec vigueur contre les chiens quand il ne peut avoir recours à la fuite, qu'il fraye des sentiers dans les bois en repassant souvent par les mêmes lieux, qu'il se laisse attirer à l'appeau du chasseur, et que le cri du mâle puisse être distingué de celui de la femelle. D'un autre côté, il confirme la justesse de certaines observations déjà faites au Paraguay, mais qui ne l'ont été que là; telle est celle qu'on devait au P. Ruiz, sur l'habitude qu'a le Tapir de manger certaines terres salées (2).

---

(1) Il est très possible qu'au Paraguay les goûts aquatiques du Tapir soient moins prononcés qu'à la Guyane, et il y a lieu de croire qu'il existe une différence semblable pour l'espèce asiatique; ainsi les renseignemens fournis au major Farquhar par les naturels de la presqu'île de Malaca, semblent indiquer que l'animal ne fréquente pas beaucoup les eaux. Tandis que de l'autre côté du détroit, à Sumatra, il en est tout autrement. Un jeune individu qui avait été amené de cette île à la ménagerie de Barackpore, courait à l'eau dès qu'il était libre, y restait une grande partie du jour, et plongeait souvent pendant un temps considérable.

Les habitudes des animaux varient quelquefois notablement suivant les cantons qu'ils habitent. C'est une remarque que M. de Humbold a déjà faite relativement à plusieurs espèces américaines et dont j'ai eu souvent occasion de reconnaître la justesse. Dans certains lieux j'ai vu le *paca* avoir des habitudes presque aussi aquatiques que le cabiaï; dans d'autres il ne va presque jamais à l'eau. Je ne parle ici que des individus qui se trouvent dans les régions chaudes, car quant à ceux qui vivent à une grande hauteur (on en voit jusqu'à une élévation de 1800 mètres), je ne suis pas certain qu'ils ne forment pas une espèce distincte.

(2) Cette habitude est nécessairement subordonnée non-seulement à la constitution géologique du pays et aux accidens qui en ont mis à découvert certaines parties, mais encore au besoin que les herbivores ont de sel, ce qui varie avec la nature des pâturages, comme j'ai eu occasion de le faire remarquer dans mon *Mémoire sur les changemens éprouvés par les animaux domestiques transportés de l'ancien dans le nouveau continent.*

La terre salée que mange le Tapir est désignée dans l'édition française du livre de d'Azara, sous le nom de *Barrero*. Il y a certainement là une méprise de la part du traducteur, qui aura pris pour le nom de la substance celui du lieu où on la trouve. Si le mot *barrero* se lit dans l'original, il y est

Mais le principal mérite de d'Azara consiste dans le soin qu'il a mis à décrire les formes extérieures. Les détails qu'il donne ont assez de précision pour permettre de reconnaître des différences spécifiques si l'occasion se présentait d'en observer, et c'est ce qu'on n'eût pu faire à l'aide des descriptions précédentes. Ainsi un trait caractéristique de l'espèce commune, la crête fronto-cervicale, qui existe chez la femelle aussi bien que chez le mâle, est à peine indiqué par Marcgraff et par Gumilla; Buffon, Allamand et Bajon n'en font même pas mention, et se bornent à parler de la crinière, qui n'est pas un caractère constant, puisqu'elle est quelquefois à peine sensible chez la femelle, quoique d'Azara prétende qu'elle a le même développement que chez le mâle.

Une différence relative au sexe est celle de la taille, et ces deux auteurs l'admettent également; mais Bajon prétend que c'est le mâle qui est le plus grand; d'Azara soutient, et à ce qu'il paraît avec raison, que c'est la femelle. Une autre différence, que ni l'un ni l'autre ne semble avoir aperçue, est celle qui se rapporte aux dimensions de la trompe. D'Azara, qui a décrit une femelle, dit que la trompe n'a, dans l'état de repos, que deux pouces et demi, et environ quatre pouces dans son plus grand allongement. Bajon, qui paraît avoir pris ses mesures sur un mâle, dit qu'elle peut s'étendre jusqu'à près d'un pied de longueur.

L'individu décrit par d'Azara n'avait pas encore sa dernière molaire, qui n'apparaît, comme l'avait observé Bajon, que long-temps après les autres; de là vient qu'il n'a compté que trente-huit dents au lieu de quarante-deux; il les a passablement décrites, mais mal caractérisées,

---

sans doute employé comme il l'était dans la description de Ruiz, pour signifier *argilière*. C'est un dérivé du mot *barro*, qui se dit de toute terre douée de plasticité.

ayant considéré comme une seconde canine l'incisive la plus externe de la mâchoire supérieure.

D'Azara ne s'est point occupé de l'examen des viscères, et quoiqu'il blâme Bajon d'avoir donné trois estomacs au Tapir, il ne s'appuie évidemment que sur les observations faites au Muséum. Il le reprend avec plus de connaissance de cause pour avoir assimilé les organes génitaux du mâle à ceux du cheval. La description qu'il en donne lui-même et qui se borne aux parties extérieures, confirme la phrase de Marcgraff: *Membrum genitale longè exsertum instar cercopitheci.*

Les observations de d'Azara appartiennent encore au dix-huitième siècle. Je ne parlerai point de celles qui se sont faites dans le dix-neuvième : on sait qu'elles ont eu pour résultat de faire beaucoup mieux connaître l'anatomie de l'animal, et dès l'année 1803, un Mémoire de M. le baron Cuvier, ne laissait presque plus rien à faire pour la partie ostéologique.

Ces recherches, de même que les renseignemens fournis dans l'espace de trois siècles par les voyageurs, se rapportaient à une seule espèce, du moins les naturalistes le pensaient ainsi, et en effet, les légères différences que quelques-uns d'entre eux avaient notées, même en ne les supposant pas dépendantes du sexe (et cette cause y entrait certainement pour beaucoup), auraient à peine suffi pour constituer une variété (1).

---

(1) « Les Indiens, les nègres et les habitans qui connaissent bien cet animal » en distinguent deux espèces, qu'ils appellent grands et petits Maïpouris. Les » petits se trouvent à quelque distance des bords de la mer ; ils ne pèsent » que 300 à 350℔. Les grands Maïpouris sont plus avant dans l'intérieur des » terres; leur poids est communément de 400℔ et souvent davantage. » (Bajon, *Mémoires sur Cayenne*, tome 1, page 216.)

« Il existe au Muséum d'histoire naturelle deux Tapirs différens, l'un noir » et l'autre roux : celui-là est toujours plus gros et pèse 500℔. Quoiqu'ils

Il y avait peut-être quelque sujet de s'étonner qu'un genre si bien tranché, si nombreux en individus, et répandu sur une si vaste étendue de pays, fût ainsi borné à une seule espèce. Les plus grands pachydermes en comptaient au moins deux par genre, et ceux de taille moyenne en présentaient bien davantage.

Mais si l'on ne se bornait pas aux espèces vivantes, si l'on envisageait à leur tour ces animaux d'une autre époque, dont les admirables travaux de M. le baron Cuvier nous ont révélé l'existence, l'anomalie devenait bien autrement frappante. La famille des *palæotherium*, si voisine de celle des Tapirs par tout l'ensemble de ses caractères, présentait jusqu'à onze espèces.

Enfin, deux naturalistes dont les sciences déploreront long-temps la perte, MM. Diard et Duvaucel, vinrent nous apprendre que la famille du Tapir ne s'écartait point autant qu'on l'avait cru de la règle générale, et qu'on en avait trouvé dans l'Inde une seconde espèce (1). Je viens moi-même en faire connaître une troisième, que j'ai découverte dans les hautes régions de la Cordillère des Andes.

Bien long-temps avant de connaître d'une manière certaine cette seconde espèce de Tapir américain, j'avais été conduit à en soupçonner l'existence, moins, je l'avoue, par des considérations générales, que sur la foi des vieux chroniqueurs espagnols. Plusieurs de ces écrivains en effet donnent au Tapir un poil épais et d'un brun ap-

» présentent quelques autres différences on ne peut assurer si ce sont deux » espèces distinctes. » (*Bulletin de la Soc. philom.*, tome I, page 96, extrait de la communication de M. Geoffroy.)

(1) Les observations des naturalistes anglais sur le Tapir indien n'ont été connues en France que par les communications de MM. Diard et Duvaucel. Les vagues indications données par Marsden (*History of Sumatra*) sur le cheval de rivière des Malais, et celles qu'on trouve dans les transactions de la Société de Batavia (année 1799), ne suffisaient pas pour faire reconnaître un Tapir.

prochant du noir, caractères qui ne conviennent point au Tapir des naturalistes modernes, à celui que j'avais vu moi-même dans les plaines et les grandes vallées peu élevées au-dessus du niveau de la mer.

Je crus pendant quelque temps que cet animal pouvait, comme le chien indigène, le couguar, le coati brun, exister à diverses hauteurs, et que le séjour dans les régions froides de la Cordillère expliquait suffisamment le rembrunissement de la couleur et la plus grande épaisseur de la fourrure; mais plus tard, lorsque je levai la carte de la province de Mariquita, ayant eu à parcourir pendant six mois les forêts qui recouvrent la pente orientale de la Cordillère moyenne, je remarquai que dès que je m'élevais au-dessus de 5 à 600 mètres, je ne trouvais plus les sentiers frayés par les Tapirs: plus de foulées, plus de fumées. Il était évident que ces animaux ne montaient pas jusque là, et si l'on en retrouvait sur les sommets de la Cordillère, ils devaient appartenir à une espèce nouvelle. Il n'y avait rien dans cette supposition qui répugnât à ce que j'observais journellement, et les cerfs m'offraient un exemple tout semblable.

Je savais qu'un Tapir avait été tué dans la même Cordillère à une très grande hauteur, sur le *Paramo* de *Quindiù*. A la vérité, ce pouvait être un individu égaré, lancé par des chasseurs et écarté de son canton. Mais lorsque je traversai moi-même cette montagne pour me rendre d'Ibagué à Cartago, dans la vallée du Cauca, je vis sur le sommet de nombreuses traces de Tapirs; j'en trouvai de même à mon retour; et j'appris des porteurs (*cargueros*) qui fréquentent ce chemin, qu'ils voyaient souvent de ces animaux, et toujours dans les mêmes parages, c'est-à-dire dans les parties les plus élevées de la montagne. Leurs descriptions s'accordaient avec celles qu'on m'avait faites pré-

cédemment, et avec une des indications de Gomara, etc. Je ne doutai plus dès lors de l'existence d'une espèce nouvelle; mais les efforts que je fis pour me la procurer restèrent long-temps sans succès.

L'an passé, me trouvant à Bogota, j'appris que deux Tapirs avaient été tués à quelques lieues de cette ville, dans le *Paramo de Suma-Paz*, plus élevé encore que celui de *Quindiù;* je partis sur-le-champ, et favorisé par une circonstance toute particulière (1), j'arrivai assez à temps pour les voir encore entiers.

Je reconnus au premier coup d'œil l'animal que m'avaient décrit les *cargueros :* c'était une espèce nouvelle et nettement séparée de celle du Tapir commun.

Les individus que j'avais sous les yeux étaient deux mâles, l'un à peine adulte, l'autre déjà assez vieux. Ce dernier avait les dents usées, et même cariées en plusieurs points; il était d'un sixième environ plus grand que l'autre. A la taille près, ces deux animaux étaient parfaitement semblables.

J'aurais désiré en faire transporter un à Bogota pour pouvoir le décrire à loisir, mais on refusa de me les vendre. Ainsi, je dus me contenter d'en faire sur place une description abrégée, et d'en prendre au crayon un simple trait. Cependant j'obtins la tête et les pieds du plus grand (2), et le lendemain, à l'aide de ces pièces, je pus

(1) C'est un usage général dans la Nouvelle-Grenade, qu'à l'octave de la Fête-Dieu on dresse devant l'église principale une sorte de bosquet dans lequel on place des oiseaux à couleurs brillantes, des animaux remarquables par leur grosseur ou par quelque monstruosité, des bêtes fauves mortes ou vivantes. Dans les villages, les chasseurs se mettent en quête long-temps d'avance, et chaque paroisse cherche à surpasser les autres dans cette exhibition. C'est une excellente occasion de voir des animaux rares; et dans l'espace de deux mois que durent les octaves, on peut visiter un grand nombre de villages.

(2) Ces pièces que j'ai rapportées en France font maintenant partie de la collection du Muséum d'histoire naturelle.

terminer ma première esquisse. C'est la figure que j'ai l'honneur de mettre sous les yeux de l'Académie : elle est faite au dixième de la grandeur naturelle. (*Voy.* pl. I, fig. 1.)

Afin de reproduire plus exactement le profil de la tête, je me suis servi, pour en déterminer le contour, de la *camera lucida* de Wollaston.

On voit que cette tête diffère de celle des Tapirs communs par l'ensemble des lignes, aussi bien que par les détails : le mufle est de forme un peu différente, et la trompe ne présente point des deux côtés ces rides qui montrent que l'animal la tient habituellement contractée; le menton a une tache blanche qui se prolonge à l'angle de la bouche et revient jusqu'à la moitié de la lèvre supérieure; l'oreille manque du liseré blanc qu'elle présente dans le Tapir commun (1). On ne voit point non plus cette crête si remarquable qui commence sur le front à la hauteur des yeux et se prolonge vers le garrot. Le cou de la nouvelle espèce est parfaitement rond, et les poils n'y ont, sur

(1) On voit sur la tête représentée de face qu'une des oreilles est déchirée. La blessure était ancienne et provenait sans doute des combats que les mâles se livrent dans le temps du rut. Il paraît que le Tapir en colère cherche plutôt à mordre qu'à frapper, et que quand il frappe, c'est toujours avec les pieds de devant, comme font les cerfs, mais avec beaucoup plus de force. La manière dont Oviedo dit qu'il se défend contre les chiens m'a été confirmée par les cicatrices que j'ai vues à ces animaux, et par le témoignage unanime des chasseurs.

Le Tapir n'est pas le seul animal qui cherche à gagner l'eau quand il est poursuivi : notre cerf d'Europe et plusieurs autres animaux d'Amérique, ainsi que l'a remarqué Bajon, ont à peu près la même habitude; mais presque tous auparavant se laissent long-temps chasser; le Tapir, au contraire, dès qu'on l'a fait lever, court vers le ruisseau ou l'étang le plus voisin; une fois là, s'il est serré de près, il se retourne et fait tête aux chiens. Dans l'eau, il trouve bien plus d'avantage que sur la terre; car, quand il est plongé seulement jusqu'au poitrail, les plus grands chiens sont déjà à la nage; ils ne

la ligne médiane, ni plus de longueur que dans les autres parties, ni une direction différente. Le poil par-tout le corps est très épais, long, d'un brun noirâtre, plus foncé à la pointe qu'à la racine, et il donne à la robe cette couleur qu'on nomme *zain* chez les chevaux.

Sur la croupe, dans la région correspondante à la fosse iliaque externe, on voit de chaque côté une place nue, large deux fois comme la paume de la main. Cette place n'est pas calleuse. Le jeune la présentait aussi symétrique que le vieux et d'une grandeur proportionnée.

Au-dessus de la division des doigts on voit, comme dans l'espèce commune, une raie blanche dégarnie de poils.

La comparaison des caractères extérieurs ne sépare point encore aussi nettement les deux espèces de Tapir que le fait la comparaison des têtes osseuses. Afin de mieux faire ressortir les différences, j'ai dessiné la tête du Tapir nouveau sous trois aspects différens (*voy.* pl. II), et j'ai représenté de la même manière les deux têtes des espèces de Cayenne et de Sumatra, d'après les pièces que renferme la galerie d'anatomie comparée. (*Voy.* pl. III.)

Lorsque je présentai cette tête à M. le baron Cuvier, il fut aussitôt frappé de la ressemblance qu'elle offre avec celle du palæotherium. Il a bien voulu mettre à ma disposition les précieux fragmens qui existent dans la belle collection d'animaux fossiles qu'il a formée, et j'offre ici le dessin d'une tête entière de cet animal. J'ai suppléé, à l'aide d'une

---

peuvent donc approcher de lui que progressivement, sans se lancer; ils ne peuvent reculer pour éviter une morsure, mais ils sont obligés de se retourner, ce qui entraîne une grande perte de temps. Le Tapir peut ainsi résister à plusieurs ennemis à la fois. Élevé au-dessus d'eux, il les saisit facilement à la nuque; puis, les secouant brusquement, il les étrangle ou tout au moins il garde entre ses dents un lambeau de leur peau.

seconde pièce, à ce qui manquait au morceau le plus complet; mais de peur d'induire en erreur par quelque combinaison maladroite, j'ai indiqué par des lignes ponctuées les parties que j'ai ainsi rétablies. (*Voy.* pl. III, fig. 4.)

On voit que sous le rapport de la grandeur, la tête du nouveau Tapir se rapproche beaucoup de celle du palæotherium. Elle s'en rapproche aussi par l'ensemble des lignes, et si l'on suppose pour un instant que, dans ce dernier animal, les barres s'allongent par un transport en avant de la partie antérieure des mâchoires, la ressemblance, au premier coup d'œil, sera complète.

Comparée aux têtes des deux autres Tapirs, la nouvelle ressemble plus à l'espèce de Sumatra qu'à celle de Cayenne: cette ressemblance se montre surtout dans la direction du front, dans sa largeur, dans le défaut de saillie de la crête bi-pariétale, dans la dimension des os du nez, enfin, dans la forme de la mâchoire inférieure, dont le bord inférieur est droit dans l'un comme dans l'autre, tandis que dans le Tapir de Cayenne il est fortement arqué.

Si l'on ne jugeait que d'après les dimensions de la tête, on croirait que la nouvelle espèce de Tapir américain est d'une taille bien inférieure à l'ancienne: elle est réellement un peu plus petite, mais pas tant qu'on serait porté à le supposer. L'individu que j'ai représenté avait de longueur, depuis l'extrémité du museau jusqu'à la pointe de la queue, 5 pieds 6 pouces et demi. Debout, il devait avoir, du garrot jusqu'à terre, 2 pieds 9 pouces; les jambes de devant avaient, de longueur, 1 pied 4 pouces à partir du coude: elles étaient très fortes, et à leur partie supérieure, elles n'avaient pas moins de 16 pouces de contour. Les jambes de derrière, un peu plus longues, étaient beaucoup plus grêles. L'articulation tibio-tarsienne permettait aux deux

os articulés de venir exactement dans le prolongement l'un de l'autre. Je ne mesurai point la grosseur du corps: pour faciliter le transport de l'animal de la montagne au village, on l'avait vidé sur place, et tout l'abdomen et même le thorax, étaient affaissés. Ainsi, sans viscères, l'animal pesait encore de 240 à 250 livres. Je regrettais de ne pouvoir examiner l'estomac afin de voir de quoi cet animal se nourrit sur les hauteurs qu'il habite; un des chasseurs me tira de peine et me dit que lorsqu'il les avait aperçus ils étaient occupés à manger du *chusque* (*Nastus chusque*. Kunth), sorte de bambou dont on trouve une espèce à de très grandes hauteurs; il m'assura aussi que ces animaux mangeaient du *fraylejon* (*espeletia*); c'est une plante que le gros et menu bétail, les chevaux, mulets et ânes, rebutent à cause de la grande quantité de résine qu'elle contient; les cerfs de la montagne eux-mêmes n'y touchent pas; mais il n'est pas surprenant que le Tapir en mange: c'est un animal très glouton et d'un goût qui n'est rien moins que délicat. Ceux qu'on a gardés dans diverses ménageries mangeaient tout ce qu'ils rencontraient, et jusqu'à leurs excrémens. On peut à la vérité ne voir là qu'une dépravation d'habitudes produite par la captivité; mais à l'état de liberté même, ils paraissent être d'une gloutonnerie aveugle, et ceux que l'on tue à la chasse ont souvent dans l'estomac des morceaux de bois, de petites pierres et quelquefois jusqu'à des os.

Le père Simon, dans ses *Noticias historiales de Tierra-Firme*, a consigné ce fait: « Le Tapir, dit-il, a deux » estomacs, un dans lequel se trouvent ses alimens, » l'autre dans lequel il n'y a jamais que des bois pour- » ris. Jusqu'à présent, ajoute-t-il, on ne connaît pas » l'utilité de cette disposition; mais il faut bien qu'elle

» en ait une, car la nature ne fait rien de superflu » (1).

Quelquefois, en effet, ces corps auxquels le pylore refuse le passage, déterminent une dilatation partielle de l'estomac et finissent par être logés dans une sorte de poche; parfois même on trouve un second rétrécissement, et alors l'estomac semble divisé en trois. Buffon pensa que c'était quelque apparence semblable qui avait causé l'erreur de Bajon, et lui avait fait dire que l'animal était un ruminant; nous avons vu que l'erreur avait une tout autre origine.

On sait que dans l'espèce du Tapir commun le pelage de la femelle offre beaucoup de poils blancs mêlés à ceux de couleur obscure; j'ai vu même les poils blancs si nombreux, que lorsque les autres étaient roux, la robe avait la couleur qui dans les chevaux est nommée *rouan clair*. J'aurais voulu savoir si dans le Tapir des montagnes la même chose a lieu, mais les chasseurs ne purent jamais s'accorder sur ce point; je ne pus savoir non plus d'une manière positive si la femelle est plus grande que le mâle (2), et si le jeune porte la livrée (3). Ces deux particularités d'ailleurs se montrant chez l'espèce asiatique aussi bien que chez l'espèce commune, il est probable qu'on les trouvera également chez la troisième.

---

(1) Fr. P. Simon. *Conquistas de Tierra firme.* Cuenca, 1627, 2.e. Tab. alph., art. *Danta.* Outre les morceaux de bois, les noyaux, etc., que le Tapir a avalés, on trouve souvent dans son estomac des bezoards qui s'y sont formés lentement. Ces concrétions, que les guaranis nommaient *Mborebi ita,* furent considérées par les Espagnols comme un puissant remède contre l'épilepsie (*Mal de corazon*).

(2) Les plus grandes peaux que j'aie vues dans l'espèce commune appartenaient toutes à des femelles. Elles étaient d'une épaisseur remarquable; au dos 7 lignes, et sur les joues jusqu'à 8 et 9.

(3) On a fait dire à d'Azara, dans l'édition française, que le Tapir « porte jusqu'à sept mois la livrée du jeune chien ». D'Azara n'a pas pu dire pareille chose : il savait trop bien que le jeune chien ne porte pas de livrée. Je n'ai pu me procurer l'original espagnol; mais je crois être sûr que l'erreur vient

Il paraît que le Tapir des montagnes n'a pas tout-à-fait les mêmes habitudes que celui de l'espèce commune, qui dort tout le jour et ne sort que la nuit pour prendre sa nourriture. Ceux qui furent tués à Suma-Paz étaient occupés à manger lorsque les chasseurs les aperçurent, et il était alors près de dix heures du matin. Moi-même j'ai trouvé à neuf heures, dans le chemin du Quindiù, des fientes fumant encore, et la forme des foulées indiquait que l'animal marchait sans inquiétude, de sorte que ce n'était pas la peur qui l'avait chassé de son gîte à une heure inaccoutumée. Il est vrai que dans le dernier cas c'était vers la fin de décembre, époque qui étant celle du rut (du moins pour l'espèce commune), donne à ces animaux plus d'activité pendant le jour; mais dans l'autre cas c'était au mois de juillet.

On sent qu'une espèce qui habite seulement les sommets des hautes montagnes doit être moins nombreuse en individus que celle qui habite les plaines et les grandes vallées; mais comme la Cordillère s'étend d'un bout à l'autre de l'Amérique méridionale, il serait possible que la nouvelle espèce atteignît les mêmes parallèles que l'ancienne. Je n'ai pu rien apprendre de satisfaisant sur ce point; je l'ai trouvée dans la chaîne orientale et la chaîne moyenne entre le cinquième et le quatrième degré de lati-

---

de ce que M. Moreau de Saint-Merry n'a pas connu la valeur du mot *cachorro*. Ce mot, qui répond tout-à-fait au *catulus* des latins, dont il semble dérivé, s'applique à tous les jeunes quadrupèdes, excepté aux veaux et aux poulains, qui ont, comme en français, leur nom particulier. Le manuscrit porte probablement : « *de cachorro tiene librea* », dans le jeune âge il porte la livrée. Et le traducteur, retournant la phrase, a dit : « *tiene librea de cachorro* », il porte la livrée du jeune chien. Le mot latin *pullus*, comme nom générique, a aussi son équivalent en espagnol dans celui de *pollo*, qui sert pour désigner un oiseau dans le jeune âge. Quelquefois, pour ceux de petite taille, on se sert du mot *pichon*, qui cependant s'applique plus spécialement au pigeonneau.

tude nord, et je sais qu'on l'a vue jusque vers le deuxième. J'ai d'ailleurs des raisons pour croire qu'elle s'étend jusqu'à l'équateur. En effet, le dessin rapporté de Quito par Lacondamine, et qui servit à Buffon pour son premier article, me semble appartenir à la nouvelle espèce en même temps qu'il s'écarte de l'ancienne, 1° par l'aplatissement du front; 2° par la forme arrondie du cou et l'absence de crête cervicale; 3° par la grosseur des pieds. Quelque malhabile qu'ait pu être le dessinateur, il est difficile de supposer qu'il eût négligé d'exprimer la crête, et ce serait un singulier hasard que les principales inexactitudes eussent toutes tendu à reproduire les caractères appartenant à une autre espèce (1).

Du côté du nord la nouvelle espèce pourrait bien s'avancer jusqu'au dixième degré de latitude, du moins il me semble que c'est à celle-ci plutôt qu'à l'autre qu'appartient le Tapir noir et velu de la province de Cumana, dont Gomara parle sous le nom de *Capa*.

Quant à l'espèce commune, elle s'étend comme on le sait beaucoup plus d'un côté de l'équateur que du côté opposé. La différence cependant n'est pas aussi grande que le croyait Buffon, qui avait pris pour des Tapirs certains grands animaux bisulques vus à diverses reprises par les voyageurs sur les côtes de Patagonie et près du détroit de Magellan. Il avait été probablement induit aussi en erreur par Gomara qui applique sans raison le nom de *Danta* aux huanacos, que les compagnons de Magellan trouvèrent près du port Saint-Julien. Loin que le Tapir s'avance jusqu'à l'extrémité australe du continent, ou même qu'il atteigne le cinquantième parallèle comme les huanacos, c'est beaucoup s'il va jusqu'au trente-cinquième; mais

(1) *Voyez* planche première pour la comparaison des trois têtes n^os^ 2, 3 et 4.

au nord de la ligne équinoxiale, il s'arrête vers le douzième degré. Il est difficile de trouver pour cette singularité une explication satisfaisante. Faut-il croire, en effet, avec Buffon, que l'animal n'a pu franchir les montagnes de l'isthme de Panama? Mais la petite chaîne qui se prolonge dans cet étroit espace suit la direction générale de l'isthme au lieu de le barrer en travers, de sorte qu'en descendant la vallée de la rivière San-Juan ou celle de l'Atrato, l'animal eût pu s'acheminer de l'Amérique du sud dans l'Amérique du nord, sans avoir aucune hauteur à surmonter. Ce ne sont pas de grands cours d'eau qui ont empêché son passage, il n'en eût trouvé aucun sur son chemin qu'il ne pût aisément franchir. Ce n'est pas l'abaissement de température qui l'empêche d'arriver jusqu'à la ligne tropicale, puisque de l'autre côté il va beaucoup au-delà. Peut-être pensera-t-on qu'il ne trouve pas dans l'Amérique du nord l'espèce d'aliment qui lui convient; mais outre que la végétation à l'est et à l'ouest de l'isthme est à peu près la même, le Tapir est un animal qui s'habitue aisément aux changemens, et c'est certainement, après le cochon, celui de tous les pachydermes qui peut le mieux être dit omnivore.

Quoi qu'il en soit de la cause, voici ce que je sais sur le fait. Le Tapir est très commun dans le bas de l'Atrato, de telle sorte qu'à *Murindo* (sur la rive droite de la rivière et non loin de son embouchure) il forme une partie importante de la nourriture des gens de couleur. On le suit jusqu'au pays habités par les Indiens indépendans du Darien, et de l'autre côté de leur territoire, qui est peu étendu, il ne se rencontre déjà que rarement. On a dit, à la vérité, qu'il s'en trouvait dans des pays situés encore beaucoup plus à l'ouest: ainsi Herrera semble compter cette espèce au nombre de celles qui habitent la province de

Verapaz (1); mais outre que le témoignage de cet écrivain n'est pas d'un grand poids en histoire naturelle, il faut remarquer que le mot qu'il emploie a été appliqué dans les commencemens de la conquête à des animaux très différens de celui qui nous occupe; et quoique la description qu'il donne ne convienne qu'au Tapir, il suffit qu'on l'ait informé qu'il existait des *dantas* dans cette province pour qu'il se soit cru fondé à leur appliquer les renseignemens qu'il avait reçus sur les dantas-tapirs de l'Amérique méridionale.

Une considération qui semble beaucoup plus puissante pour prouver l'extension de cette espèce vers les régions occidentales est celle-ci, que le Tapir a un nom (celui de *Ziminche*) dans la langue des Indiens qui habitent les environs de Palenque (lat. N. 17° 20′ long. O. 94°), et qu'il en a même un, celui de Tlacaxolotl, dans le langage des Mexicains. Mais il ne faut pas oublier qu'avant l'arrivée des Espagnols, ces peuples avaient des notions sur les productions de pays souvent très éloignés du leur; le cacique de *Cheapes*, au Darien, connaissait les *Llamas* du Pérou, et il n'y aurait rien d'étrange à ce que dans certaines provinces du Mexique et de Guatimala on connût de même des animaux de la Nouvelle-Andalousie.

Si l'on pouvait former quelque conjecture relativement à l'espèce de Tapir qui a fourni des traits à Hernandez pour la description de son monstrueux Tlacaxolotl, on croirait que c'est la nouvelle plutôt que l'ancienne.

Dans les pays où les deux Tapirs se rencontrent à la fois, ils ne paraissent pas avoir été distingués par les chasseurs qui, cependant, en général, notent les moindres

(1) Herrera. *Hist. gén. de las Indias occid.* Déc. IV, lib. X, cap. XII, § 3, et *Descrip. de las Ind. occid.*, cap. XII.

différences dans les animaux qu'ils poursuivent habituellement, et pèchent bien plus par excès que par défaut, en établissant des espèces (1). Ils leur donnent indifféremment à l'un et à l'autre le nom de *danta*, et ce nom est celui par lequel l'espèce commune est généralement désignée dans tous les pays où l'on parle espagnol.

En m'occupant de l'origine de ce nom, j'ai vu qu'il se rattache à un système de nomenclature singulier, et sur lequel je crois devoir appeler l'attention, parce qu'il a induit en erreur plus d'un écrivain européen, et qu'il a fait faire aux naturalistes voyageurs beaucoup de recherches dans une fausse direction.

Lorsque les Espagnols arrivèrent en Amérique, ils y trouvèrent une nature entièrement nouvelle, et, comme Adam, ils eurent à nommer *toutes les bêtes des champs et tous les oiseaux des cieux*. Dans l'impossibilité d'embrasser à la fois tant d'objets, ils durent écarter d'abord tous ceux qui n'étaient pas pour eux d'un intérêt immédiat. Ainsi les oiseaux trop petits pour être mangés furent tous réunis, confondus sous le nom vague de *paxaritos* (2); tous les insectes à élytres écailleuses furent des *cucarrones, cucarachas ;* ceux à ailes transparentes, des mouches, *moscas, moscos, mosquitos, moscarrones*.

Quant aux animaux, ou nuisibles ou utiles, comme on avait fréquemment à s'en occuper, il fut nécessaire de les désigner d'une manière plus spéciale. Les conquérans ne pouvaient guère adopter les noms indigènes, qui, en raison

(1) Ils comptent, par exemple, jusqu'à cinq espèces de *pecaris*. Je ne sais pas s'ils ont raison; mais je suis sûr au moins qu'il existe une troisième espèce, que j'ai vue et dessinée.

(2) Ce mot *paxarito* ou *paxaro*, bien qu'évidemment dérivé de *passer*, ne veut pas dire passereau, mais s'applique à tous les oiseaux de petite et de moyenne taille.

de la multiplicité des dialectes, variaient d'une province à l'autre, et le besoin d'une nomenclature commune les conduisit tout naturellement à transporter aux espèces américaines des noms européens; dans l'application qu'ils en firent, ils ne furent pas guidés, comme on aurait pu s'y attendre, par des ressemblances de forme, de taille ou de couleur; de telles ressemblances ne leur importaient guère : ils ne considéraient toutes ces espèces que sous le rapport de l'utilité dont elles étaient pour eux, ou des dommages qu'elles pouvaient leur causer, et ainsi ils leur donnèrent le nom des animaux qui en Espagne rendaient des services semblables ou nuisaient de la même manière.

On trouve, par exemple, en Amérique, pour une foule de quadrupèdes, le nom de *zorro* accompagné d'une épithète qu'on néglige encore bien souvent : *zorro gatuno*, *perruno*, *collarejo*, *zorro hediondo* ou *zorrilla* (1). Peu im-

(1) Les noms de *zorro hediondo* et de *zorilla* s'emploient tous les deux en parlant des mouffettes, mais le premier, qui signifie renard puant, s'applique aussi aux grandes espèces de sarigues, dont l'odeur est en effet très désagréable.

Le sarigue opossum est désigné par Cieça de Léon (*Cronica del Peru, cap. XXV*) sous le nom de *chucha;* et ce mot n'est pas, comme on pourrait le croire, le nom indigène de l'animal, mais le féminin du mot espagnol *chucho*, nom générique des oiseaux de proie nocturnes; c'est qu'en effet l'opossum fait comme ceux-ci, à la faveur de l'obscurité, de sanglantes exécutions parmi les oiseaux domestiques.

Il n'y a pas trop lieu de s'étonner qu'on ait transporté à un quadrupède le nom d'un oiseau. Tous les deux viennent dans les ténèbres, on ne les voit presque jamais, et on ne les connaît guère que par leurs ravages. De là vient que quelquefois on n'a aucun nom particulier pour les désigner. J'ai souvent entendu dire dans les hameaux américains : « Nous ne pouvons ici avoir des poules, l'*animal* n'en laisse pas une en vie. » Cela se dit même en quelques parties de la France, témoin ce vers de Lafontaine :

« Dans mon pallier rien ne m'était resté :
» Depuis deux jours la bête a tout mangé. »

Comme le Tapir, lorsqu'il s'approche des habitations, est aussi le plus souvent un visiteur nocturne, on pourrait croire que le nom vague de *la gran*

portait aux colons qu'ils appartinssent aux familles des *felis*, des *canis*, des *gulo*, des *mephitis*, le chien indigène, le yaguarundi, le tayra et le mapurito, mangeaient également leurs poules, ils durent tous s'appeler des renards.

Quant aux animaux plus petits qui saignaient les poulets, les pigeons, chassaient les petits oiseaux, les souris, poursuivaient celles-ci jusque dans leurs trous, le nom se présentait naturellement : qu'ils eussent les doigts réunis ou un pouce opposable, que leur queue fût prenante ou non, velue ou dégarnie de poils, les ennemis des rats ne pouvaient être que des belettes (*comadrejas*).

Le lama ressemble plus au chameau qu'à tout autre animal de l'ancien continent; Balboa même s'y méprit quand il en vit les premières figures et se confirma par là dans l'idée qu'il était arrivé aux grandes Indes. Ajoutez à cela que les Péruviens l'employaient aussi comme une bête de somme. Cependant les Espagnols, qui dédaignèrent de l'appliquer à cet usage, n'en firent point un chameau; mais comme ils se servirent de son poil en guise de laine, ils lui donnèrent le nom de *brebis* (1). Le nom de *Llama*

---

bestia (la grande bête), qu'on lui donne en beaucoup de lieux, est relatif à cette sorte d'*incognito* qu'il se plaît d'ordinaire à garder; mais, comme nous le verrons bientôt, les mots *Danta* et *gran bestia* servaient déjà avant la découverte de l'Amérique à désigner un même animal; cela ne veut pas dire que les deux mots fussent synonymes : ils ne l'étaient pas plus dans la langue espagnole, que ne le sont, dans la langue anglaise, les mots *sheep* et *mutton*.

(1) *Oveja del peru, oveja de la tierra, carnero de la tierra.* Wafer a entendu *cornera* au lieu de *carnero*, et il a supposé que ce nom indiquait un animal cornu. Il prétend avoir vu à l'île de *Mocha* des lamas qui, sellés et bridés, portaient sur leur dos deux des hommes des plus robustes. « *These sheep are* » *so tame that we frequently used to bridle one of them, upon whose back* » *two of the lustiest Men would ride at once round the island, to drive the* » *rest to the fold.* » Il ne dit pas à la vérité leur avoir vu des cornes sur la tête, et il suppose que ces bêtes les perdent chaque année comme les cerfs, de sorte qu'elles n'en avaient point à l'époque où les flibustiers étaient à Mocha. « *They had no horns when we were there; yet we found very large*

ou *llacma*, s'est, il est vrai, conservé au Pérou; mais c'est qu'il appartenait à une langue beaucoup plus parfaite que tous les autres idiomes de l'Amérique du Sud, langue qui se parlait dans une vaste étendue de pays, et qui même a été cultivée depuis la conquête.

Je ne suivrai point dans ses détails cette nomenclature; j'espère qu'on ne se méprendra point sur le mot de système que j'ai employé. Je suis loin de croire que les noms aient été donnés d'après un plan formé d'avance, j'ai voulu dire seulement que les hommes qui les imposèrent se trouvant dans des circonstances semblables, durent être guidés par une même idée dominante. Cela posé, voyons comment ils purent être conduits à donner au Tapir le nom de *Danta*.

Quelques naturalistes ont pensé que ce mot était une altération du mot portugais *anta* (1); mais ne serait-il pas bien étrange que les Espagnols eussent été emprunter à la langue portugaise un nom pour désigner un animal dont ils avaient eu connaissance bien avant leurs voisins de la Péninsule.

» *horns much twisted in the form of a snail-shell wich we suppos'd they* » *had shed : they lay many of them scattering upon the sandy bay.* » Le traducteur français, Montirat, s'est contenté de dire : « Ses cornes sont torses comme les coquilles d'un limaçon ». C'est ce même M. de Montirat qui a contribué à faire croire à l'existence d'une nation d'Albinos au Darien. Wafer avait dit : « Il y a des gens (*people*) dans ce pays qui ont une couleur si singulière; etc.... » Et le traducteur ne comprenant pas le sens du mot *people*, l'a rendu par *peuple*.

Il existe une autre traduction moins mauvaise du livre de Wafer, c'est celle qui a été publiée avec la relation du voyage de Dampier. Du moins celle-là ne contient que les mensonges qui se trouvent dans l'original, et il y en a encore bien assez.

(1) « Les Péruviens nomment cet animal *Uagra*, les naturels de la Nou- » velle-Espagne *Beori*, ceux de la Guyane *Maipouri*; les Espagnols la grande » bête; enfin les Portugais du Brésil *Anta*, d'où sont venus les mots de *Ent*, de *Danta*, de *Anté*, employés par divers auteurs. (Sonnini, *Nouv. Dict. d'Hist. nat.*, tome XXXII, p. 452. Paris 1819.)

Les mots de *Danta* et *Anta,* auxquels il faut joindre celui d'*Ante,* existaient dans les langues espagnole et portugaise à une époque où l'existence de l'Amérique n'était pas même soupçonnée. Ils s'employaient indifféremment tous les trois en parlant de divers animaux, tels que le buffle, l'élan et d'autres grands ruminans de la côte d'Afrique dont on ne connaissait que les dépouilles qui étaient fournies par le commerce avec la côte de Guinée. Chacun de ces noms s'appliquait à tous ces quadrupèdes indistinctement, soit qu'on les trouvât dans les pays tempérés, soit qu'ils vécussent dans les régions voisines du tropique ou dans celles qui touchent le cercle polaire; mais il ne leur était donné que lorsqu'on le considérait sous un certain point de vue, c'est-à-dire comme fournissant des cuirs épais que l'art du chamoiseur transformait en *buffle* ou, comme disaient les Espagnols, en *Ante* (1).

L'art de donner aux grosses peaux la souplesse nécessaire pour les usages de la buffleterie ne fut long-temps pratiqué que dans les pays du Nord. En Suède, en Norwège et dans certaines parties de la Pologne, on préparait de cette manière des peaux d'élan qui se répandaient ensuite dans tout le reste de l'Europe, où elles se vendaient fort cher. On disait alors de l'*élan,* comme on a dit plus tard du *buffle,* lorsque les Italiens, s'étant approprié ce

(1) Le mot *Ante* s'emploie encore aujourd'hui pour désigner une peau passée un peu épaisse; mais il n'a pas tout-à-fait la même signification qu'autrefois. L'usage des armes à feu étant devenu général, le collet de buffle ne suffisait plus pour protéger la poitrine d'un homme, et il n'eut plus pour usage que de préserver les vêtemens du frottement de la cuirasse; il n'y avait pas besoin, par conséquent, qu'il eût la même épaisseur. Aussi quoiqu'on continuât à donner le nom de buffle à cette partie de l'équipement, on la fit en *daim,* et ce que depuis cette époque on a appelé daim (*gamuza,* dérivé de *gamo*, daim) est ce que dans la mégisserie française on nomme du *chamois.*

genre d'industrie, y employèrent comme matière première la peau de buffle. Au quinzième siècle, la Péninsule tirait encore ce produit du nord et le recevait par l'intermédiaire des Flamands, qui le nommaient dans leur langue *Eelendt, Elandt* et *Elant.* Les Espagnols, prenant la première syllabe du mot pour un article, dirent : *El Ant,* et, en mettant à la fin une voyelle, conformément au génie de la langue, *el ante.* Le féminin *Anta* devint quelquefois *Danta* par l'adhésion du signe du génitif.

Comme le mot flamand s'écrivait aussi avec le double *l,* on en eût pu faire *el lent* ou *el lant,* cependant je n'ai jamais vu cette forme employée par les auteurs espagnols.

A l'époque de la conquête du Nouveau-Monde, une partie nécessaire de l'équipement d'un homme de guerre était la *cuera* ou *coleto de ante* (1), ce qu'en français on nommait *collet de buffle,* bien que ce fût un pourpoint

(1) Dès le temps de Pline, la peau d'Élan était employée pour faire des corselets. « *Tarando magnitudo quæ bovi, caput majus cervino nec absimile.... tergori tanta duritia ut thoraces ex eo faciant.* » (Plin., lib. VIII, cap. 34.) Ici *Tarandus* désigne certainement l'Élan, car le Renne, auquel ce nom s'applique aussi, n'a pas la taille du bœuf ni le cuir remarquablement dur ou épais. On a pris beaucoup de peine pour déterminer à qui du Renne ou de l'Élan appartient le nom de *Tarandus,* à qui le nom d'*Alces* et celui de *Machlis* (puisque, depuis Gesner, on admet généralement que ce dernier mot est une altération du mot *Alces*). Pour arriver à une solution satisfaisante on devait d'abord préciser la question. Ne veut-on en effet que savoir à quels noms germaniques correspondent les noms employés par le naturaliste romain, on le peut jusqu'à un certain point : ainsi, M. Cuvier a fait voir que le mot *Tarandus* (écrit par Élien Tharandus) est assez fidèlement représenté par la réunion de ces trois mots *The Rein-deer* (le Renne, *angl.*); et quant à la ressemblance entre le mot *Alces* et les mots *Elk* et *Elch,* nom de l'Élan dans plusieurs langues du nord, elle est assez évidente. Mais si l'on demande quel animal est le *Tarandus* de Pline et quel est son *Alces,* dès lors il n'y a plus de réponse possible, car sous chaque nom, Pline a groupé des renseignemens qui se rapportaient à des animaux différens. « *Hoc etiam verisimile,* dit Gesner à cette occasion, *in unam feram ab imperitis relata quæ ad diversas pertinebant, vel contrà interdum.* » Les renseignemens dont Pline fit usage, étaient sans doute pour la plupart relatifs aux deux cerfs à bois palmés qui se trou-

complet, et que par abréviation on nommait encore plus souvent un *buffle*. Quand les Espagnols pénétrèrent dans l'intérieur de l'Amérique du sud, en s'écartant du rivage de l'Atlantique, ils n'y trouvèrent plus des peuples doux et inoffensifs comme les insulaires de Guanahani, mais des hordes vaillantes exercées à la guerre, et dont quelques-unes connaissaient jusqu'à l'art des fortifications. Dans plusieurs de ces tribus les guerriers faisaient usage

---

vent dans la presqu'île scandinave ; mais quelques-uns, à ce qu'il me semble, concernaient un animal appartenant à une autre famille, et habitant un pays un peu plus à l'est.

Cet animal, auquel j'appliquerai ici le nom de Machlis (sans prétendre d'ailleurs que ce nom ressemble à celui qu'il portait dans son pays natal), est le *Saïga*, Antilope, qui, se trouvant par grandes troupes dans les plaines de la Pologne, a bien pu être connu dans la presqu'île scandinave, quoiqu'il n'eût jamais été vu en Italie. « *Item notam* (et non pas *natam*, comme le portent les nouvelles éditions) *in Scandinaviæ insulâ nec unquam visam in hoc orbe, multis tamen narratam machlin, haud dissimilem illi* (à l'*alces*) *sed nullo suffraginum flexu..... Labrum ei superius prægrande : ob id retrograditur in pascendo ne in priora tendens involvatur.* » (Pline, lib. VIII, cap. 16.)

On ne trouvera rien dans ce passage qui ne puisse convenir à une antilope aussi bien qu'à un cerf, la forme des cornes n'étant pas indiquée. Pline dit, à la vérité, qu'il y a de la ressemblance entre le *Machlis* et l'*Alces*, c'est qu'en effet il y a un trait commun à tous les deux, et qu'ils ne partagent avec aucun autre ruminant, c'est le développement excessif du museau. Le volume et la rigidité de cette partie, chez le Saïga, l'oblige, ainsi que l'ont constaté les observateurs modernes, à paître en reculant : « *Retrograditur in pascendo* ».

De ce qu'on trouvait un trait commun entre l'Élan et le Saïga, il était presque certain qu'on en supposerait d'autres, et en effet ce que César avait dit de la rigidité des jambes de l'Alces, est appliqué par Pline au Machlis. En revanche, ce qu'il eût dû noter comme appartenant à ce dernier animal, le changement de couleur, il l'attribue, en le rendant incroyable, au Tarandus. La robe du Renne, à la vérité, prend bien une teinte un peu différente selon les saisons, mais cela est loin d'être aussi frappant que chez le Saïga, dont le pelage fauve en été, est dans l'hiver d'un gris presque blanc.

Les naturalistes ont cru reconnaître le Saïga dans le *Colus* de Strabon; quand même l'identité serait bien démontrée, il ne s'ensuivrait pas que Pline n'eût pu emprunter à l'histoire de cette antilope, quelques traits pour sa description du *Machlis*.

d'armes défensives. Ils employaient le cuir du Tapir, au Brésil, pour faire des boucliers (1) comme on en avait déjà vu parmi les nègres du Sénégal (2) et au Paraguay, pour faire des heaumes (3); enfin dans certaines provinces de la Nouvelle-Grenade ils fabriquaient avec cette peau une sorte de dalmatique à l'épreuve des flèches et des javelots (4); c'était là leur buffle, et il fut naturel de donner à l'animal dont la peau était ainsi employée, le nom d'*Ante* ou *Danta*.

Buffon a bien vu que ces noms, avant d'être appliqués au Tapir, avaient servi à désigner des quadrupèdes de l'ancien continent, mais il n'a pas su à quelle espèce ils

---

(1) « Il se trouve davantage en l'Amérique grande quantité de ces bestes » qu'ils nomment *Tapihire*, désirées, et recommandables pour leur diffor- » mité. Aussi les sauvages les poursuivent à la chasse, non-seulement pour la » chair, qui est très bonne, mais aussi pour les peaux, dont ces sauvages font » boucliers, desquels ils usent en guerre; et est la peau de ceste beste si forte, » qu'à grande difficulté un trait d'arbaleste la pourra percer. » (Thevet, *Singul. de la France antarct.*, chap. XLIX.)

« Au reste, ils estiment merveilleusement cet animal à cause de sa peau: » car quand ils l'escorchent, coupant en rond tout le cuir du dos, après qu'il » est bien sec, ils en font des rondelles aussi grandes que le fond d'un » moyen tonneau, lesquelles leur servent à soutenir les coups de flesches de » leurs ennemis quand ils vont en guerre. Et de fait ceste peau ainsi seichée » et accoustrée, est si dure que je ne crois pas qu'il y ait flesche, tant roi- » dement décochée fust-elle qui la sceut percer. » (Lery, *Voyage fait en la terre du Brésil*, chap. X.)

(2) « *Voyez* plus loin, page 616, note 1, un passage de la relation de Ca- » damosto sur les rondaches dont les habitans du Sénégal faisaient usage » lorsque les Portugais visitèrent pour la première fois leur pays. »

(3) Martin del Barco Centenera, dans sa relation rimée de la *Conquête du Rio de la Plata*, dit, en parlant d'un charrua, qui vint en canot défier les Espagnols :

« *El salvage se estira i en dereça*
» *Y un escudo grandissimo ha embraçado.*
» *Por ielmo un cuero de Anta en la cabeça..,* ».

(*La Argentina*, cant. XIII, str. XVI.)

(4) P. Simon, *Conquist. de Tierra-Firme*, 2e partie, inédite.

avaient appartenu originairement, ni pour quels motifs ils avaient été transportés au pachyderme américain. Suivant lui, *Ant* ou *Lant* est le nom africain du *Zebu* (1). Si on l'a donné ensuite au Tapir, c'est seulement parce que la taille de cet animal est la même à peu près que celle du petit bœuf bossu (2). Buffon n'a pas remarqué que le mot Lant, qui apparaît pour la première fois chez

(1) « J'ai reconnu, en faisant de nouvelles recherches, que ce petit bœuf, » auquel j'ai donné le nom de Zebu, est vraisemblablement le même animal » qui se nomme *Lant* ou *Danta* en Numidie et dans quelques autres provinces » septentrionales de l'Afrique où il est très commun; et enfin que ce même » nom *Dant*, qui ne devait appartenir qu'à l'animal dont il est ici question, » a été transporté d'Afrique en Amérique à un autre animal qui ne ressemble » à celui-ci que par la grandeur du corps; et qui est d'une tout autre » espèce; ce Dant d'Amérique est le Tapir ou Maipouri. » (Buffon, tome XI, page 620.)

Pour arriver à cette conclusion, que *Dant* est le nom africain du Zebu, Buffon est obligé, d'une part, de reconnaître un bœuf dans l'animal décrit par Belon (*Observ.*, f°. 118 et 119), et de l'autre d'admettre l'identité entre cet animal et le Dant de Jean Léon et Marmol.

Pour établir le premier point, Buffon est forcé d'exagérer certains traits et d'en dissimuler d'autres; ainsi il suppose une bosse lorsque Belon dit seulement que les épaules sont quelque peu élevées et bien fournies; et il ne tient aucun compte d'un caractère sur lequel l'auteur avait insisté, « les cornes noires et beaucoup cochées comme celles d'une gazelle ».

Relativement au second point, on peut remarquer, 1°. que l'animal vu par Belon avait été « apporté au Caire du pays d'Azamie » (Inde au-delà du Gange), tandis que celui de Marmol et de Jean Léon habite les régions sablonneuses situées à l'ouest et au sud de l'Égypte. 2°. Que le premier a des formes pesantes comme celles du bœuf, « le col gros et court, les jambes trappes et courtes », le poil brun ou fauve, tandis que Léon dit que les jambes du Lant sont plus élégantes que celles du bœuf, et que son pelage est presque blanc; il ajoute que les ongles du pied sont très noirs, particularité que Belon n'eût pas manqué de signaler si elle eût existé dans l'individu qu'il décrivait.

(2) Oviedo, qui devait bien savoir quelle raison avaient eue ses compagnons pour appliquer au Tapir le nom de *Danta*, dit expressément que c'est à cause de l'épaisseur du cuir : « *Los christianos llaman danta a un animal que los » indios le nombran Beori, a causa que los cueros de estos animales son muy » gruesos, pero no son dantas.* » (Sumario, etc., cap. XII.)

des écrivains du seizième siècle, Léon l'Africain et Marmol (1), désigne un animal des Régences barbaresques, du désert de Barca et de la Nubie, c'est-à-dire des provinces voisines de la Méditerranée et de la Mer Rouge; tandis que dès le milieu du siècle précédent, le nom d'*Anta* est appliqué par les Portugais à un ruminant différent probablement du premier, et qu'ils rencontrent sur les côtes de l'Océan méridional. Il y a même lieu de penser qu'à cette époque et beaucoup plus tard encore, le

(1) Jean Léon ne dit rien qui puisse faire présumer que les mots *Lant* et *Dant* soient ceux qu'emploient les indigènes en parlant de l'animal. En général, pour toutes ses descriptions, il ne fait usage des noms africains que lorsque la langue italienne ne lui en fournit pas d'à peu près équivalens; or il trouvait, dans des livres qui avaient alors très grand cours en Italie, le nom d'*Anta* ou *Danta*, donné à une antilope de la côte orientale d'Afrique, dont la peau servait à faire des rondâches, il était assez naturel qu'il l'appliquât à une antilope de la côte septentrionale dont les dépouilles étaient recherchées pour le même usage. « *Del cuoi di questo si soglion fare alcune targhe fortissime per modo che altra cosa non le puo passare, che un schioppo, ma molto care si vendono.* » (L'Afrique de Jean Léon, dans Ramusio, tome I, page 92.)

Le paragraphe porte pour titre *Lant* ou *Dant*, et ni l'un ni l'autre de ces mots n'est répété dans le cours de la description. Comme l'ouvrage ne fut publié qu'après la mort de l'auteur, et sur un manuscrit assez peu lisible, on pourrait ne voir là que deux lectures différentes d'un mot mal écrit dans l'original.

Marmol, il est vrai, dit expressément que l'un des deux noms est africain, mais Marmol est un écrivain très peu scrupuleux; copiant sans cesse Jean Léon, qu'il ne nomme jamais, il donne quelquefois des développemens par lesquels le sens du texte original est complètement perverti. S'il n'a pas reconnu le mot Lant pour un mot employé par les européens, il n'aura pas hésité à le donner comme africain.

Marmol écrit *Lamt* au lieu de *Lant*. Si ce n'est pas une faute d'impression, et si le mot est vraiment usité en Afrique, on peut le supposer dérivé de l'arabe *Lamad* (*humilitas, demissio sui*); dans ce cas il ferait allusion à une habitude très remarquable qu'on trouve chez plusieurs espèces d'Antilopes, celle de se jeter à genoux lorsqu'un homme approche. Hunter, en effet, observant cette habitude chez le nil-gau, y vit d'abord un signe d'humilité; il apprit plus tard que c'était réellement une menace, une préparation hostile.

mot ne s'appliquait pas à la bête, mais seulement à sa peau (1) qui était devenue un objet de trafic assez important.

En appliquant le nom d'*Anta* ou *Danta* au Tapir, les Espagnols et les Portugais voulurent assimiler cet animal, non à l'Antilope africaine, mais à l'Anta qui leur était le premier connu, à l'*Élan*. Ce qui le prouve sans réplique, c'est que lorsqu'ils ont écrit en latin, c'est sous le nom d'*Alce* qu'ils ont désigné le Tapir (2).

Le mot *Élan* a été quelquefois employé chez nous comme terme générique pour les cuirs épais. De là vient que le *Canna*, dont la peau sert à faire des ceintures, a reçu de nos réfugiés établis au Cap le nom d'Élan (3). Le mot *Buffle* étant devenu plus tard le terme ordinaire, ceux de nos Français qui passèrent à Surinam nommèrent *buffle* le Tapir (4).

---

(1) Cadamasto dit, en parlant des habitans de la côte comprise entre l'embouchure du Sénégal et le Cap Blanc, « *Intende ti che loro non hanno arme de vestirse per difesa, ne hanno otra difesa che la tarcha che è de un coro che se chiama Anta che è durissimo* ».

Dans la relation du voyage de Lopez au Congo, publiée en 1591, il semble aussi que c'est aux cuirs et non aux animaux qui les fournissent que s'applique le mot Dante; du moins c'est dans ce sens que ce passage est entendu par un traducteur contemporain. Le texte italien dit : « *Le pelli loro sono molto pregiate pero che si portano in Portogallo e d'indi in Lamagna per acconciarsi, e l'appelano Dante* ». (*Relat. du roy. de Congo*, Rome, 1591, page 31.) Voici maintenant la traduction de Purchas. « *Their skins are of great estimation, and therefore they are carried into Portugall and from thence into Germanie to be dressed and* THEN *they are called Dantas* ». (Tome I, lib. VII, chap. IV.)

(2) Laët (*Novus orbis*, lib. XV, cap. V).

(3) Kolbe, tome 3, page 36 et suiv.

(4) « Dans nos colonies américaines on donne le nom de Buffles aux Ta-» pirs, et je ne sais pourquoi : ils ne ressemblent en rien aux animaux qui » portent ce nom. » (Allamand. *Additions à l'article Tapir*, édition d'Amst., tome XV, page 70.)

La corne du pied de l'Élan passait dans le quatorzième et le quinzième siècle pour avoir des vertus merveilleuses contre l'épilepsie, et l'incertitude qui régnait, du moins dans le midi de l'Europe, relativement à l'origine de cette amulette, contribuait encore à la faire tenir en plus haute estime. Ce fut seulement dans le seizième siècle qu'on apprit en Espagne que la grande bête (*la Gran Bestia, Animal magnum*), qui fournissait ce remède à la médecine, fournissait aussi les peaux que mettaient en œuvre les buffletiers (1). A cette époque on venait de découvrir dans le Nouveau-Monde un quadrupède dont la peau pouvait s'appliquer aux mêmes usages, et qui pour cela avait reçu le nom d'Élan (*Anta*), on ne tarda pas à attribuer à l'ongle de l'*Anta* américain les mêmes vertus qu'on supposait à celui de l'*Anta* scandinave (2). Aussi le nom de *gran bestia* servit-il bientôt à désigner le Tapir; mais ce nom s'employait surtout quand on le considérait sous le point de vue médical; ainsi le P. Gumilla, dans la des-

(1) *Voyez :* André Bacci; *Tractatus de magnâ bestiâ Alce, ejusque proprietatibus epilepsiæ resistentibus.* Stuttgard, 1568. — Menabeni; *Tractatus de magno animali quod Alcen nonnulli vocant, germani verò Eelend, et de ipsius partium in re medicâ facultatibus.* Cologne, 1581, etc. Gesner parle des propriétés attribuées à l'ongle de l'Elan, et il en parle avec sa raison accoutumée : « *Scio id non rarò profuisse; sæpiùs tamen frustrà tentatum : causam* » *alii in morbi discrimen rejiciunt, ego animi persuasionem superstitiosis* » *rebus magis minusve aut nullo modo confisam effectus rerum maximè* » *variare crediderim.* »

On en pourrait dire autant de bien d'autres remèdes qui opèrent dans les premiers temps des prodiges, et qui deviennent impuissans dès que les esprits ont cessé d'être frappés de ce qu'ils avaient d'insolite ou de mystérieux.

(2) Le P. Simon, Ruiz, Gumilla et plusieurs autres écrivains, nous apprennent que cette opinion régnait de leur temps, et l'on voit qu'eux-mêmes la partageaient; d'Azara dit qu'elle existe au Paraguay, et moi-même je l'ai trouvée en Colombie généralement établie chez les paysans, aux foyers desquels il est commun de voir suspendu un pied de Tapir.

Toute la partie merveilleuse de la Matière médicale et de l'Histoire na-

cription qu'il donne de l'animal (sous le nom d'*Ante* pour le mâle et d'*Anta* pour la femelle), dit en parlant des pieds : « Ils se terminent non en deux sabots (*pesunas*) comme ceux de la vache, mais en trois ; et ce sont les ongles fameux, communément appelés *ongles de la grand'bête*, remède justement estimé pour la merveilleuse efficacité qu'on lui a reconnue contre le mal caduc. »

L'ongle du *Canna* fut, comme celui du Tapir, supposé doué de propriétés anti-épileptiques, et par suite du même enchaînement d'idées, c'est-à-dire parce que l'animal avait reçu des Français établis au Cap le nom d'Élan, et ce nom, ainsi que nous l'avons dit, lui avait été donné à cause de l'usage qu'on faisait de sa peau dans la buffleterie.

La Condamine parle, dans son voyage à l'Amazone, du Tapir, sous le nom d'*élan* (1); il savait en effet que c'est là le mot français qui correspond au mot espagnol *Ante* ou *Anta*. Il ajoute que les Indiens du Pérou donnent à cet animal le nom de *Uagra*, mais ici il commet évidemment une erreur, puisque l'articulation *g* ne se trouve point dans la langue du Pérou. Il est probable qu'on lui a dit huaca-racu, composé de *racu*, qui désigne toute chose remarquable par sa grosseur, et de *huaca*, qui ici veut dire un monstre par excès, un animal qui a plus de doigts qu'il ne faut (2); ce nom convient très bien au Tapir qui

---

turelle, aujourd'hui rejetée en Europe, semble s'être réfugiée en Amérique. On y trouve tous les anciens contes plus ou moins modifiés. Quelquefois il y a différentes versions pour les diverses localités ; ainsi sur la Cordilière orientale, c'est un carabe qui se transforme en fougère, tandis qu'au Choco, c'est une grosse fourmi qui se change en palmier.

(1) *Relation abrégée d'un voyage fait dans l'intérieur de l'Amérique*, etc. Paris, 1745, pages 114 et 163.

(2) Le mot de *Huaca*, dans la langue du Pérou, entre dans la composition de beaucoup de noms, mais il n'y a pas toujours la même signification. En

est le plus gros quadrupède de l'Amérique méridionale, et qui au lieu d'être *bisulcus*, comme les cerfs et tous les animaux à sabot connus des Péruviens, est *trisulcus* et *quadrisulcus*, de sorte qu'il a dû leur paraître un écart de l'état normal. Il n'y a pas lieu, au reste, de s'étonner que La Condamine ait entendu *uagra* ou *huacra* pour *huaca-racu;* il a altéré exactement de la même manière le nom d'une montagne bien connue, qu'il a écrit *Cayambur* au lieu de *Cayambé-urcu* (1).

---

général, *Huaca* (prononcé sans aspiration sur le *c*) sert à désigner toute chose qui l'emporte sur celles de la même espèce, par sa grandeur ou sa bonté et aussi par le nombre de ses parties, comme une couche de deux jumeaux, un œuf à deux jaunes, etc. On nommait ainsi *Huaca-runa* l'homme qui naissait avec six doigts aux pieds ou aux mains.

Il ne faut pas confondre le mot de *Huaca* avec un autre mot que les Espagnols écrivent de la même manière, mais qui doit se prononcer avec un son guttural pour le *c*. Celui-ci signifie toute chose sacrée, une statue de divinité, un temple, un sépulcre. Comme ces sépulcres contenaient souvent des vases et des idoles en métaux précieux, les Espagnols nomment *Huaca* ou *Guaca* un trésor enfoui.

(1) La Condamine dit que les Indiens établis près de l'embouchure du Coari, un des affluens de l'Amazone, appellent les hyades ou la tête du taureau *Tapiera Rayoub*, *a* « d'un nom qui signifie aujourd'hui en leur langue, mâchoire de bœuf. Je dis aujourd'hui, ajoute-t-il, car depuis que l'on a transporté des bœufs d'Europe en Amérique, les Brésiliens et les habitans du Pérou ont appliqué à ces animaux les noms qu'ils donnaient, chacun dans leur langue, à l'*Élan*, le plus grand des quadrupèdes qu'ils connussent avant la venue des Européens. »

La Condamine, en ne faisant aucune réflexion sur l'accord de ces deux expressions : *tête du taureau* et *mâchoire de bœuf*, donne assez à entendre que les Indiens auraient emprunté aux missionnaires le nom par lequel ils désignent ce groupe d'étoiles; la chose ne me paraît pas évidente. Plusieurs constellations, en effet, avaient des noms dans les langues américaines avant l'arrivée des Européens; nous avons vu, par exemple, que dans certains dialectes du guarani, la voie lactée se nommait le *sentier du Tapir;* les *hyades* auront bien pu être appelées *mâchoire du Tapir*, d'autant mieux que la disposition en V des cinq étoiles ε, δ, γ, θ, et *Aldébaran*, rappelle très bien l'angle formé par les branches de la mâchoire inférieure chez ce pachyderme : *Maxillæ anteriùs fastigiatæ.* (Marcgr., lib. VI, cap. VI.) Je

On trouverait aussi un nom très convenable pour le Tapir, dans le mot *Huac kra*, par contraction pour *huaca kara* (cuir ou peau extraordinaire); nous rencontrons en effet une composition tout-à-fait analogue dans le nom d'où nous avons fait celui du Tapir. Ce mot, emprunté à un des dialectes du guarani, s'y présente sous plusieurs formes, telles que *Tapii* (1), *Tapiierete* (2), *Tapirous-sou* (3). *Ta* est une contraction de *Tata* ou *tatai* (contraction qui a lieu toutes les fois qu'on fait entrer dans un mot composé cet adjectif, qui signifie gros, fort, épais, résistant) et de *pi* ou *pii* signifiant peau, cuir. *Pi*, suivi d'un autre mot dans un nom composé, prend à la fin la liquide *r*, et devient, suivant les cas, *Piier*, *Piira*, *Pir*, etc. Ainsi, peau épaisse, peau dure, se dit *Pirana*, *Piraqua* et *Pirata;* mais lorsque le mot signifiant *grosse-peau*, doit désigner l'animal qui est remarquable par cette particularité, c'est-à-dire le Tapir, pour prévenir la confusion, on met l'adjectif devant le substantif, et le nom devient *Tapii*. Pour exprimer la chose plus fortement, on ajoute quelquefois le mot *été* qui signifie *par excellence*, et la liaison de ce qualificatif exigeant l'introduction de l'*r* euphonique, le mot devient *Tapiierete*.

Quelques autres animaux de l'Amérique méridionale, tels que certains petits cerfs à cornes non branchues, ont aussi la peau fort épaisse, du moins relativement à leur

---

fais cette remarque pour qu'on n'aille pas chercher là un argument en faveur d'anciennes communications entre les deux mondes. J'ajouterai d'ailleurs que le mot donné par La Condamine, comme signifiant mâchoire, ne se trouve dans aucun des dictionnaires américains imprimés ou manuscrits que j'ai pu consulter.

(1) Ruiz. (*Tesoro de la lengua guarani*, page 355.)

(2) Marcgraff. (*Hist. rerum nat. Brasil*, lib. VI, cap. VI.)

(3) Leri. (*Histoire d'un voyage fait en la terre du Brésil, etc.*, chap. X.)

taille; mais le Tapir est beaucoup plus grand qu'eux tous, et ainsi, lorsque l'on dit *le grand animal à grosse peau*, il n'y a pas lieu de se méprendre. C'est ce qu'exprime le mot *Tapiroussou* (de *oussou* grand).

Le mot *Maypouri*, dans la langue *galibi*, qui est un des dialectes du guarani, se rattache à un ordre d'idées très différent. Quand le Tapir s'approche des habitations, c'est ordinairement la nuit, de sorte que si on le rencontre on ne peut bien distinguer ses formes; dès qu'il sent qu'un homme approche, il regagne le fourré où il rentre avec grand bruit. Ces deux circonstances sont exprimées dans le nom donné à l'animal, par les sauvages de la Guyane. *Mae* (1), *mbaé*, signifie chose en général, chose indéterminée, chose dont le nom et la nature sont inconnus, et par extension, fantôme; *Puru*, veut dire bruit.

Dans le guarani du Paraguay, Tapir se dit *Mborebi*. En supposant ce nom dérivé de *mbae rabi*, il signifierait chose velue, fantôme velu, ce qui se rapprocherait du sens du mot galibi, et, comme on le verra bientôt, de celui d'un autre mot en usage parmi les Indiens de Popayan (Nouvelle-Grenade); cependant il semble plus naturel de le faire dériver de *mbo*, pied, et du verbe *raba*, séparer, disjoindre, faisant allusion à l'écartement des doigts qui a lieu lorsque le pied presse le sol, ou a la division multiple de ce pied. Le mot *mborebi* aurait ainsi pour le sens quelque analogie avec le nom péruvien *huaca racu*.

Quant au mot *Beori* (2), qu'on ne trouve dans aucune relation, hors celle d'Oviedo, peut-être faut-il n'y voir

(1) Ruiz (*Tesoro, etc.*, page 211 recto, colonne 2e).

(2) Gmelin dit, et plusieurs auteurs répètent après lui, que Laët appelle le Tapir *Beori animal*. Il est vrai que ces deux mots se trouvent ainsi accolés dans sa table des matières; de même qu'on y lit *Mandioca planta*, *Magdalena fluvius*, parce qu'après chaque nom nouveau pour le lecteur, il a soin de dire si ce mot désigne un peuple, un oiseau, une plante ou une rivière.

autre chose qu'une faute d'impression. D'Azara croit que c'est une altération du mot Mborebi, mais cela me paraît peu probable, ce dernier mot n'étant guère usité que dans les provinces australes.

Clavigero, dans une synonymie fort incomplète qu'il donne du Tapir (tome IV, page 155), présente deux noms qu'on ne rencontre dans aucun autre auteur, et ne dit point dans quelles provinces ils sont usités; ce sont les noms de *huariari* et de *sacha vacca*. Le dernier, qui doit probablement être écrit *sacha-vaca*, me paraît être de formation espagnole, et signifier vache qui fouille la terre; il a bien pu être appliqué au Tapir, qui, ne trouvant pas dans les herbes et le feuillage des arbres une nourriture assez substantielle, doit quelquefois creuser la terre avec le pied ou avec le boutoir, pour découvrir, soit certains fruits, comme ceux de la pistache terrestre (*mundubi* de Marcgr.), soit des racines succulentes, comme celles du Manioc doux et de l'Aracacha, soit des tubercules, comme ceux de la bâtate et de plusieurs pélégrines. Une belle espèce de pélégrine qui se trouve dans la Nouvelle-Grenade, en des régions que fréquente le Tapir de l'espèce commune, y est désignée sous le nom de *sacha fruto* (1), nom qui se donne d'ailleurs en d'autres lieux à une plante très différente. Le nom de vache fouilleuse, comme appliqué au Tapir, n'est pas plus impropre que celui de vache sans cornes qui fut dans

(1) Cette espèce, qui ne me paraît différer de l'*alstræmeria edulis* d'Andrew, qu'en ce qu'elle a la tige droite, offre, à peu de profondeur au-dessous de la surface du sol, plusieurs tubercules qui varient d'aspect et de consistance suivant l'âge. Au moment où ils ont acquis leur plus grand volume, ils ont la forme et la grosseur d'un œuf d'oie; la chair en est translucide, pleine d'un jus légèrement sucré; dans cet état ils se mangent crus, apaisent très bien la soif, mais sont peu nourrissans. Plus tard ils perdent de la régularité de leur forme, deviennent opaques, et alors cuits sous la cendre, ils ont le goût de la pomme de terre.

l'origine employé quelquefois, ainsi que l'atteste Oviedo.

Quant au nom de *Huari ari*, je doute qu'il désigne le Tapir. Dans les différens dialectes de la langue guarani, le mot *huari*, *guari* ou *cari*, etc., signifie *tortueux*, *qui va de travers*. On le trouve dans la composition de beaucoup des noms donnés aux porcs américains, et il fait certainement allusion à la manière dont ces animaux tordent le corps en marchant. Dans les relations des flibustiers, Dampier, Sharp, Wafer, etc., il s'applique au Pecari à mâchoire blanche, et est écrit *waree* ou *wari*. Le mot *wari carii*, employé par Laët comme étant le nom du Paresseux en certaines parties de la Guyane, rappelle l'espèce de reptation que présente l'animal lorsqu'il s'avance sur un terrain uni. La progression tortueuse du veau marin sur le rivage et ses habitudes aquatiques, sont également indiquées dans le nom caraïbe Courri tou; *Tou* signifie *mouillé*, *humide*.

Le mot de Tapir est devenu en français le nom du genre, et il faut aux espèces des noms qui les distinguent. On connaît déjà celle de l'Inde par le mot de *maiba*, qui est un de ses noms vulgaires dans le pays, et il paraît convenable de désigner également les deux espèces du nouveau continent par des noms empruntés aux idiomes américains. Ainsi, l'espèce anciennement connue peut être appelée *Tapir maypouri*. Pour la nouvelle, je propose de la nommer *Tapir pinchaque*, le mot de pinchaque étant le nom d'un animal fabuleux dont l'histoire se fonde principalement sur l'existence de notre Tapir dans une haute montagne de la Nouvelle-Grenade.

En prononçant ce mot d'*animal fabuleux*, je sens le besoin de me justifier d'entretenir l'Académie de considérations si étrangères à celles dont elle s'occupe habituellement. Mais il est pourtant vrai que cet ordre de recherches ne peut rester étranger aux sciences naturelles. Il est im-

possible de suivre dans les temps anciens l'histoire des animaux, sans avoir à chaque instant à dépouiller les faits réels des fables qui les entourent, et si nous n'avons pas à en écarter davantage, c'est que ce travail d'élimination se poursuit sans que nous nous en doutions depuis des milliers d'années.

Lorsque les sciences commencèrent à se former, l'homme supérieur ne s'adressait point, comme de nos jours, aux esprits d'un même ordre : il avait le peuple tout entier pour juge, et pour gagner la faveur publique, il fallait qu'il s'accommodât au goût dominant.

On n'aurait point tenu compte à un naturaliste de l'exactitude qu'il eût mise à décrire les animaux de son pays, chacun de ses compatriotes croyait les connaître aussi bien que lui; et s'il parlait d'animaux des pays lointains, il ne pouvait compter, pour éveiller la curiosité, que sur ce qu'ils présentaient réellement d'extraordinaire ou sur ce qu'on leur prêtait de merveilleux. On trouve en effet une foule de fables dans les anciens traités d'histoire naturelle, et encore ne savons-nous pas combien leurs auteurs eurent à en écarter dans les traditions populaires où ils puisèrent.

Les premiers historiens américains ont eu une tâche à peu près semblable, quand quelques années après la conquête, ils ont tenté de débrouiller l'histoire des peuplades indigènes, et il en a été de même des missionnaires quand ils ont voulu nous donner une description du pays et nous en faire connaître les plantes et les végétaux. On les a traités avec mépris parce que leurs relations n'étaient pas tout-à-fait exemptes de crédulité; on devait les louer plutôt de l'esprit de critique dont ils ont fait preuve en répétant si peu d'erreurs, et surtout du courage qu'il leur a fallu pour pénétrer dans ce dédale de traditions

confuses de contes grossiers, et essayer d'y démêler quelques vérités.

Je reviens au pinchaque, animal dont parlent souvent certains Indiens voisins de *Popayan*, et qui, suivant eux, existe dans les montagnes par lesquelles leur vallée est bornée du côté de l'est.

Cet animal est pour eux un objet de crainte et de respect à la fois; car mêlant à la religion chrétienne qu'ils professent, des souvenirs de leur ancienne religion, ils croient que l'âme d'un de leurs premiers chefs est passée dans le pinchaque, et pensent, quand celui-ci leur apparaît, qu'il vient avertir ses descendans d'un malheur prochain qui les menace (1).

Quand cette apparition a lieu, disent-ils, c'est à la chute du jour, ou même à la nuit close; le plus souvent sur la lisière d'un bois, dans lequel l'animal rentre bientôt avec un grand bruit. Il ne se montre point en tous lieux, et quand on le voit, c'est communément près du *Paramo* de *Polindara*, haute montagne à deux lieues du volcan de *Purace*, à huit de *Popayan*.

Les rapports des Indiens sont conformes sur tous ces points et ne diffèrent que relativement à la taille du pinchaque; les plus modérés le disent plus grand qu'un cheval, tandis que d'autres lui donnent une hauteur démesurée.

Quelques habitans de *Popayan* se persuadèrent qu'il existait réellement dans cette montagne un animal très grand, et même un érudit prononça que c'était l'*éléphant carnivore:* c'est le nom sous lequel on désigne le Masto-

(1) Dans la langue de ces Indiens, le mot *Pinchaque* ou *Panchique* (car j'ai entendu prononcer des deux manières, et je ne sais quelle est la bonne), signifie, à ce que m'ont dit des habitans de Popayan, *fantôme, spectre, loup-garou*, toute apparition surnaturelle et effrayante.

donte à dents étroites, dont on trouve en divers lieux de la Nouvelle-Grenade des ossemens et des dents; les collines pointues et parfaitement conservées de ces dents ayant fait supposer que l'animal se nourrissait de chair.

Des chasseurs résolurent d'aller à la poursuite de cet animal, et guidés par les Indiens du village le plus voisin du Paramo, ils gravirent à travers les bois dont le flanc de la montagne est couvert, et arrivèrent à la partie nue. Là, ils trouvèrent près du sommet de nombreuses foulées de 9 à 10 pouces de largeur, et, dans un endroit où il paraissait que plusieurs animaux avaient séjourné, des amas de crottes dont quelques-unes, dit-on, n'avaient pas moins de 5 pouces dans leur plus grande dimension.

Etant rentrés dans le bois vers lequel les pas semblaient se diriger, un des guides, qui s'était écarté de la troupe, entendit parmi les branches un grand bruit, qui ne pouvait provenir, disait-il, que d'un animal de taille gigantesque. Enfin, l'un des chasseurs ayant trouvé accrochée à l'écorce d'un arbre, à plus de 8 pieds de terre, une touffe de poils longs et brunâtres, jugea qu'ils avaient été laissés par un animal qui passait sous cet arbre et ne pouvait pas avoir moins de 8 à 9 pieds de haut.

On envoya à Bogota plusieurs de ces crottes qui avaient été trouvées dans le Paramo. La plus grande partie se brisa en route, cependant il en restait une entière que j'examinai avec soin; elle avait 3 pouces 2 lignes de large, sur 2 pouces 7 à 8 lignes de haut; elle était moins sphérique que celles de l'éléphant, moins anguleuse que celles du cheval, lisse, comme vernie à la surface, excepté à la partie supérieure, d'où un petit morceau semblait s'être détaché. En ce point je pus reconnaître parmi les parties qui avaient échappé à la digestion, des débris de feuilles de *fraylejon*, et des fragmens de tiges

de *chusque*, plantes qui, comme je l'ai dit, font partie de la nourriture du Tapir des montagnes.

Il est vrai que toutes les fumées de Tapir que j'avais vues jusque là étaient molles et s'écrasaient en tombant, mais Bajon dit positivement qu'à Cayenne elles ont la même consistance que celles du cheval; et pour ce qui est de leur grosseur (3 pouces de diamètre), elle n'est point disproportionnée à la taille de l'animal : celles du cochon ont souvent plus de 2 pouces.

Les foulées sans doute étaient très grandes ; mais j'ai vu, sur des terrains résistans, et humides seulement à la superficie, des empreintes très nettes qui n'avaient guère moins d'un empan, car le pied du Tapir s'élargit en pressant. Maintenant, si l'on songe que sur le sommet des montagnes, assez près même du point culminant, le terrain est imprégné d'eau, souvent tremblant comme dans les tourbières, et qu'en même temps toute la surface, à plus de 2 pouces de profondeur, est formée d'une couche intriquée de mousses et de racines de petites graminées, on concevra comment un pied déjà très grand peut laisser une trace beaucoup plus grande encore. On ne pourrait donc rien conclure de la dimension des foulées relativement à la taille de l'animal, qu'autant qu'on aurait mesuré en outre la longueur du pas, chose que ne pensa à faire aucun des chasseurs et qui les eût sans doute détrompés.

Quant au poil trouvé sur l'arbre, à huit pieds au-dessus du sol, il n'avait pas été laissé par un Tapir, cela est certain; il n'appartenait pas non plus à un singe, comme le faisait très bien observer l'auteur de la lettre qui accompagnait cet envoi, car ces animaux, très sensibles au froid, ne s'élèvent jamais dans la montagne à une pareille hauteur; mais ce pouvait être le poil d'un ours, puisque

cette cordillère en a aussi bien que les deux autres : moi-même je les y ai vus et poursuivis (1).

On voit comment un grand nombre de signes, tous vrais en eux-mêmes, venant se grouper autour d'un premier fait grossi par la frayeur, ont dû confirmer chez les Indiens la croyance à un être tel que le pinchaque. Ils auraient pu même douer cet animal d'une force prodigieuse, et en raconter des choses extraordinaires, sans s'écarter en rien de la vérité; au moins, si en ce point le Tapir des montagnes ressemble au Tapir des plaines,

---

(1) Il existe en Colombie deux ours habitans des Andes : un tout noir, qui paraît être assez rare; l'autre, à front blanc (*Ursus ornatus*), l'*Osso frontino* des habitans. A une certaine hauteur dans la Cordillère centrale, j'ai trouvé à chaque pas la trace de ces ours, des palmiers fendus, de longues et profondes égratignures sur les arbres, près des ruches des abeilles sauvages; enfin des restes de *bauge*, sorte de claie grossière, placée sur les arbres à 15 et 20 pieds de hauteur.

Il paraît que dans la Cordillère de l'ouest ces ours se trouvent bien plus nombreux encore que dans les deux autres.

J'ai observé à Bogota un jeune ours de l'espèce à front blanc, qui avait été pris peu de temps après sa naissance. A neuf mois la tache en Y, qui caractérise cette espèce, n'était guère encore qu'indiquée. Jusqu'à cet âge l'animal avait vécu uniquement de fruits, de racines et de pain, refusant la viande crue ou cuite qu'on lui présentait. Un jour je lui jetai un *vultur papa*, qui, ayant reçu en l'air un coup de bec à la tête, était tombé étourdi dans la ville, et venait de mourir d'un épanchement au cerveau. D'abord l'animal fut très effrayé, et il se passa près de deux heures avant qu'il osât arriver jusqu'à l'oiseau. Enfin, s'en étant approché, il le flaira, sembla vouloir jouer avec, puis l'emporta, de la cour où il était, dans une chambre obscure. M'étant approché comme pour le lui ôter, il le retira et fit entendre un cri de colère qu'il n'avait jamais poussé auparavant, même quand on le tourmentait le plus. Depuis ce moment il devint méchant, et bientôt j'appris qu'on avait été forcé de le tuer.

Les gens de la campagne m'ont dit qu'habituellement cet ours se nourrit de végétaux; mais que quand une fois, poussé par la faim, il a mangé de la chair, il y prend tellement goût, qu'il ne veut plus d'autre nourriture. Il devient alors la terreur de toutes les fermes du canton, auxquelles il enlève un grand nombre de mules et de chevaux.

qui rompt d'un premier effort le *laço* de cuir avec lequel on arrête le taureau le plus vigoureux.

Ce n'est pas seulement dans le nouveau continent que l'histoire du Tapir se lie à celle d'animaux fabuleux. Le merveilleux *Mé* des auteurs chinois, cet animal à la trompe d'éléphant, aux yeux de rhinocéros, aux pieds de tigre, qui ronge le fer, le cuivre, et mange les plus gros serpens, cet animal, comme l'a très bien jugé M. Abel Rémusat est un *Tapir;* mais je ne crois pas comme lui que ce soit un Tapir habitant de la Chine.

L'histoire du Mé me paraît fondée sur quelque description incomplète du Tapir de Malaca et sur quelque représentation grossière de cet animal. Les Chinois qui sortent de leur pays appartiennent sans exception à la classe la moins éclairée; on n'a donc point lieu de s'étonner qu'au retour ils mêlent dans leurs récits des erreurs et même quelques mensonges (1).

Quant aux figures, elles seront venues gravées sur quelques ustensiles, imprimées sur une étoffe, sculptées en amulette dans un morceau de jade, etc. On conçoit que dans ces représentations grossières, le gros pied du Tapir divisé en doigts, a bien pu être pris pour le pied d'un *Felis;* les taches du jeune auront été arrangées de manière à figurer celles de la panthère; la trompe, déjà exagérée dans l'image originale (car c'est le propre de tout dessinateur peu habile de charger le trait saillant), aura encore été allongée par le copiste, qui ne connaissait de trompe qu'à l'éléphant. Ce même copiste, enfin, ne voyant point

(1) Les Chinois établis à Java paraissent avoir confondu le maïba et le babiroussa dans la description qu'ils firent à Nieuhoff, d'un animal qu'ils désignaient, dit-il, sous le nom de *sucotyro*. Un autre récit qui me paraît se rapporter uniquement au Tapir indien, et où il y a tout au plus erreur de lieu et de nom, est celui que fait Blès à Buffon, relativement à un éléphant

de queue, aura suppléé à l'omission prétendue, en lui en donnant une semblable à celles des quadrupèdes les plus communs qui ont la taille qu'on attribue au Mé.

Le Mé ronge le fer, le cuivre et le bois de bambou; le Tapir américain avale du bois, et celui de l'Inde a probablement des habitudes semblables. D'Azara a vu le premier mâcher une tabatière d'argent : peut-être aura-t-on vu de même le Maïba promener entre ses dents un morceau de cuivre ou de fer. S'il ronge ce métal, c'est qu'il a les dents plus dures; donc, si l'on frappe ces dents avec un marteau, c'est le marteau qui devra se rompre (1).

à courte trompe, que quelques habitans de Ceylan disent exister dans l'intérieur de cette île. Suivant eux, l'animal ne dépasse pas la taille du bœuf, et il a sur le corps beaucoup plus de poil que l'éléphant ordinaire. Il est aussi beaucoup plus défiant, et au moindre bruit il s'enfonce dans les profondeurs des bois. (Buffon, *Suppl.*, tome VI, page 28.)

Jusqu'à présent les naturalistes ne comptent point le Tapir au nombre des mammifères qui se trouvent à Ceylan, mais il ne serait pas impossible qu'on le découvrît plus tard dans les forêts de l'intérieur, forêts jusqu'à ce jour inexplorées. Quant à l'île de Java, il paraît certain que le Tapir y existe.

(1) Le texte chinois ajoute que non-seulement les dents sont aussi dures que nous l'avons dit, mais encore que les os résistent au fer et au feu; de sorte que certains charlatans qui s'en étaient procuré les faisaient passer pour des reliques, pour les os du divin *Boudha*.

Je soupçonne que ceci est un conte surajouté et emprunté à un animal autre que le Tapir. J'ai vu plusieurs fois entre les mains de gens ignorans et amis du merveilleux des corps d'apparence osseuse qui, disait-on, résistaient également au fer et au feu. Ils soutenaient assez bien la percussion, mais quant à l'épreuve du feu, les propriétaires de ces pièces n'ont jamais voulu les y soumettre, dans la crainte, disaient-ils, de les ternir.

C'était le plus souvent de petits corps irrégulièrement ovoïdes, déprimés sur le côté et qu'on trouve à la tête de certains poissons. D'autres étaient des fragmens de la portion pierreuse de l'oreille d'un cétacé herbivore, d'un lamentin ou d'un dugong. Je vis une de ces pièces entre les mains d'un matelot espagnol, qui disait l'avoir eue aux Philippines. Si cet homme ne mentait point, pour donner plus de valeur à son amulette en lui supposant une origine lointaine, il serait très possible que les Chinois, qui vont jusqu'à ces îles, en eussent rapporté dans leur pays; la prétendue indestructibilité de ces os eût ensuite suffi pour que les philosophes chinois, qui ne nient pas le

Le Mé mange des serpens; mais il n'y aurait rien d'étonnant à ce que le Tapir, qui est très glouton, en mangeât aussi : le cochon, avec lequel il a tant de rapports, poursuit en France la vipère et la dévore, et sous les tropiques, il s'attaque à des reptiles encore plus venimeux.

Plusieurs des traits de l'histoire du *Mé* s'expliquent, comme on le voit, assez naturellement par ce que l'on sait des habitudes du Tapir; cependant si l'on n'avait pas eu d'autres indices, il eût été bien difficile de découvrir à quel animal se rapportaient dans l'origine les récits qui ont donné naissance à la fable chinoise, et il est même très vraisemblable que sans le secours de la figure il eût été impossible d'y parvenir. Si donc quelques notions relatives au Maïba sont parvenues dans des contrées plus distantes des îles de la Sonde, comme les récits s'altèrent en proportion du nombre de bouches par lesquelles ils passent, il ne sera plus possible de reconnaître l'animal par ses mœurs, mais peut-être pourra-t-on encore le retrouver par ses formes, puisqu'une même image traverse sans altération sensible un long intervalle de temps et de lieux.

La figure que nous connaissons du *Mé* chinois nous montre un Maïba marchant et la trompe en l'air; supposons que dans quelque autre image parvenue plus loin encore, au centre de l'Asie par exemple, l'animal ait été représenté assis (1) et la trompe pendante; cette figure, pour peu que l'exécution en soit grossière, semblera une copie mutilée du griffon des sculptures grecques, car dans

merveilleux, mais qui seulement lui refusent une origine divine, les attribuassent au *mé*, dont les dents jouissaient déjà dans leur opinion de propriétés toutes semblables.

(1) Un des deux Tapirs américains décrits par Allamand prenait fréquemment cette posture, et il y a tant de conformité pour les habitudes entre l'espèce asiatique et l'espèce américaine, que l'attitude familière a l'une ne doit pas être étrangère à l'autre.

la terminaison de cette tête bizarre on croira voir bien plutôt le bec crochu d'un aigle ou d'un vautour que le museau d'un quadrupède. Remarquons d'ailleurs que dans le griffon même les oreilles semblent attester encore que ce qui est devenu une tête d'oiseau ne fut dans l'origine qu'une tête de mammifère mal comprise par les copistes.

Conclura-t-on de ces conformités que l'image du Maïba indien a servi de modèle pour la figure du griffon grec, ce serait hasarder beaucoup sans doute; cependant quelques renseignemens historiques peuvent donner un peu plus de poids à cette conjecture. Ainsi nous savons par Hérodote que c'est de l'intérieur de l'Asie qu'arrivèrent d'abord dans la Grèce, sinon les images du griffon, du moins les notions relatives à ses formes. Les Grecs qui trafiquaient vers le Pont-Euxin les reçurent des Scythes, et ceux-ci à leur tour les avaient reçues des Argippéens, peuples à long menton, à nez épaté, à tête rasée, qui habitaient des plaines rocailleuses et salées, situées au pied de hautes montagnes, c'est-à-dire le Step compris entre l'Oural et l'Altaï.

Ces marchands mêlèrent à l'histoire des griffons les notions confuses qu'ils avaient reçues des mêmes Scythes sur les riches mines des montagnes de la Tartarie, et la manière dont ils lièrent les deux traditions, est tout-à-fait conforme à l'esprit et aux croyances de leur temps.

Alors, en effet, c'était une chose reconnue que tout trésor avait pour gardien un animal non moins redoutable par sa force qu'effrayant par sa figure. Le griffon au bec d'aigle, aux griffes de lion (car la division des doigts avait bien pu produire la même erreur qu'à la Chine), aura été naturellement le gardien de l'or de ces montagnes.

Mais les dragons des cavernes de la Grèce avaient la

plupart des ailes, et ainsi il ne fallut pas grand effort pour en donner au griffon, qui déjà avait la tête d'un oiseau. D'ailleurs une fois dans la bouche des Grecs, l'histoire ne manqua pas de s'embellir, et l'on y rattacha successivement plusieurs des contes qui arrivaient par la même voie, c'est-à-dire par la voie de l'Orient (1).

L'histoire du griffon, quelque origine qu'on lui veuille supposer, était certainement connue depuis deux siècles au moins dans la Grèce, lorsque Ctésias vint y ajouter de nouveaux traits. Ce médecin, pendant son séjour en Perse, avait vu sur les monumens diverses figures d'êtres symboliques, tels qu'on en trouve encore aujourd'hui dans les ruines de Persépolis; il ne se fit pas scrupule de les décrire comme les ayant vus vivans dans la ménagerie du prince. Parmi ces êtres fantastiques il en était un qui offrait, avec le corps et les pieds du lion, les ailes et la tête de l'aigle, ou plutôt du faucon. Ctésias ne manqua pas d'en faire un griffon, et il ajouta aux contes qui couraient déjà sur cet animal, ceux que lui suggéra son imagination. Ainsi l'histoire du griffon, telle qu'on la trouve

(1) Tel est le conte des fourmis qui tirent de l'or. D'abord on dit que ces fourmis existaient dans l'Inde (mot qui n'avait pas alors une signification précise comme aujourd'hui); puis Élien les plaça chez les Issedons, c'est-à-dire dans les monts Ourals, dans le pays où l'on croyait qu'existaient les griffons.

Il ne serait pas impossible que cet étrange conte reposât sur un fait réel : il est bien connu en Colombie que Juan Diaz découvrit une mine qui l'enrichit, parce que des fourmis *harrieras*, en creusant leur demeure souterraine, amenèrent à la surface, parmi les petits cailloux qui les gênaient, de nombreuses pépites d'or. La tâche n'est pas au-dessus des forces de cet insecte, et on le voit souvent porter hors de sa demeure des grains de silex bien plus pesans que ne le sont communément les paillettes d'or. Il faut observer, d'ailleurs, que dans beaucoup de lieux, la couche aurifère est très superficielle; j'ai souvent trouvé des fourmillères qui y pénétraient assez profondément, quoique, je l'avoue, je n'aie jamais vu d'or parmi les décombres amenés à la surface.

Ce qu'il y a de plus absurde dans l'histoire des fourmis indiennes, la taille qu'on leur a supposée, ne tient peut être qu'à une confusion de noms. J'ai en-

dans Élien et dans quelques écrivains postérieurs au temps de Ctésias, est une fusion de deux traditions, l'une venant de Perse et ajustée pour servir d'explication à une image évidemment symbolique, l'autre plus ancienne, arrivée par la route de l'Inde, et qui pourrait bien se rapporter à la figure d'un animal réellement existant, à celle du Tapir malais.

Le griffon persan, composé à dessein de parties d'animaux appartenant à des classes différentes, a le cou surmonté d'une crête qui rappelle la nageoire dorsale de certains poissons. Cette crête se retrouve dans les griffons grecs, quelquefois avec la même forme, et quelquefois ajustée comme la crinière des chevaux (1), lorsque l'on tient les poils assez courts pour qu'ils restent droits. Les sculpteurs, au reste, ne considérant le griffon que sous le point de vue pittoresque, contribuèrent encore à altérer la forme primitive; ainsi, au lieu de le représenter sans queue, comme il l'était probablement dans l'origine, les uns lui en donnèrent une qui se rapportait à la forme des pieds; d'autres la firent toute de fantaisie, l'enroulèrent en spirale et l'ornèrent de feuilles d'acanthe.

---

tendu, en Amérique, des récits incroyables sur le *Perico ligero*, parce qu'on réunissait les traits qui appartiennent à deux animaux de ce nom, au Paresseux et à un oiseau nocturne voisin des engoulevens et des guacharos. J'ai vu de même confondre, dans une seule description, une araignée et un gecko, parce que dans quelques parties de l'Italie le nom de *Tarentola* leur est donné à l'un et à l'autre. Je suis porté à croire qu'on n'aura prêté aux fourmis indiennes la taille du renard, que parce que leur nom aura eu de la ressemblance avec celui de quelque mammifère fouisseur des mêmes pays.

(1) Il ne serait pas impossible même que ce fût la véritable crinière d'un Tapir qui se trouvât ainsi figurée; car, bien que nous ne la voyons point dans le maïba que nous connaissons jusqu'à présent, elle peut exister dans une autre variété du même pays. Ce caractère n'est point du tout constant, puisque la femelle de l'espèce commune n'en a presque pas à Cayenne, et qu'au Paraguay elle en a comme le mâle.

ADDITIONS AU MÉMOIRE SUR LE TAPIR.

PREMIERS RENSEIGNEMENS ORIGINAUX SUR LE TAPIR.

J'ai dit que le Tapir avait été connu des Espagnols vers l'année 1509, époque de leur établissement au Darien ; cependant, les plus anciennes observations originales que j'aie citées, sont celles d'Oviedo, publiées en 1526 ; je ne doutais pas qu'on n'en trouvât d'antérieures dans un livre écrit par un des chefs même de l'expédition, dans la géographie d'Enciso ; mais j'avais cherché vainement à me procurer ce livre, que la Bibliothèque royale elle-même ne possédait pas, et dont elle vient de faire récemment l'acquisition.

Le bachelier Martin Fernandez de Enciso, était, comme on le sait, l'associé d'Ojeda pour la conquête du Darien, et se trouva un moment à la tête de l'entreprise. Dépossédé bientôt par Balboa, il fut envoyé prisonnier en Espagne, où s'étant aisément justifié des accusations portées contre lui, il reçut le titre d'*Alguazil mayor de Castilla del oro*. Peu désireux cependant de se retrouver en contact avec ses anciens compagnons, notre bachelier resta en Espagne, reprit ses travaux littéraires, et bientôt fit paraître un *Traité de Géographie universelle*, dont la première édition est de 1519, et la seconde de 1546.

Comme Enciso est le premier écrivain qui ait parlé *de visu* du Tapir, nous reproduirons ici ce qu'il en dit, et même tout le commencement du paragraphe relatif au Darien.

« Sur la bande occidentale du golfe d'Uraba, dit Enciso, et à cinq lieues » dans l'intérieur, se trouve le Darien, qui est peuplade de chrétiens. On y » recueille, dans certaines rivières qui descendent de hautes montagnes » toutes couvertes de bois, de l'or au plus haut titre. Dans ces bois il y a » une multitude d'animaux divers, beaucoup de tigres, beaucoup de lions et » de chats à longue queue, qui, à la queue près, ressemblent de tout point à » des singes. Il y a quantité de porcs. Il y a encore certaines bêtes, grandes » comme des vaches et très charnues, qui sont de couleur brunâtre ; elles » ont les pieds comme la vache et la tête comme la mule, avec de grandes » oreilles. On les appelle dans ce pays vaches écornées (*vacas mochas*) ; leur » chair est très bonne à manger. Il y a encore dans ce pays bien d'autres » animaux, et j'ai vu tous ceux dont je parlerai ici, le sort m'ayant fait » conquérant de ce pays, qui est le premier qu'aient possédé les chrétiens » sur le Continent. Quelques-uns des nôtres m'ont dit avoir vu des onces, » mais pour moi je n'en ai pas vu. » (*Suma de Geographia que trata*, etc. Séville, 1519.)

Lorsque les Espagnols arrivèrent au lieu où fut fondée la ville de Darien, ils venaient de perdre, par un naufrage, presque toutes leurs provisions ;

par conséquent, de toutes les productions de ce nouveau pays, celles-là devaient les intéresser le plus, qui pouvaient mieux remédier à la perte qu'ils avaient faite. Ils trouvèrent *de grandes bêtes très charnues, et dont la chair était bonne à manger;* ils les désignèrent sous le nom de vaches, parce qu'en Espagne la grosse viande de boucherie s'appelle de la *vache,* au lieu de s'appeler, comme chez nous, du *bœuf.*

NOMS DU TAPIR DANS LES PROVINCES AUSTRALES.

Je dois à l'obligeance de M. d'Orbigny de pouvoir joindre aux noms que j'ai déjà donnés, ceux que cet infatigable naturaliste a recueillis dans les provinces de Moxos, Chiquitos et Gran Chaco. Je les présente ici suivant l'ordre géographique, en allant du nord au sud.

Province de Moxos. — Le Tapir est appelé *Aüana* par les Pacaguaras (rives de l'Opotari jusqu'à son confluent avec le Madeira); il est appelé *Bata* par les Caiubabas (vill. d'exaltacion de la Cruz); *Oma* par les Movimas (bords du Santa-Ana); *Uaiacu* par les Itonamas (riv. Itonama ou S.-Miguel); *Niptoxo* par les Canichanas (vill. de S.-Pedro, sur le Mamore); *Sumo* par les Muchoxeones (confluent du Rio Baure et du Mamore); *Suma* par les Baures (sur la même rivière, mais un peu plus haut); *Chamu* par les Moxos proprement dits (moyen Mamore et ses affluens, villages de S.-Ignacio, S.-Xavier, Trinidad-de-Moxos, Loreto); *Umui* par les Chapacuras (établis par les jésuites au village de Carmen sur le haut Baure).

Province de Chiquitos. — Le Tapir est nommé *Imui* par les Quitemocas, *Potapaque* par les Cuciquias, *Samo* par les Paunacas, et *Isamo* par les Païconecas (ces quatre nations réunies par les missionnaires habitent la Concepcion de Chiquitos vers les sources du Baure); il est nommé *Oqüita paquish* par les Chiquitos proprement dits (faîtes de partage des rivières de San-Miguel et San-Ignacio); *Cuti* par les Sarabecas (mission de Santa-Ana de Chiquitos); *Vipe* par les Guaranocas; *Quipe* par les Samucus; *Iguipe* par les Potureros, et *Iatacota* par les Morotocas (ces quatre dernières nations amenées de loin par les jésuites, habitent les montagnes au sud-est de la province, les deux versans de la chaîne de Chochiis; dans ces cantons les Tapirs sont si nombreux qu'on peut bien, comme le dit le P. Ruiz, en tuer cinq ou six dans l'espace d'une nuit). Les Otuques, qui sont tout-à-fait à l'est de la province et sur les bords du Paraguay, nomment l'animal *Cuui.*

Gran Chaco. — Les Yuracares (versant oriental de la Cordillère de Cocha-Bamba) nomment le Tapir *Venche;* les Tobas, vers le haut du R. Pilcomayo, *Cepuchcolo;* enfin les Bejosos, Mataguayos et Matacos, qui s'étendent vers le sud-est entre le Pilcomayo et le Rio Vermejo, le nomment *Hiclag.*

En ayant égard aux différences de prononciation qui se trouvent dans les dialectes même les plus voisins, et surtout aux changemens qui s'opèrent conformément à des règles déterminées dans l'articulation initiale ou finale d'un

grand nombre de mots, suivant la place qu'ils occupent dans la phrase, les vingt-quatre noms qu'on vient de lire peuvent se réduire à cinq ou six. Ainsi, nous aurons un groupe formé des mots *Imui*, *Umui*, *Oma*, *Suma*, *Sumo*, *Samo*, *Chamu* et *Isamo* (1); un autre de *Quipe*, *Iguipe* et *Yipe* (2). *Aüe* sera rapproché d'*Aüana*; *Iata cota* de *cuti*; *Bata* de *Poto paque*, et aussi d'*Oquita paquish*, ce dernier mot se prononçant également *Opita paquis*, comme on le trouve dans un dictionnaire chiquito manuscrit rapporté par M. d'Orbigny (3).

Dans un petit vocabulaire, imprimé à Lisbonne en 1795, intitulé *Diccionario portugez et brasiliano* (titre très impropre, puisqu'il n'y a pas de langue brésilienne proprement dite), j'ai trouvé le mot *Anta* (Tapir) rendu par les mots *Tapyira*, *Caa poara* et *Icuré*. Le dernier, qui signifie *cochon d'eau* (4), s'applique plus communément au Cabiai, mais il se peut que dans

---

(1) Dans le guarani proprement dit, et dans plusieurs des dialectes qui s'y rattachent, il n'y a point d'articulation qui corresponde exactement à celle de l's; probablement des Espagnols eussent écrit *çamo*, *çumo*, etc. (le *c* ayant dans la Péninsule une prononciation différente de l's). Cependant le *c*, qu'on trouve employé dans plusieurs dictionnaires américains, ne rend pas non plus complétement l'articulation indienne, qui est une sorte d'aspirée sifflante; nos Français ont essayé de la rendre tantôt par une *h*, surtout quand elle est initiale, et tantôt par un *ch*.

(2) Ce nom me paraît formé de deux racines qui se trouvent dans la langue guarani. *Yi*: dur', difficile à traverser, et *Pe*, écorce, peau (*l'animal à la peau résistante*, ce qui est aussi, comme nous l'avons vu, le sens du mot *Tapii*). L'*y* dans le mot *yi* est une demi-consonne, et le mot précédé de la racine I (eau), qui dénote les habitudes aquatiques de l'animal, devient *iguipe*.

(3) *Pu*, *Qü* et *Mu* se mettent très souvent l'un pour l'autre; ainsi en guarani, *coup* se dit *Pua*, *Qüa* et *Mua*.

Le mot *Opita paquis*, en chiquito, semble signifier *sifflement aigu*; il rappellerait le cri du Tapir, cri que les Indiens ont bien remarqué, et qu'ils imitent pour attirer l'animal jusqu'à portée de leurs flèches.

(4) D'Azara donne le mot *cure* comme désignant collectivement les deux espèces de *Pecari*, dont chacune du reste a son nom propre. Le mot *curi* étant dans les langues des Antilles et d'une partie de la Terre-Ferme le nom du *Cavia cobaia*, on pourrait croire que les Indiens faisaient le même rapprochement que nous avons fait en désignant le dernier animal sous le nom de *cochon d'Inde*; ils semblent en effet réunir dans leur nomenclature aux pachydermes américains (Pecaris et Tapirs) es *cavia* de Linnée, surtout les grands, qui sont de vrais animaux à sabots; ils ont même pour un de ceux-ci un nom dont la composition est presque identique à celle du nom linnéen du Cobaye; mais dans le cas qui nous occupe, la ressemblance des deux mots tient seulement à ce que les noms *curi* et *cure* dérivent l'un et l'autre d'une même racine.

Cette racine *cu* ou *gu*, indicative du mouvement, donne le verbe *cue*, qui signifie *mouvoir*, se *mouvoir*, dans le sens le plus général (*Tesoro de la langua guarani*, page 103), *quara*, mouvoir circulairement (*Tes.*, page 130), *cure*, *curei* et *cute*, agiter par un mouvement alternatif, soit latéral, soit de haut en bas. De là, les noms donnés à des animaux dont la progression est tortueuse, sautillante ou claudicante, 1°. aux pecaris *cure*; 2° à certains rongeurs qui, étant, comme notre lapin, habituellement assis, font un petit saut à chaque pas; ainsi *curi* pour le cochon d'Inde, *Acuti*, *Acuri* (Biet, page 399) pour l'*Agouti*; 3°. à une sorte de canard qui se dandine en marchant plus que les autres, *curia*.

Sous la forme *care*, la même racine exprime *chose tortueuse*, chose qui va de travers; on pourrait croire qu'elle entre dans la composition du mot *pecari*, mais ce mot, qui nous a été donné par les flibustiers (Wafer, Dampier, etc.), est, ainsi que le mot *Pockiero* conservé par Laët, une corruption du nom indien *Pagquira*, employé en divers points de la côte, depuis le golfe de Honduras jusqu'à l'embouchure de l'Amazone. Le P. Raymond, breton, écrit *Bac Kira*. Les colons, dans la Guyane espagnole, disent *Paquira* (Gumilla, cap. XIX), et *Baquira* (Caulin, lib. I, cap. VII); dans la Guyane hollandaise et anglaise *Peccary* (Stedman,

certains cantons il serve aussi à désigner le Tapir. Le mot *caapoara* ou *caasgoara* signifie *chose des bois*, animal qui est l'*objet de la chasse en forêts* (5); et suivant que dans un canton c'est le Pecari ou le Tapir qui est plus spécialement le but de la chasse des indigènes, il désigne l'un ou l'autre de ces animaux.

---

cap. XIV), et *Bakkire* (Martin, *Histor. of the british colonies*, tome 2, page 87); nos Français de Cayenne l'ont plus altéré encore et en ont fait *Patira* (Barrère, Laborde, etc.).

Le nom *Pagquira* est formé de deux mots guaranis; de *Pag* ou *Pak* qui désigne le *Cavia Paca* de Linnée (Celogenys de M. F. Cuvier), et de *Quira* qui signifie *gros*, *gras*.

Voilà donc encore un cas dans lequel la nomenclature des indigènes rapproche les *Cavia* des pachydermes. Ces animaux, dans nos classifications, sont aujourd'hui fort éloignés, mais peut-être ne le seraient-ils pas autant dans une méthode vraiment naturelle. L'ordre des rongeurs, il faut le reconnaître, est fondé sur un caractère unique et non pas sur l'ensemble des rapports; il est donc, au moins par son origine, tout artificiel. La considération des dents est fort importante sans doute, mais c'est surtout parce qu'habituellement elle fournit une indication sur le genre de vie de l'animal; or, dans l'ordre des rongeurs, quoique la disposition des dents antérieures soit la même, le régime d'une famille à l'autre est souvent aussi différent que possible.

Les colons paraissent avoir souvent confondu les porcs américains avec le *Paca*, qui, suivant Sonini, porte en quelques parties de la Guyane le nom de *Pakiri*. Ce que dit Laborde de son *pytyra*, et Caulin d'un très petit pecari qu'il nomme *Potochis*, me paraît se rapporter au Celogenys; c'est bien lui qui, caché pendant le jour, va la nuit ronger les cannes à sucre et le maïs; c'est lui encore qui, lorsque sa tannière n'a qu'une issue, comme dans le cas où elle est creusée dans une berge, y entre à reculons, et reste tourné de manière à en défendre l'entrée. Ainsi placé dans son trou, il saisit aux jugulaires le chien qui y met imprudemment la tête, et le tue quelquefois du premier coup de dents, ainsi que l'ont vu plusieurs chasseurs de qui je tiens le fait.

J'ai dit que les Indiens avaient une dénomination analogue à celle de *mus porcellus*, employée par Linnée, c'est celle de *cabia capybara*. Cavia, comme le remarque Marcgraff, est le nom générique des rongeurs; *capiiba* est le nom d'une espèce de *pecari* (*Tesor.*, page 90), et la particule *ra* signifie semblable, c'est donc le *mus porcinus*.

(5) Les mots *caa* et *monte*, l'un espagnol et l'autre guarani, ont la même valeur, c'est-à-dire qu'ils signifient à la fois *forêt* et *montagne*; leurs dérivés *caapora*, *caapoara*, *caapiguara*, d'une part, et *monteria* de l'autre, se prennent aussi dans le même sens pour *chose des bois*, *chasse aux bois* et *bêtes fauves* qui sont l'objet de cette chasse. Dans la traduction française des *Quadrupèdes du Paraguay*, la racine *caa* est prise dans le sens de *montagne*, et l'auteur blâme Margraff d'avoir désigné le Pecari par un nom qui, dit-il, signifie semblable à une *montagne*. Dans le texte espagnol que j'ai pu me procurer depuis peu, le mot est pris dans son vrai sens. Il n'y a pas à accuser pour cela le traducteur d'inexactitude, car, dans cet endroit, comme dans plusieurs autres, le texte espagnol a été évidemment changé, et peut-être d'après les critiques auxquelles avait donné lieu la publication de l'ouvrage en français.

J'ai trouvé dans le texte espagnol la preuve que l'erreur de Moreau Saint-Merry, relativement à la livrée du jeune Tapir, venait, comme je l'avais soupçonné, d'une fausse interprétation donnée au mot *cachorro*; quant à celle que le traducteur a donnée pour le mot *barrero*, je ne puis rien dire, ce mot ne se trouvant nulle part dans l'édition de Madrid. Cette édition renferme plusieurs chapitres qu'on ne trouve point dans celle de Paris, entre autres, un article sur les chiens, dont je regrette de n'avoir pu faire usage pour mon Mémoire sur les animaux domestiques; les ouvrages d'Azara fournissent en effet toujours quelques bons renseignemens, car si la partie critique y est des plus faibles, la partie d'observation est en général excellente.

L'histoire des quadrupèdes du Paraguay était, de tous les ouvrages que je cite dans ce Mémoire, le seul que je n'eusse pu consulter jusqu'ici dans l'original. Ce soin m'a paru indispensable, ayant reconnu que pour tout ce qui est relatif à l'histoire naturelle, on trouve même, dans les meilleures traductions, les plus étranges erreurs.

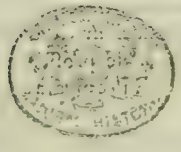
EXPLICATION DES PLANCHES.

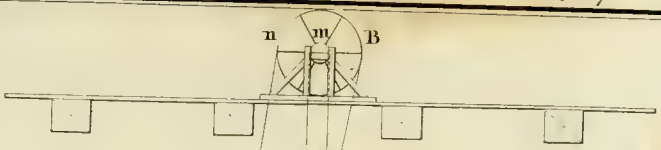
Planche I. — A, le *Tapir pinchaque*. Fig. 1, le plus grand des deux Tapirs mâles tués au Paramo de *Suma-Paz*. Fig. 2, la tête du même vue de face. — B, comparaison de la nouvelle espèce avec les deux figures de Buffon. Fig. 3, dessin fait à Paris d'après un individu vivant. Fig. 4, dessin fait à *Suma-Paz*, d'après le plus jeune des deux Tapirs pinchaques. Fig. 5, dessin rapporté de Quito par La Condamine.

Planche II, tête osseuse du Tapir pinchaque, présentée sous trois aspects différens.

Planche III, comparaison des têtes osseuses dans les trois espèces de Tapir et du Paléothérium : AA, *Maïpouri;* BB, *Maïba;* CC, *Pinchaque;* D, *Paléothérium.*

Nota. Les sept figures de cette troisième planche sont faites à la même échelle. Ainsi les rapports de grandeur des quatre têtes sont conservés. Les figures qui représentent la face postérieure des trois têtes, semblent plus réduites que celles qui les montrent de profil, mais cela tient seulement à l'absence de la mâchoire inférieure. En comparant entre elles les deux têtes du *Maïpouri* et du *Pinchaque*, vues par la face postérieure, on reconnaît que la différence de grandeur dépend presque uniquement du volume des os de la face, et que la capacité du crâne doit être sensiblement la même dans l'une et dans l'autre.





Elévation générale de l'appareil chronométrique
Employé dans ces expériences.

Fig. 5.

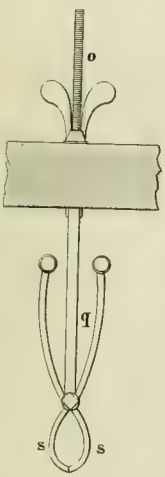
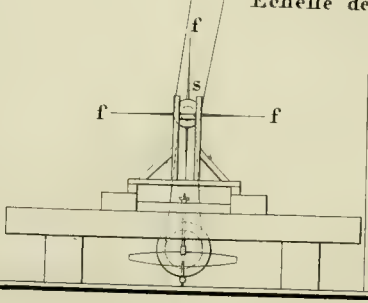
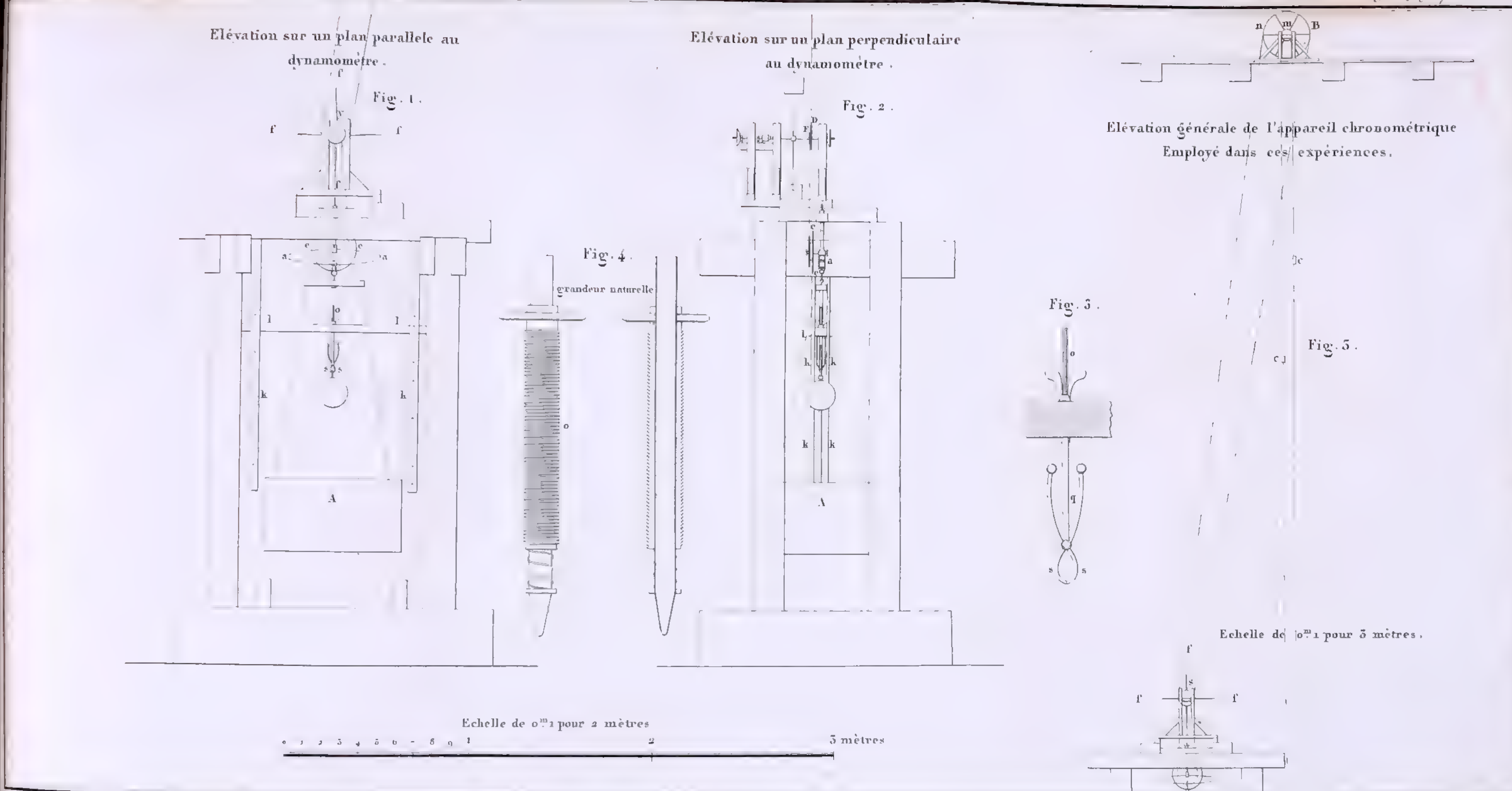


Fig. 5.

Echelle de $0^{m}.1$ pour 3 mètres.



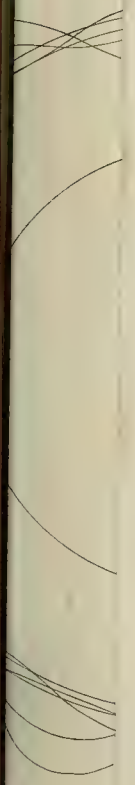
A. Morin del?


Elévation sur un plan parallele au dynamomètre.
Fig. 1.
Elévation sur un plan perpendiculaire au dynamomètre.
Fig. 2.
Elévation générale de l'appareil chronométrique Employé dans ces expériences.
Fig. 4.
grandeur naturelle
Fig. 3.
Fig. 5.
Echelle de 0m.1 pour 3 mètres.
Echelle de 0m.1 pour 2 mètres
3 mètres

MENT

5.e Expér

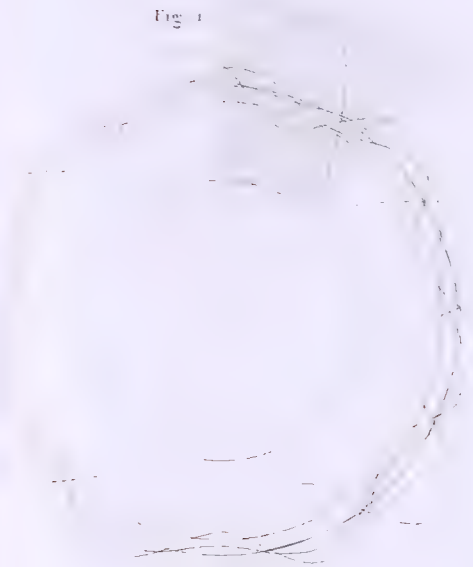
Fig



Courbes du mouvement oscillatoire de la caisse et du ressort tracées par le style.

12e Expérience du tableau n° 1.

Fig. 1

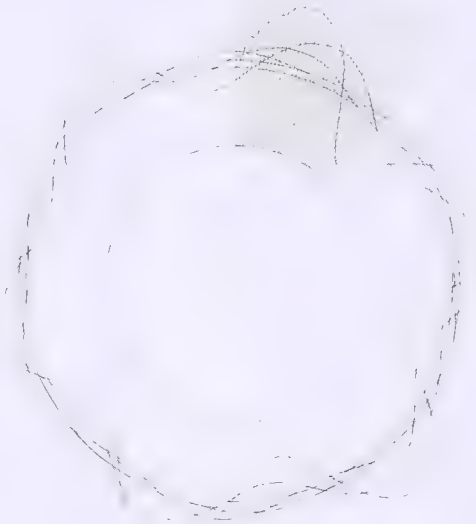


5e Expérience du tableau n° 2.

Fig. 2.

5e Expérience du tableau n° 3.

Fig. 3



Echelle de grandeur naturelle

Courbes relevées du mouvement oscillatoire de la caisse

Fig. 4.

12e Expce du tableau n° 1

Fig. 5

5e Expce du tableau n° 2.

Echelle de 1m pour 1" pour les abscisses ou les tems et de 1m pour 0m30 pour les ordonnées ou les espaces parcourus

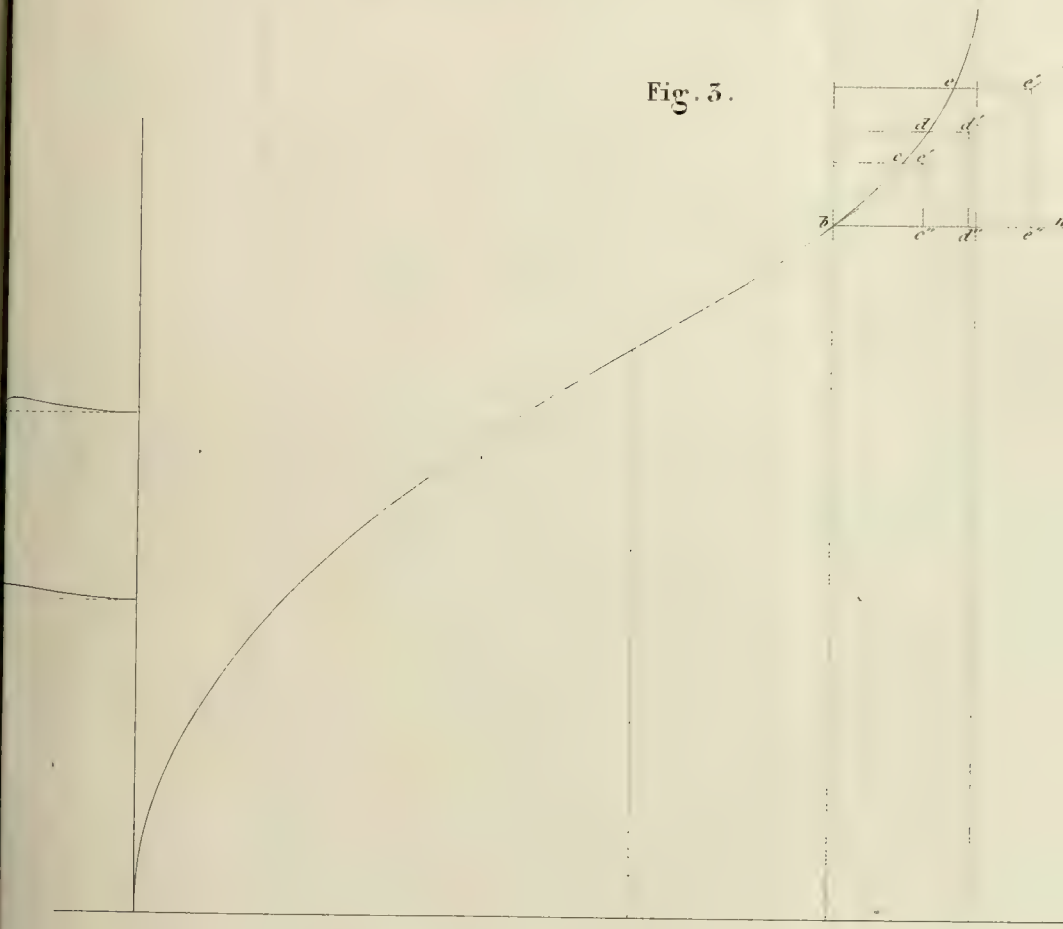
Fig. 6.

5e Expce du tableau n° 3.

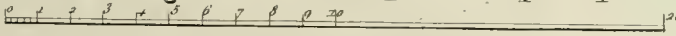
Courbe relevée de la descente et de la pénétration du projectile.

1ère Expce du tableau nº 1 chapitre III.

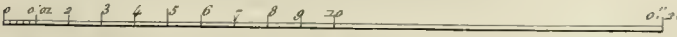
Fig. 3.



Echelle moitié de la grandeur naturelle pour les espaces parcourus



et de 0m 50 pour 1″ pour les tems.



Savans Etrangers Tome IV. page 734 Pl. 16.

Courbe du mouvement de descente et de pénétration du projectile tracée par le style.

1ère Expce du tableau nº 1 chapitre III.

Fig. 2.

Echelle moitié de la grandeur naturelle.

Elévation sur un plan parallèle au plateau.

Fig. 1.

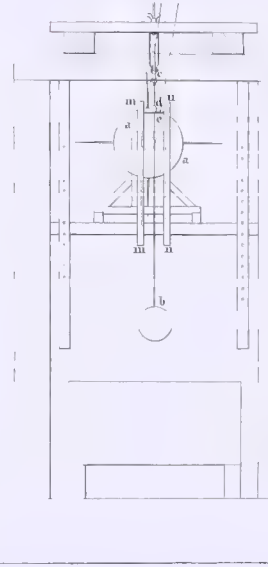
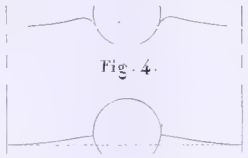


Fig. 4.

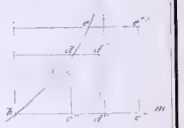


Echelle de $0^m.1$ pour 2 mètres

Courbe relevée de la descente et de la pénétration du projectile

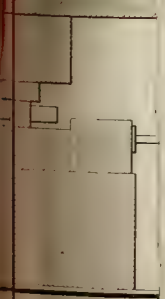
1ère Expce du tableau nº 1 chapitre III.

Fig. 3.

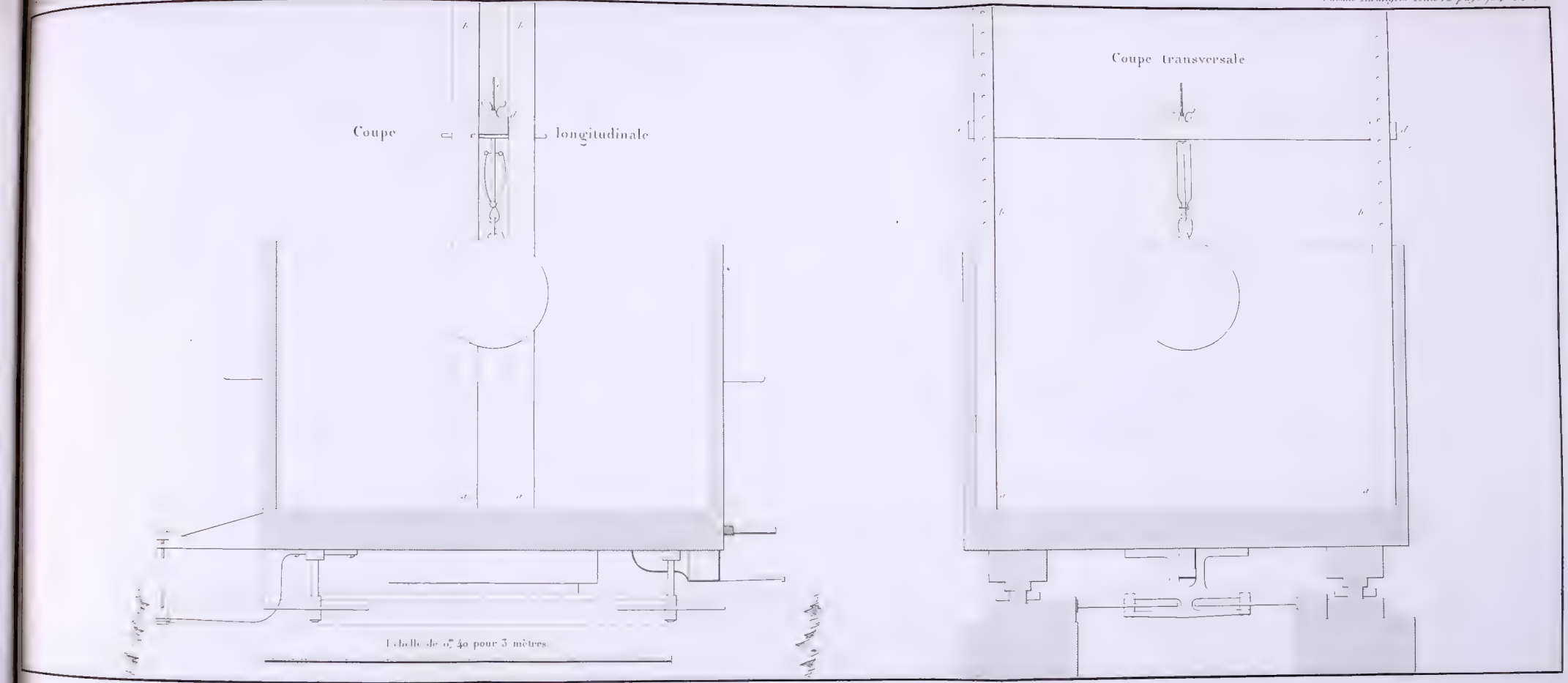


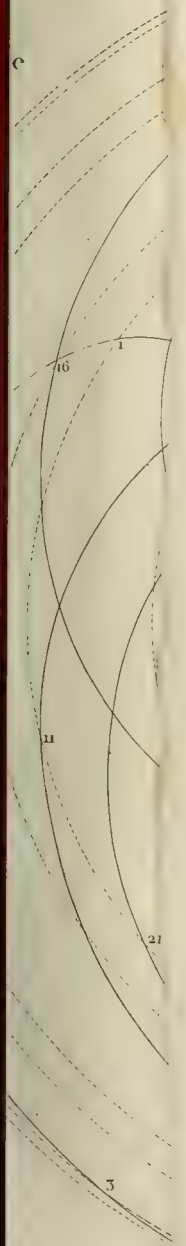
Echelle moitié de la grandeur naturelle pour les espaces parcourus

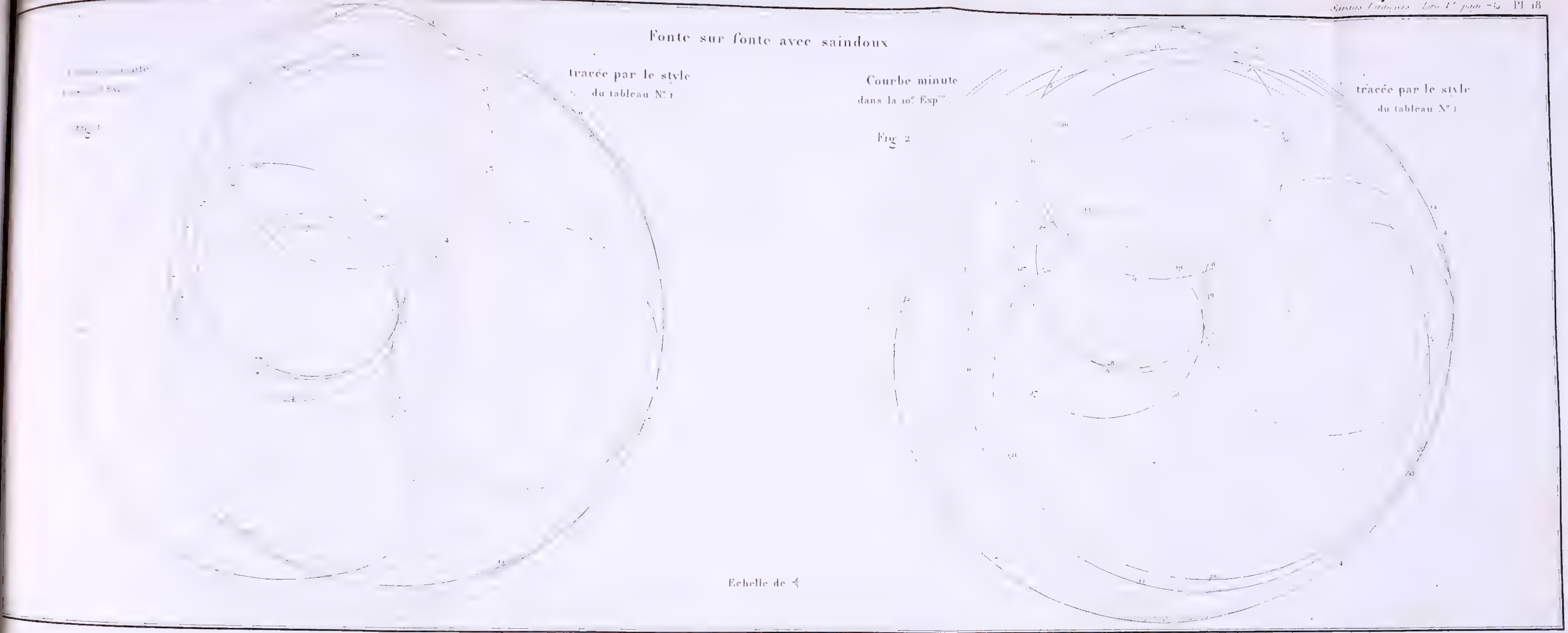
et de $0^m.50$ pour 1″ pour les tems



APPAREIL EMPLOYÉ AUX EXPÉRIENCES SUR LE FROTTEMENT PENDANT LE CHOC.




1
16
11
21
3


Fonte sur fonte avec saindoux
tracée par le style
du tableau N° 1
Courbe minute
dans la 10e Expce
Fig. 2
tracée par le style
du tableau N° 1
Echelle de ¼

Courbe relevée du mouvement
dans la 14.e Expérience du tableau N.o 1.

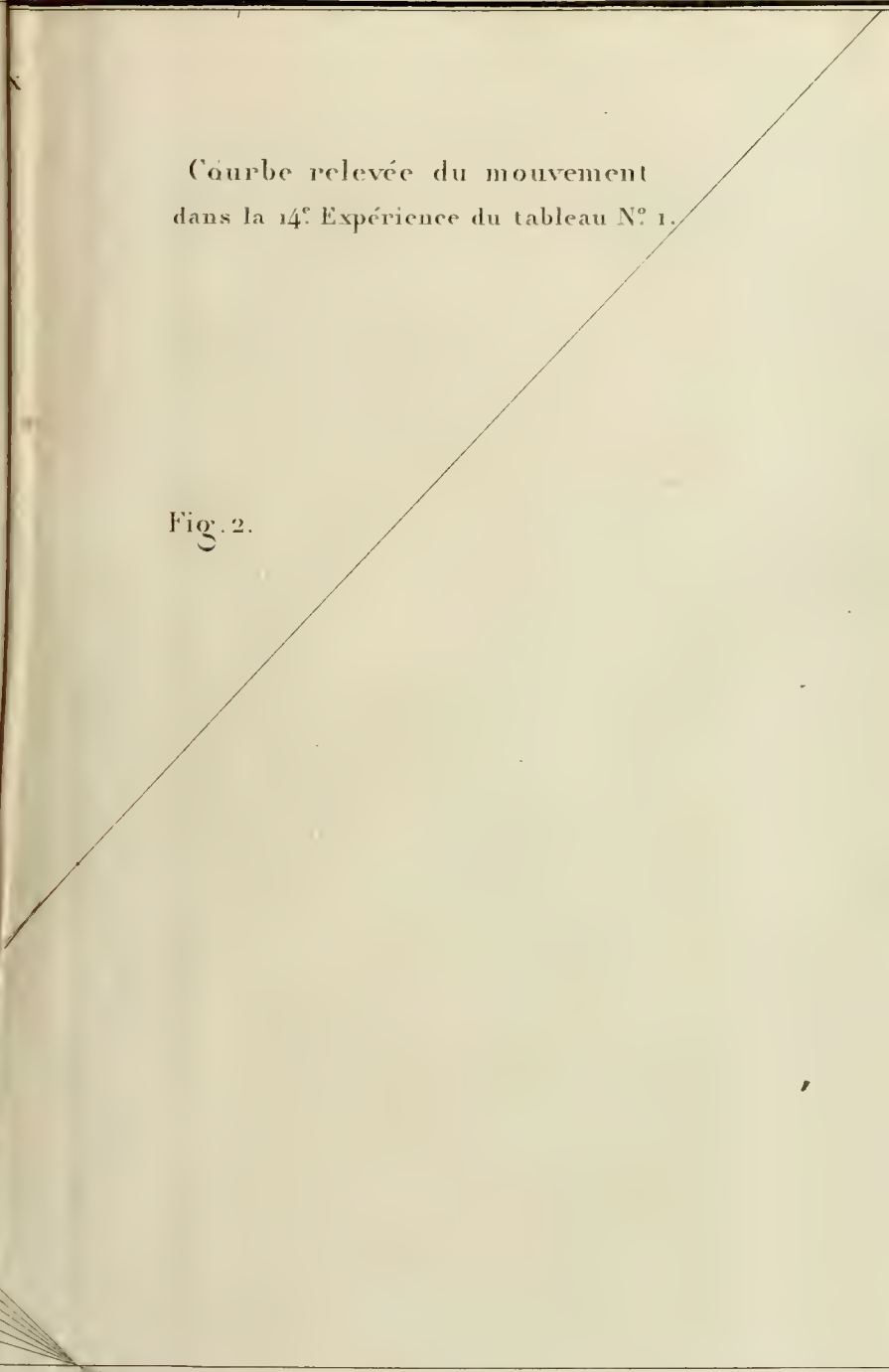


Fig. 2.

Fonte sur fonte avec saindoux

Courbe minute
dans la 14 Exp

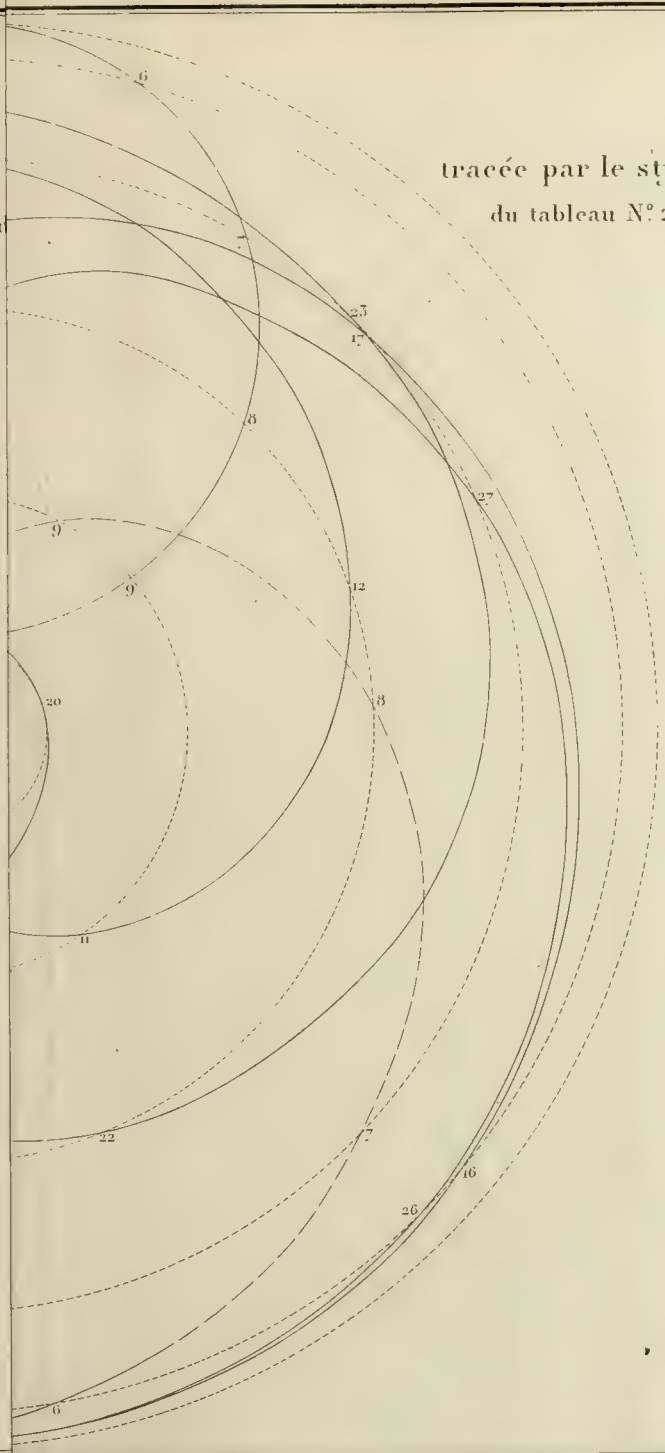
Fig 1

tracée par le style
du tableau N° 1.

Courbe relevée du mouvement
dans la 14e Expérience du tableau N° 1

Fig 2

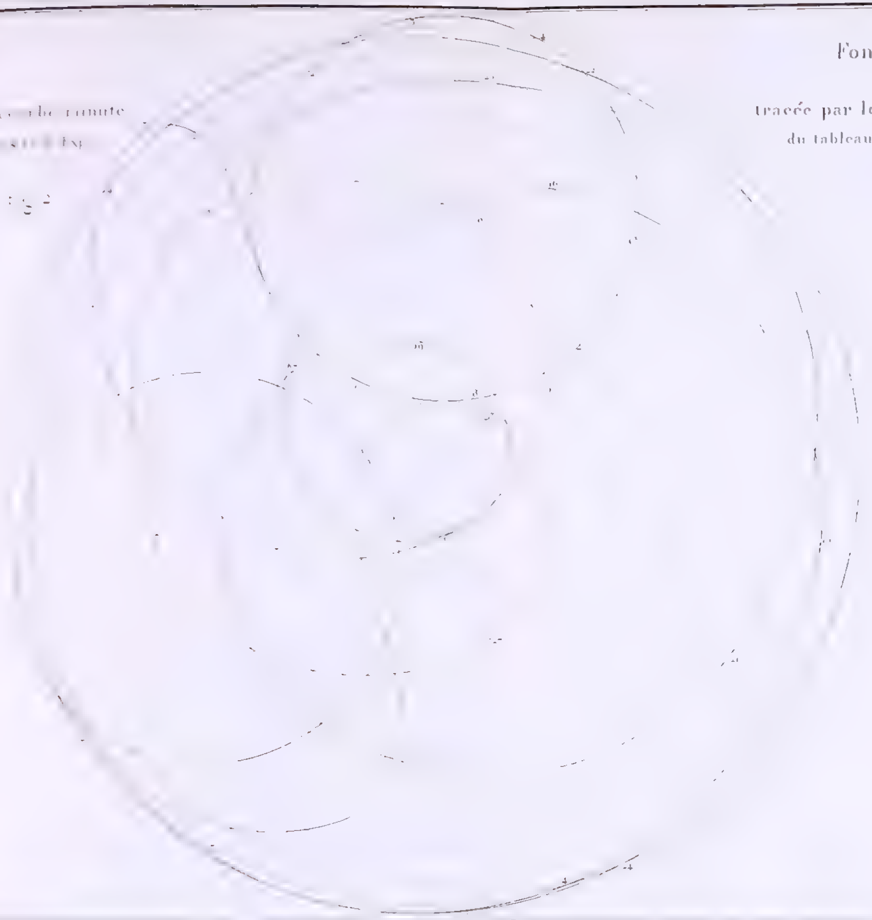
Echelle des $\frac{2}{3}$


tracée par le style
du tableau N° 2.
6
23
17
8
27
9
9
12
20
8
11
22
7
16
26
6

Fonte sur fonte surfaces onctueuses

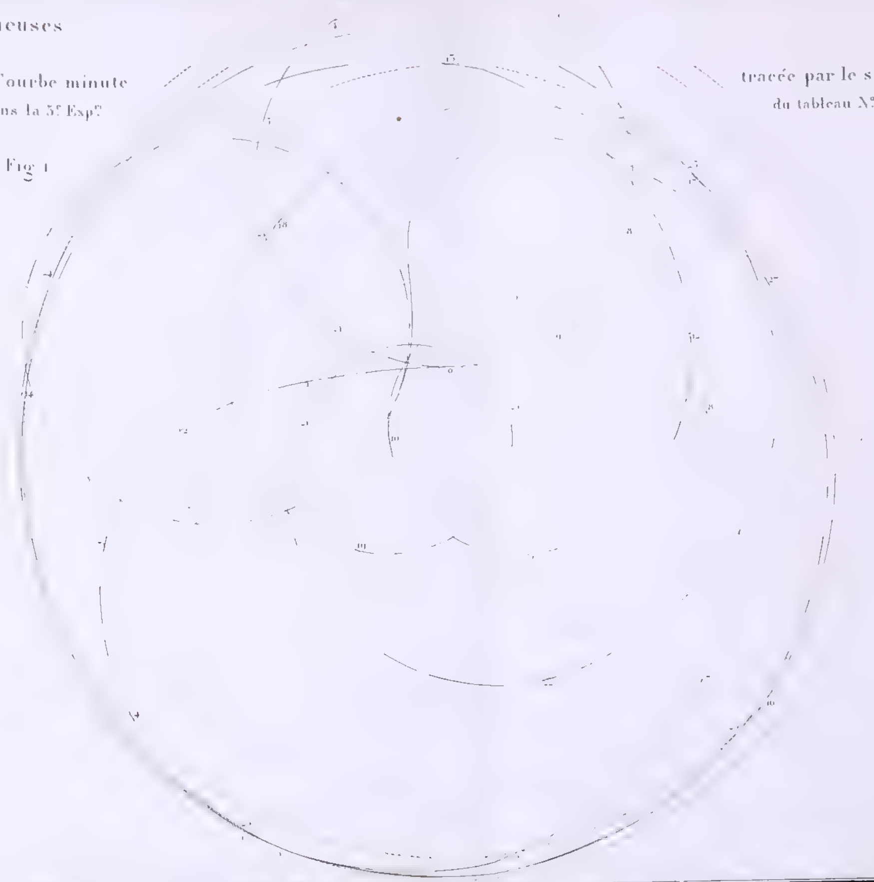
Courbe minute dans la [illegible] Exp. tracée par le style du tableau N° 2

Fig. 2



Courbe minute dans la 5e Exp. tracée par le style du tableau N° 2

Fig. 1

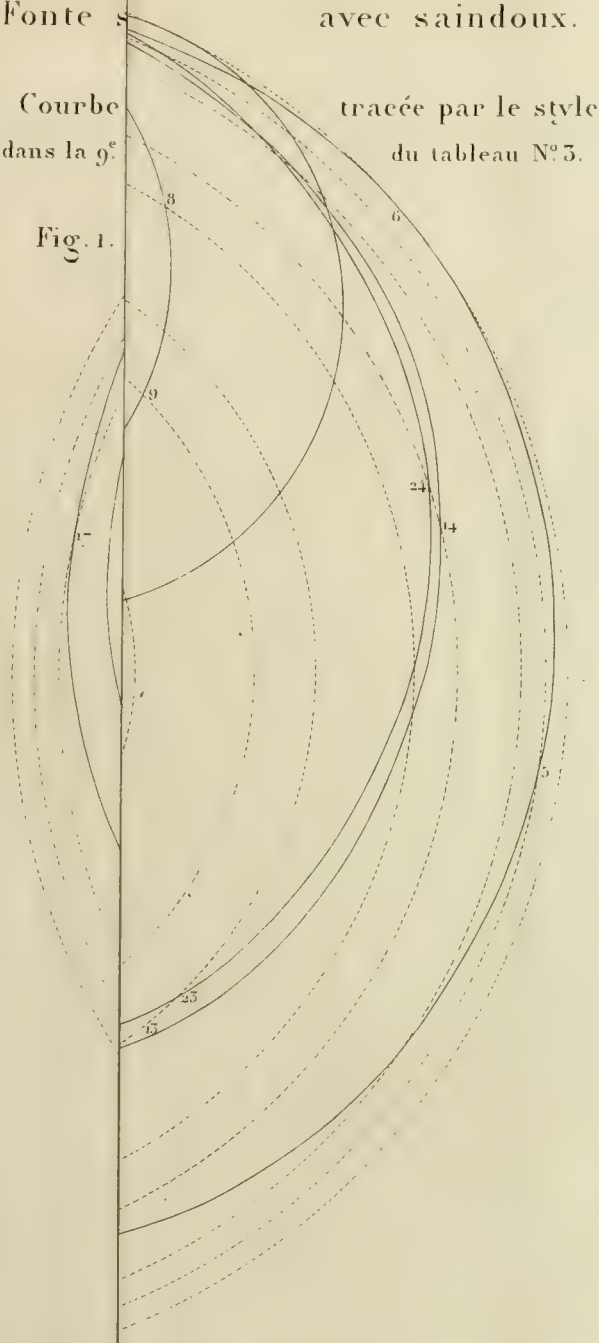


Echelle des [illegible]

Fonte s avec saindoux.

Courbe tracée par le style
dans la 9e du tableau N° 3.

Fig. 1.

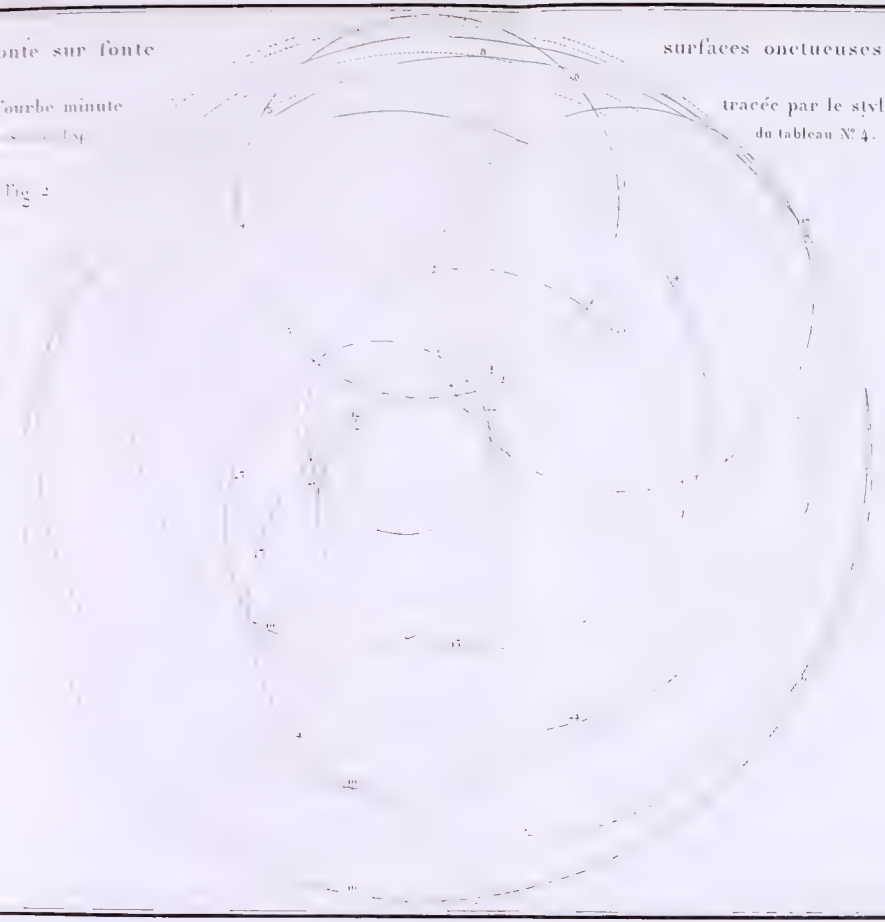


Fonte sur fonte surfaces onctueuses

Courbe minute tracée par le style

dans la 8e Expce du tableau N° 4.

Fig 2

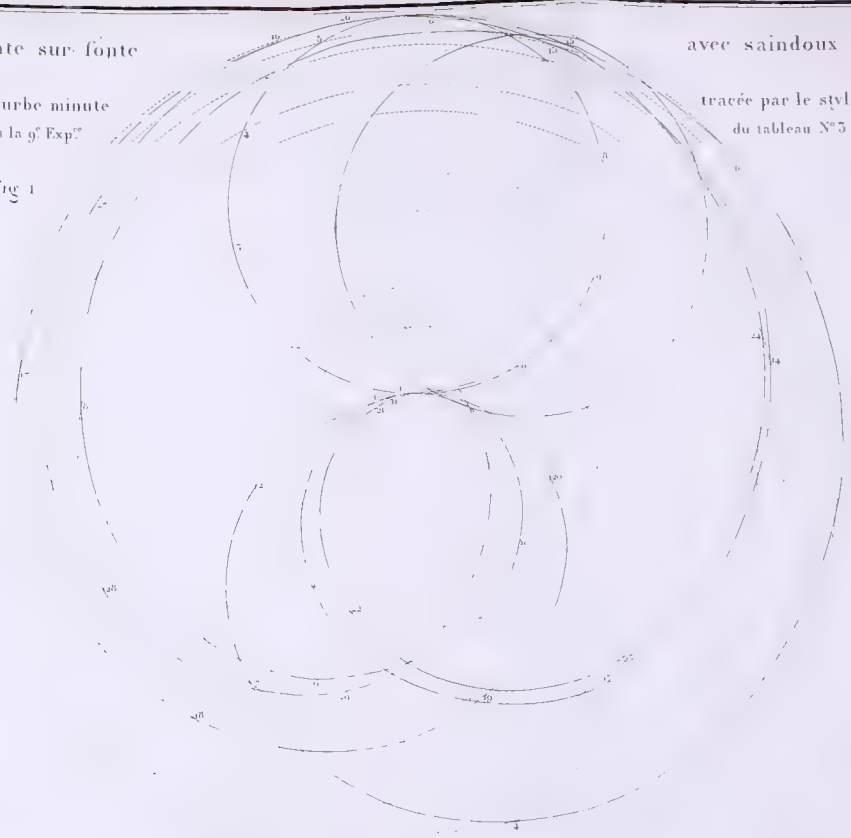


Fonte sur fonte avec saindoux

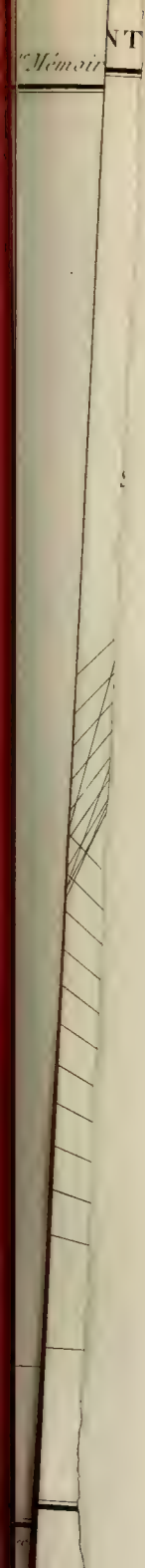
Courbe minute tracée par le style

dans la 9e Expce du tableau N° 5

Fig 1



Echelle des $\frac{2}{3}$



Savans Etrangers Tom IV page 734

Fonte sur fonte

Courbes relevées du mouvement.

Avec saindoux

9e Expce du tableau Nº 1.

Fig 1.

10e Expce du tableau Nº 1.

Fig 2

Avec saindoux

9e Expce du tableau Nº 3.

Fig 3

5e Expce du tableau Nº 2.

Fig 4

Echelle des $\frac{2}{3}$

Surfaces onctueuses

8e Expce du tableau Nº 2

Fig 5

8e Expce du tableau Nº 4

Fig 6

NOUVELLES EXPÉRIENCES

SUR

LE FROTTEMENT,

SUR LA TRANSMISSION DU MOUVEMENT PAR LE CHOC, SUR LA RÉSISTANCE DES MILIEUX IMPARFAITS A LA PÉNÉTRATION DES PROJECTILES ET SUR LE FROTTEMENT PENDANT LE CHOC;

FAITES A METZ EN 1833,

ET SUIVIES

D'une notice sur l'application des appareils qui y ont été employés à diverses recherches de physique, de mécanique et de balistique;

PAR ARTHUR MORIN,
Capitaine d'Artillerie.

TROISIÈME MÉMOIRE.

Je présente dans ce Mémoire la suite des recherches que j'ai entreprises sur le frottement depuis 1831, et dont les deux premières parties ont été accueillies avec bienveillance par l'Académie des Sciences. Dans le courant de l'année 1833, je me suis d'abord occupé de compléter les résultats obtenus sur le frottement de glissement, en les étendant aux principaux matériaux de construction, tels que les pierres calcaires, tendres ou dures, les

briques, en vérifiant les lois et en déterminant la valeur du frottement dans chaque cas, soit pendant le mouvement, soit après un contact plus ou moins prolongé. Les appareils et les moyens d'observation que j'ai employés pour cette partie de mes recherches, sont exactement les mêmes que ceux que j'ai mis en usage dans les deux années précédentes, et qui sont décrits en détail dans mon premier et mon deuxième Mémoire.

Après avoir ainsi vérifié, pour presque tous les corps employés dans les constructions publiques et dans les machines, les lois du frottement, lorsque les corps sont soumis à des pressions constantes, j'ai cru devoir chercher à en faire autant pour le cas où les pressions varient d'intensité, dans un intervalle de temps plus ou moins court, et notamment pour celui où les pressions sont dues aux forces de compression développées pendant l'acte du choc.

Mais, avant de m'occuper de cette question, j'ai dû, par quelques expériences préliminaires, vérifier les lois de la transmission du mouvement par le choc, que l'on établit en mécanique rationnelle et celles que l'on a admises jusqu'ici sur la résistance des milieux imparfaits à la pénétration. Ces recherches, qui n'ont été entreprises qu'occasionellement, sont loin d'avoir reçu tout le développement dont elles sont susceptibles; mais en attendant que je puisse les reprendre et les étendre, je pense qu'elles ne paraîtront pas dénuées d'intérêt, soit par les résultats auxquels je suis parvenu, soit par les procédés d'expérimentation que j'ai mis en usage.

On remarquera, en effet, que ces procédés, qui ne sont qu'une modification de ceux que j'avais employés dans mes précédentes expériences, sont suseeptibles de s'appliquer à une foule de recherches délicates de physique, de mécanique et de balistique, et qu'ils permettent

de déterminer avec une grande précision la loi de certains mouvemens, qui s'accomplissent dans des intervalles de temps de moins d'un centième de seconde, ce qui jusqu'ici avait été tout-à-fait impossible, à l'aide des appareils chronométriques connus.

Ce n'est pas ici le lieu d'entrer dans des détails, et les appareils nécessaires pour ces diverses recherches n'ayant pas encore été construits, je ne pourrais les décrire; mais afin de mettre les physiciens qui pourraient être tentés de les employer à même de les établir, je crois devoir donner dans une notice succincte, placée à la suite de ce Mémoire, une idée des dispositions à adopter. J'espère avoir par la suite le temps et les moyens de faire successivement, et j'ai déjà tenté, diverses applications de ce genre; mais le nombre des objets d'investigation est si grand et le temps si rapide, que je ne puis me flatter de pouvoir les épuiser, et je m'estimerai heureux de voir l'usage de ces appareils se répandre parmi les physiciens.

Le quatrième chapitre de ce Mémoire est consacré aux expériences sur le frottement pendant le choc, et les résultats qu'on en déduit montrent que l'on doit encore, dans ce cas, appliquer à cette résistance les lois qui la régissent dans celui des pressions constantes.

L'approbation de l'Académie des Sciences m'a valu l'appui du Comité d'Artillerie et de M. le Ministre de la Guerre, pour la continuation de mes recherches, et je n'aurai rien à désirer si je puis encore les obtenir cette année.

CHAPITRE I.

Expériences sur le frottement des surfaces planes.

Résultats généraux des expériences sur le frottement des surfaces planes en mouvement les unes sur les autres.

122 (1). Toutes les expériences faites en 1833 sur le frottement des surfaces planes en mouvement les unes sur les autres confirment les lois déduites de celles qui sont consignées dans mes précédens Mémoires, et l'examen des résultats prouve encore que, dans tous les cas examinés cette année, le frottement est :

1°. Proportionnel à la pression ;

2°. Indépendant de la vitesse ;

3°. Indépendant de l'étendue des surfaces.

Ces lois, vérifiées en 1831 sur 16 séries d'expériences, en 1832 sur 152 séries, en 1833 sur 11 séries, correspondantes à des cas différens, soit par la nature, soit par l'état des surfaces en contact, peuvent donc être regardées comme générales, et, attendu que je me suis attaché à les étendre à presque tous les corps en usage dans les constructions et dans les machines, je puis, je crois, regarder comme à peu près terminées et complétées les recherches que je m'étais proposé de faire sur le frottement de glissement des surfaces planes.

Les résultats immédiats des expériences sont consignés dans les tableaux suivans, qui sont accompagnés des observations particulières à chaque cas.

(1) On conservera dans ce Mémoire, pour le chapitre I, la suite des numéros d'orde des Mémoires précédens.

TABLEAU LXXXIV.

123. *Expériences sur le frottement de la pierre calcaire tendre de Jaumont en mouvement sur de la pierre calcaire tendre de Jaumont, sans enduit.*

Nota. La pierre de Jaumont employée dans ces expériences et dans les suivantes est un calcaire oolithique dit *la grande oolithe,* appartenant à l'étage inférieur dans lequel sont compris les fers de Hayange et de Moyeuvre. Ce calcaire est inférieur aux marnes qui recouvrent les plaines de la Wavre; il est rangé parmi ceux d'une dureté moyenne. Sa couleur est jaunâtre et son grain assez homogène; il pèse $2^k,174$ le décimètre cube.

NUMEROS des expériences.	Étendue de la surface de contact.	Pression Q.	POIDS moteur pendant le mouvement P.	TENSION de la corde pendant le mouvement T.	Paramètre 2C.	FORCE accélératrice $\frac{vdv}{dt}=\frac{2}{2C}$	Frottement F	RAPPORT du frottement à la pression.	VITESSE du mouvement accéléré à trois mètres de course.	OBSERVATIONS.
	m. c.	kil.	kil.	kil.	mèt.		kil.		mèt.	
1		142,39	115,25	100,84	2,72	0,735	90,18	0,633	2,10	
2		142,39	115,25	99,01	2,24	0,892	85,06	0,604	2,31	
3	0,0800	572,20	453,25	387,01	2,04	0,980	329,86	0,576	2,42	
4		578,08	469,25	389,67	1,64	1,219	317,78	0,549	2,70	
5		578,08	469,25	389,67	1,64	1,219	317,78	0,549	2,70	
						Moyenne..		0,582		
6		140,36	133,25	111,27	1,76	1,136	95,02	0,676	2,59	
7		150,36	133,25	110,93	1,72	1,162	94,31	0,671	2,64	
8	0,0464	570,17	469,25	419,47	3,50	0,571	386,29	0,677	1,85	
9		570,17	517,25	428,02	1,60	1,250	355,43	0,623	2,74	
10		570,17	517,25	419,10	1,40	1,428	336,11	0,589	2,93	
						Moyenne...		0,674		
11		135,30	109,25	98,98	4,68	0,427	93,09	0,688	1,60	
12		135,30	109,25	95,68	2,76	0,724	85,70	0,633	2,08	
13		135,30	133,25	108,45	1,48	1,351	89,82	0,633	2,85	
14	arêtes arrondies.	271,11	211,25	191,09	4,40	0,454	178,55	0,658	1,65	
15		271,11	211,25	195,49	8,20	0,244	188,75	0,696	1,21	
16		271,11	259,25	220,09	1,96	1,020	191,91	0,709	2,47	
						Moyenne...		0,647		
						Moyenne générale.		0,637		

Observations. Lorsque la pierre calcaire tendre glisse sur de la pierre calcaire tendre, il se forme une poussière

très abondante, provenant de l'usé des surfaces. Cette circonstance n'a point altéré la loi de l'indépendance de la vitesse, et la présence ou l'absence de cette poussière, soit au départ, soit pendant le mouvement, n'ont paru exercer aucune influence sur l'intensité de la résistance. En quelques endroits des semelles et des bandes glissantes, on aperçoit, après le passage, des traces brunes d'un poli assez brillant, formant une petite couche fort dure, que l'acier a peine à rayer. Lorsqu'on enlève ces parties colorées et qu'on les réduit en poussière, la couleur brune disparaît et l'on retrouve celle de la pierre, ce qui montre que cette teinte accidentelle tient au rapprochement des particules.

Dans les expériences où la surface était réduite à des arêtes arrondies, le peu de dureté de la pierre lui permettait de s'user rapidement, et à la fin de la série la surface totale de contact était de $0^{m},0168$. Cette variation, qui a eu lieu en six expériences, est assez rapide pour que l'on ne puisse regarder la surface comme ayant été tout-à-fait constante pendant chacune d'elles; et comme la loi générale de l'indépendance des surfaces est encore parfaitement vérifiée par la loi du mouvement et par la valeur du rapport du frottement à la pression, on voit que cette loi s'étend même au cas où l'étendue de la surface de contact varie pendant le mouvement. C'est, au reste, ce qui est *à priori* une conséquence de l'existence même de cette loi.

TABLEAU LXXXV.

124. *Expériences sur le frottement de la pierre calcaire dure de Brouck en mouvement sur de la pierre calcaire tendre, sans enduit.*

Nota. La pierre calcaire dure de Brouck employée dans ces expériences et dans les suivantes est le *muschelkalk* de formation immédiatement supérieure aux grès bigarrés, et inférieure aux marnes irisées. C'est la roche calcaire la plus dure du département; elle est susceptible de prendre un beau poli. Sa couleur est d'un gris tendre; elle pèse $3^{kil},080$ le mètre cube.

NUMÉROS des expériences.	Étendue de la surface de contact.	Pression Q.	POIDS moteur pendant le mouvement P.	TENSION de la corde pendant le mouvement T.	Paramètre 2C.	FORCE accélératrice $\frac{rd\omega}{dt}=\frac{2}{2C}$	Frottement F.	RAPPORT du frottement à la pression.	VITESSE du mouvement accéléré à trois mètres de course.	OBSERVATIONS.
	m. c.	kil.	kil.	kil.	mèt.		kil.		mèt.	
1		143,56	121,25	106,37	2,80	0,714	95,92	0,668	2,07	
2		143,56	133,25	114,10	2,16	0,925	100,57	0,700	2,55	
3		143,56	133,25	111,95	1,04	1,086	96,05	0,669	2,55	
4	0,0400	303,37	235,25	200,83	2,06	0,970	170,83	0,560	2,41	
5		303,37	289,25	250,79	1,68	1,190	203,99	0,672	2,67	
6		603,37	553,25	483,60	2,58	0,775	435,93	0,722	2,16	
7		603,37	553,25	469,22	1,92	1,041	405,20	0,671	2,50	
						Moyenne....		0,666		

Observations. Après le passage, la pierre calcaire dure est très peu rayée et à peine usée en quelques endroits; mais la pierre calcaire tendre est couverte d'une poussière abondante provenant d'elle seule.

TABLEAU LXXXVI.

125. *Expériences sur le frottement de la brique ordinaire en mouvement sur de la pierre calcaire tendre, sans enduit.*

Nota. Les briques employées dans ces expériences étaient des briques ordinaires bien cuites, rouges, sans traces de vitrification et d'une pâte bien homogène.

NUMÉROS des expériences.	Étendue de la surface de contact.	Pression Q.	POIDS moteur pendant le mouvement P.	TENSION de la corde pendant le mouvement T.	Paramètre 2C.	FORCE accélératrice $\frac{mdv}{dt} = \frac{2}{2C}$	Frottement F.	RAPPORT du frottement à la pression.	VITESSE du mouvement accéléré à trois mètres de course.	OBSERVATIONS.
	m. c.	kil.	kil.	kil.	mèt.		kil.		mèt.	
1	0,0506	133,45	97,25	88,44	5,12	0,390	83,14	0,623	1,53	
2		133,45	121,25	102,10	1,88	1,063	87,66	0,656	2,52	
3		133,45	121,25	102,22	1,92	1,045	88,02	0,659	2,50	
4		401,26	301,25	276,18	5,88	0,340	262,28	0,653	1,43	
5		401,26	349,25	293,80	1,86	1,075	249,83	0,622	2,54	
6		401,26	349,25	297,81	1,08	0,961	258,51	0,644	2,40	
7		401,26	373,25	315,12	1,86	1,075	271,16	0,675	2,54	
8		401,26	373,25	306,33	1,52	1,315	252,54	0,629	2,81	
						Moyenne.....		0,645		

Observations. La brique et la pierre calcaire tendre s'usent réciproquement et laissent une poussière abondante dont la présence n'altère pas les résultats et ne paraît pas diminuer la résistance.

TABLEAU LXXXVII.

126. *Expériences sur le frottement du chêne en mouvement sur de la pierre calcaire tendre, sans enduit.*

Les fibres du bois de chêne sont verticales et perpendiculaires à la surface de la pierre.

NUMÉROS des expériences.	Étendue de la surface de contact.	Pression Q.	POIDS moteur pendant le mouvement P.	TENSION de la corde pendant le mouvement T.	Paramètre 2C.	FORCE accélératrice $\frac{rd\omega}{dt}=\frac{2}{2C}$	Frottement F.	RAPPORT du frottement à la pression.	VITESSE du mouvement accéléré à trois mètres de course	OBSERVATIONS.
	m. c.	kil.	kil.	kil.	mèt.		kil.		mèt.	
1	0,0636	129,16	91,25	70,71	1,18	1,694	48,52	0,383	3,19	
2		129,16	91,25	71,07	1,20	1,666	49,24	0,381	3,17	
3		129,16	97,25	69,29	0,86	2,325	38,83	0,300	3,72	
4		129,19	97,25	76,85	1,28	1,562	56,39	0,436	3,06	
5		600,97	421,25	343,59	1,12	1,785	234,24	0,389	3,27	
6		600,97	421,25	323,68	1,08	1,851	210,29	0,349	3,33	
7		600,97	469,25	349,05	0,94	2,127	218,75	0,364	3,57	
8		600,97	469,25	358,30	1,04	1,923	240,49	0,400	3,41	
						Moyenne....		0,375		

Observations. Il se produit pendant le glissement une altération de la surface du bois, analogue à celle qui a été observée dans le glissement des bois sur les bois.

TABLEAU LXXXVIII.

127. *Expériences sur le frottement du fer en mouvement sur de la pierre calcaire tendre, sans enduit.*

NUMÉROS des expériences.	Étendue de la surface de contact.	Pression Q.	POIDS moteur pendant le mouvement P.	TENSION de la corde pendant le mouvement T.	Paramètre 2C.	FORCE accélératrice $\frac{rd\omega}{dt}=\frac{3}{2C}$	Frottement F.	RAPPORT du frottement à la pression.	VITESSE du mouvement accéléré à trois mètres de course.	OBSERVATIONS.
	m. c.	kil.	kil.	kil.	mèt.		kil.		met	
1		139,31	97,25	90,12	8,70	0,230	86,77	0,622	1,17	
2		139,31	121,25	100,49	1,68	1,190	83,62	0,600	2,67	
3		139,31	121,25	85,44	1,78	1,123	85,44	0,613	2,59	
4	0,0439	401,12	349,25	312,77	3,72	0,537	290,72	0,724	1,79	
5		401,12	349,25	317,28	4,88	0,409	300,55	0,749	1,56	
6		401,12	397,25	344,18	2,34	0,850	309,42	0,771	2,26	
7		401,12	397,25	345,90	2,48	0,806	312,94	0,780	2,20	
						Moyenne....		0,694		

Observations. Le fer se raye en glissant sur la pierre, sans que la loi du mouvement en soit altérée.

TABLEAU LXXXIX.

128. *Expériences sur le mouvement de la pierre calcaire dure en mouvement sur de la pierre calcaire dure, sans enduit.*

NUMEROS des expériences.	Étendue de la surface de contact.	Pression Q.	POIDS moteur pendant le mouvement P.	TENSION de la corde pendant le mouvement T.	Paramètre 2C.	FORCE accélératrice $\frac{rd\omega}{dt}=\frac{2}{2C}$	Frottement F.	RAPPORT du frottement à la pression.	VITESSE du mouvement accéléré à trois mètres de course	OBSERVATIONS.
	m. c.	kil.	kil.	kil.	mèt.		kil.		mèt.	
1	0,0872	151,98	121,25	91,25	1,02	1,960	61,08	0,402	3,43	
2		151,98	121,25	92,03	1,06	1,887	62,98	0,413	3,36	
3		605,79	301,25	252,40	1,76	1,136	182,26	0,301	2,61	
4		605,79	301,25	253,51	1,82	1,099	185,64	0,306	2,56	
5		605,79	385,25	298,43	1,12	1,785	188,21	0,310	3,27	
6		605,79	385,25	302,93	1,20	1,666	200,06	0,332	3,17	
7		605,79	397,25	317,94	1,16	1,724	211,48	0,349	3,21	
8		605,79	397,25	323,19	1,44	1,389	237,42	0,392	2,89	
						Moyenne...		0,350		
9	0,0400	603,37	421,25	345,82	1,52	1,315	264,95	0,437	2,81	
10		603,37	445,25	370,39	1,66	1,204	296,35	0,491	2,68	
11		603,37	445,25	365,56	1,52	1,315	284,69	0,470	2,81	
						Moyenne..		0,466		
12	arêtes arrondies.	136,19	109,25	71,96	0,72	2,777	43,36	0,319	4,08	
13		136,19	109,25	81,57	1,00	2,000	53,76	0,394	3,46	
14		410,00	289,25	225,57	1,16	1,724	153,52	0,374	3,21	
15		410,00	289,25	220,95	1,06	1,886	142,14	0,347	2,36	
							Moyenne.....	0,358		
							Moyenne générale...	0,376		

Observations. La pierre de Brouck étant très dure, il se produit peu de poussière provenant de l'usé; quelques parties se polissent et d'autres se rayent pendant le glissement.

TABLEAU XC.

129. *Expériences sur le frottement de la pierre calcaire tendre en mouvement sur de la pierre calcaire dure, sans enduit.*

NUMÉROS des expériences.	Étendue de la surface de contact.	Pression Q.	POIDS moteur pendant le mouvement P.	TENSION de la corde pendant le mouvement T.	Paramètre. aC.	FORCE accélératrice $\frac{rd\omega}{dt} = \frac{2}{2C}$	Frottement F.	RAPPORT du frottement à la pression.	VITESSE du mouvement accéléré à trois mètres de course.	OBSERVATIONS.
	m. c.	kil.	kil.	kil.	mèt.		kil.		mèt	
1		140,36	109,25	100,94	8,00	0,250	97,36	0,692	1,22	
2		140,36	133,25	112,01	1,84	1,087	96,46	0,687	2,55	
3		140,36	133,25	111,61	1,80	1,111	95,72	0,682	2,58	
4	0,0464	140,36	157,25	117,22	1,04	1,923	89,71	0,639	3,38	
5		570,17	457,25	408,89	3,52	0,568	375,88	0,659	1,84	
6		570,17	469,25	415,48	3,04	0,658	377,24	0,661	1,98	
7		570,17	517,25	414,67	1,32	1,515	326,62	0,573	3,01	
8		570,17	517,25	416,95	1,36	1,470	331,52	0,581	2,97	
							Moyenne.....	0,647		

Observations. Les bandes glissantes en pierre calcaire tendre s'usent et laissent une poussière abondante, dont la formation et la présence n'altèrent pas les résultats.

TABLEAU XCI.

130. *Expériences sur le frottement de la brique en mouvement sur de la pierre calcaire dure, sans enduit.*

On a employé les mêmes briques qu'aux expériences du tableau LXXXVI.

NUMEROS des expériences.	Étendue de la surface de contact.	Pression Q.	POIDS moteur pendant le mouvement P.	TENSION de la corde pendant le mouvement T.	Paramètre Q.	FORCE accélératrice $\frac{rd\omega}{dt} = \frac{2}{2C}$	Frottement F.	RAPPORT du frottement à la pression.	VITESSE du mouvement accéléré à trois mètres de course.	OBSERVATIONS.
	m. c.	kil.	kil.	kil.	mèt.		kil.		mèt.	
1	0,0506	133,45	97,25	85,23	2,80	0,714	75,54	0,566	2,07	
2		133,45	121,25	97,88	1,42	1,408	78,75	0,590	2,90	
3		401,26	277,25	246,68	4,68	0,427	229,21	0,571	1,60	
4		401,26	325,25	284,69	2,64	0,757	253,72	0,632	2,13	
5		401,26	325,25	274,90	1,88	1,063	231,42	0,576	2,50	
6		401,26	349,25	297,81	2,08	0,961	258,51	0,644	2,40	
7		401,26	349,25	290,81	1,72	1,162	243,20	0,606	2,64	
						Moyenne.....		0,598		

Obervations. La brique laisse sur la pierre calcaire dure une poussière assez abondante qui n'altère pas les résultats.

TABLEAU XCII.

131. *Expériences sur le frottement du chêne en mouvement sur de la pierre calcaire dure, sans enduit.*

Les fibres du bois sont verticales et perpendiculaires à la surface de la pierre.

NUMÉROS des expériences.	Etendue de la surface de contact.	Pression Q	POIDS moteur pendant le mouvement P.	TENSION de la corde pendant le mouvement T.	Paramètre 2C	FORCE accélératrice $r\frac{d\omega}{dt} = \frac{2}{2C}$	Frottement F	RAPPORT du frottement à la pression.	VITESSE du mouvement accéléré à trois mètres de course.	OBSERVATIONS.
	m. c.	kil.	kil.	kil.	mèt.		kil.		mèt.	
1		129,16	73,25	58,96	1,44	1,388	42,64	0,330	2,88	
2		129,16	79,25	62,24	1,26	1,587	41,35	0,320	3,09	
3		129,16	85,25	64,71	1,08	1,851	40,34	0,312	3,33	
4	0,0636	129,16	85,25	64,71	1,08	1,851	40,34	0,312	3,33	
5		600,97	397,25	333,55	1,78	1,123	264,76	0,440	2,59	
6		600,97	397,25	338,55	2,02	0,995	277,60	0,461	2,44	
7		600,97	433,25	354,16	1,48	1,351	271,40	0,451	2,84	
8		600,97	433,25	347,20	1,32	1,515	254,39	0,423	3,01	
						Moyenne.....		0,381		

Observations. Il se produit pendant le glissement une altération de la surface du bois, analogue à celle qui a été observée dans le glissement des bois sur les bois, mais beaucoup moins considérable.

TABLEAU XCIII.

132. *Expériences sur le frottement du fer en mouvement sur de la pierre calcaire dure, sans enduit.*

NUMÉROS des expériences.	Étendue de la surface de contact.	Pression Q.	POIDS moteur pendant le mouvement P.	TENSION de la corde pendant le mouvement T.	Paramètre 2C.	FORCE accélératrice $\frac{rd\omega}{dt}=\frac{2}{2C}$	Frottement F.	RAPPORT du frottement à la pression.	VITESSE du mouvement accéléré à trois mètres de course.	OBSERVATIONS.
	m. c.	kil.	kil.	kil.	mèt.		kil.		mèt.	
1	0,0439	139,31	49,25	42,65	2,60	0,769	31,75	0,227	2,15	
2		139,31	49,25	42,65	2,60	0,769	31,75	0,227	2,15	
3		139,31	61,25	51,41	1,92	1,041	36,65	0,263	2,50	
4		139,31	61,25	50,27	1,64	1,219	32,98	0,236	2,70	
5		401,12	193,25	156,08	1,40	1,428	97,68	0,243	2,93	
6		401,12	193,25	153,60	1,28	1,562	89,62	0,223	3,06	
						Moyenne.....		0,236		

Observations. Le fer se raye en glissant sur la pierre, et en altère aussi un peu la surface, sans qu'il en résulte d'irrégularité dans les résultats.

TABLEAU XCIV.

133. *Expériences sur le frottement du fer en mouvement sur de la pierre calcaire dure, mouillée d'eau.*

NUMÉROS des expériences.	Étendue de la surface de contact.	Pression Q.	POIDS moteur pendant le mouvement P.	TENSION de la corde pendant le mouvement T.	Paramètre 2C.	FORCE accélératrice $\frac{rd\omega}{dt}=\frac{2}{2C}$	Frottement F.	RAPPORT du frottement à la pression.	VITESSE du mouvement accélérée à trois mètres de course.	OBSERVATIONS.
	m. c.	kil.	kil.	kil.	mèt.		kil.		mèt.	
1	0,0439	139,31	73,25	59,78	1,56	1,282	41,60	0,299	2,77	
2		401,12	217,25	174,66	1,36	1,470	114,54	0,285	2,97	
3		401,12	241,25	191,84	1,28	1,562	127,96	0,318	3,06	
4		401,12	241,25	185,73	1,10	1,818	111,38	0,277	3,45	
						Moyenne.....		0,295		

Observations. Les résultats de ces expériences montrent

que l'eau augmente le frottement du fer sur la pierre, au lieu de le diminuer. Les aiguiseurs trouvent donc un double avantage à mouiller leurs meules, puisqu'ils ne sont pas obligés d'exercer une pression aussi forte que si elles étaient sèches, et qu'ils empêchent le métal de s'échauffer trop fortement et de se recuire, quand il s'agit d'outils d'acier trempé.

Résultats généraux des expériences sur le frottement des surfaces planes, lorsqu'elles ont été quelque temps en contact.

134. Dans les expériences de 1832, relatives, pour la plupart, aux corps employés dans la construction des machines, je ne m'étais pas occupé en détail de vérifier, pour chacun d'eux, les lois du frottement, après un contact plus ou moins long, parce que l'état de mouvement étant celui où il importe le plus de considérer les machines et de pouvoir les soumettre au calcul, il devait spécialement attirer mon attention. Mais j'avais annoncé que je reprendrais cette étude lorsqu'il s'agirait des matériaux de construction, dont on doit souvent considérer les conditions d'équilibre, après qu'ils ont été maintenus, pendant un temps plus ou moins long, dans une même position, par des supports temporaires ou par suite d'un état de situation qu'il peut être question de modifier.

C'est pour remplir cette promesse que j'ai entrepris les expériences dont il est rendu compte dans les tableaux suivans. Les deux premiers sont néanmoins consacrés au frottement de la fonte et du bois de charme sur la fonte, avec enduit de saindoux, parce que ces corps étant les plus généralement employés aujourd'hui pour la forma-

tion des diverses pièces frottantes des machines, et notamment des engrenages, j'ai cru devoir en faire l'objet d'une recherche particulière.

Après avoir déterminé le frottement des pierres le plus généralement employées à Metz dans les constructions, lorsque les surfaces ont été quelque temps en contact, j'ai fait aussi quelques expériences sur le cas où il y a entre elles interposition de mortier frais, afin de vérifier les lois observées dans tous les autres, et de déterminer la valeur du rapport du frottement à la pression. J'ai reconnu qu'après un contact de quelques minutes, le frottement est encore indépendant de l'étendue des surfaces. Cette recherche conduisait naturellement à celle des lois de la résistance au glissement des assises dans le sens des joints, lorsque le mortier a acquis, sinon toute la dureté que le temps peut lui donner, au moins celle qu'il a après un mois ou quarante jours, durée ordinaire pendant laquelle on laisse en place les cintres et autres appareils de support employés lors de la construction. J'ai entrepris quelques expériences sur ce cas particulier; mais le sujet est trop important pour ne pas être étudié avec maturité, et je remets à l'année prochaine l'examen de cette question, afin d'avoir le temps de rassembler un nombre de résultats suffisant pour inspirer toute confiance.

TABLEAU XCV.

135. *Expériences sur le frottement de la fonte sur la fonte avec enduit de saindoux, lorsque les surfaces ont été quelque temps en contact.*

NUMÉROS des expériences.	ÉTENDUE de la surface de contact.	PRESSION. Q.	TENSION de la corde au moment du départ ou frottement. F.	RAPPORT du frottement à la pression.	DURÉE du contact.
	m. c.	kil.	kil.		
1		504,42	58,19	0,115	2 à 3″
2		504,42	58,19	0,115	7′
3		504,42	52,19	0,103	1 à 2
4		504,42	52,19	0,103	7′
5		1002,42	98,09	0,098	8 à 10′
6		1002,42	103,79	0,103	3 à 4″
7		1002,42	103,79	0,103	3 à 4′
8	0,0052	1488,42	160,79	0,108	1″
9		1488,42	160,79	0,108	9′
10		1488,42	155,09	0,104	2 à 3″
11		1488,42	155,09	0,104	6′
12		990,42	103,79	0,104	3 à 4″
13		990,42	103,79	0,104	6′
14		504,42	52,49	0,104	2 à 3″
15		504,42	52,49	0,104	5′
16			Moyenne....	0,100	
17		502,76	52,49	0,104	3 à 4″
18		502,76	52,49	0,104	8 à 10′
19		502,76	46,78	0,093	5 à 6″
20		502,76	46,78	0,093	8 à 10′
21		1000,76	103,79	0,103	5 à 6″
22	0,0360	1000,76	103,79	0,103	14′
23		1000,76	98,09	0,098	5 à 6″
24		1000,76	98,09	0,098	6′
25		1504,76	149,39	0,100	2 à 3″
26		1504,76	149,39	0,100	8′
27		1504,76	137,99	0,092	3 à 4″
		1504,76	137,99	0,092	5′
			Moyenne.....	0,100	

Observations. Les résultats consignés dans ce tableau confirment que le frottement des métaux, avec enduit, est indépendant de l'étendue de la surface et qu'il atteint son *maximum* dans un temps extrêmement court, qui

n'excède pas une ou deux secondes. On voit aussi qu'avec le saindoux, le rapport du frottement à la pression est égal à 0,10, de même qu'avec le suif, comme on l'avait trouvé en 1832. (*Voy.* le second Mémoire, tableau 81.) Il n'y a donc lieu de tenir compte d'aucune adhérence proportionnelle à l'étendue des surfaces.

TABLEAU XCVI.

136 *Expériences sur le frottement du charme sur la fonte, avec enduit de saindoux, lorsque les surfaces ont été quelque temps en contact.*

NUMÉROS des expériences.	ÉTENDUE de la surface de contact.	PRESSION Q.	TENSION de la corde au moment du départ ou frottement. F.	RAPPORT du frottement à la pression.	DURÉE du contact.
	m. c.	kil.	kil.		
1		125,11	10,77	0,086	10′
2		125,11	10,77	0,086	1″
3		206,72	24,07	0,116	2′
4		206,72	24,07	0,116	7 à 8″
5		206,72	16,47	0,080	5′
6		206,72	16,47	0,080	4 à 5″
7		500,72	56,37	0,112	7′
8		500,72	44,97	0,089	3 à 4″
9		500,72	62,07	0,124	13′
10		500,72	39,27	0,078	4′
11		500,72	39,27	0,078	8 à 10″
12	0,0336...	1004,72	638,87	0,060	4 à 5″
13		1004,72	109,37	0,108	11′
14		1004,72	120,88	0,120	13′
15		1004,72	69,59	0,069	1″
16		1004,72	98,09	0,097	5′
17		1004,72	80,99	0,080	1 à 2″
18		1004,72	103,79	0,103	8 à 9′
19		1004,72	80,99	0,080	5′
20		1504,72	1037,90	0,069	3 à 4″
21		1504,72	115,19	0,070	8 à 9′
22		1504,72	280,49	0,186	19 heures.

Observations. Les résultats consignés dans ce tableau

offrent moins de régularité que ceux du précédent, parce que la porosité du bois et sa compressibilité permettent à l'enduit de se répartir inégalement. On voit néanmoins que le frottement croît lentement avec le temps, et que ce n'est qu'après un contact très long que l'enduit étant peu à peu exprimé, il atteint son *maximum*, qui correspond à l'état des surfaces onctueuses. Lorsque la pression n'a duré que quelques minutes, il arrive souvent que le frottement n'est pas plus grand qu'après une à deux secondes de contact, ce qui tient à ce que l'enduit n'a pas eu le temps de s'exprimer, comme dans le cas d'une plus grande durée.

TABLEAU XCVII.

137. *Expériences sur le frottement du chêne sur le chêne, sans enduit, lorsque les surfaces ont été quelque temps en contact.*

Nota. Les pièces glissantes ont leurs fibres verticales, celles des semelles fixes sont horizontales et parallèles au sens du mouvement.

NUMÉROS des expériences.	ÉTENDUE de la surface de contact.	PRESSION Q.	TENSION de la corde au moment du départ, ou frottement. F.	RAPPORT du frottement à la pression.	DURÉE du contact
	m.c.	kil.	kil.		
1		195,93	83,84	0,427	5 à 6″
2		195,93	83,84	0,427	10′
3		195,93	71,39	0,364	1′
4		315,93	160,79	0,509	6′
5		315,93	137,99	0,436	30″
6	0,0636	315,93	155,09	0,498	8 à 10′
7		399,93	183,79	0,459	8 à 10′
8		501,93	251,99	0,502	10′
9		501,93	194,99	0,388	5 à 6″
10		999,93	367,39	0,367	15′
11		999,93	400,19	0,400	10′
		Moyenne.....		0,434	

Observations. Les résultats consignés dans ce tableau montrent qu'au bout de cinq à six secondes de contact le frottement a déjà atteint son *maximum.*

TABLEAU XCVIII.

138. *Expériences sur le frottement de la pierre calcaire tendre sur la pierre calcaire tendre, lorsque les surfaces ont été quelque temps en contact, sans enduit.*

NUMÉROS des expériences	ÉTENDUE de la surface de contact.	PRESSION Q.	TENSION de la corde au moment du départ, ou frottement. F.	RAPPORT du frottement à la pression.	DURÉE du contact
	m. c.	kil.	kil.		
1		142,39	103,79	0,728	15′
2		150,02	108,49	0,723	15′
3	0,0800	572,20	430,59	0,752	15′
4		578,08	422,99	0,731	5 à 6″
5		578,08	434,39	0,751	5 à 6″
			Moyenne.....	0,737	
6		140,36	103,79	0,739	2′
7	0,0464	570,17	445,79	0,781	10′
8		570,17	445,79	0,781	1′
			Moyenne.....	0,733	
9	Arêtes arron-	135,30	103,79	0,774	2′
10	dies....	273,11	200,68	0,740	5 à 6″
			Moyenne.....	0,757	
			Moyenne générale...	0,740	

Observations. Les résultats consignés dans ce tableau confirment que le frottement est encore, dans le cas actuel, indépendant de l'étendue des surfaces. Cette conclusion et la valeur moyenne que nous trouvons pour

le rapport du frottement à la pression sont tout-à-fait d'accord avec ce qu'a obtenu M. Boistard (1).

On trouve, en effet, dans l'ouvrage de ce savant ingénieur, les résultats suivans :

ÉTENDUE de la surface de contact.	ÉTAT de la surface.	PRESSION.	FROTTEMENT.	RAPPORT du frottement à la pression.
pi. c.		℔	℔	
3	Piquée.	167,50	144	0,860
3	*Idem.*	754,75	565	0,748
3,1666	Bouchardée.	167,50	128	0,764
3,1666	*Idem.*	754,75	572	0,758

M. Rondelet indique (2) que, d'après des expériences répétées, dont il ne rapporte pas les données, il a trouvé que les pierres dont les surfaces sont le mieux taillées commencent à glisser, lorsque les plans sur lesquels elles posent sont inclinés de 28 à 36 degrés. Il en résulterait que le rapport du frottement à la pression des pierres serait compris entre

$$\text{tang } 28^\circ = 0{,}531 \quad \text{et} \quad \text{tang } 36^\circ = 0{,}726.$$

Comme M. Rondelet ne désigne pas la nature de pierre sur laquelle il a opéré, nous ne pouvons établir de discussion pour comparer ses résultats aux nôtres. Mais toutes nos expériences montrant que le frottement est

(1) *Recueil d'expériences et observations*, etc., par M. Boistard, ingénieur en chef des ponts-et-chaussées. Paris, 1822, page 152.

(2) *Traité théorique et pratique de l'art de bâtir*; par J. Rondelet, 1805, tome III, page 240.

proportionnel à la pression, on ne peut admettre, avec cet auteur, que cette résistance soit, comme il le dit, plutôt en raison de la dureté de la pierre que de sa pesanteur.

Il conclut, du reste de ses expériences, que le frottement est indépendant de l'étendue de la surface de contact.

TABLEAU XCIX.

139. *Expériences sur le frottement de la pierre calcaire dure sur la pierre calcaire tendre, lorsque les surfaces ont été quelque temps en contact, sans enduit.*

NUMÉROS des expériences.	ÉTENDUE de la surface de contact.	PRESSION Q.	TENSION de la corde au moment du départ, ou frottement F.	RAPPORT du frottement à la pression.	DURÉE du contact.
	m. c.	kil.	kil.		
1	0,0400	143,56	108,49	0,755	5 à 6″
2		303,37	223,49	0,736	10′
3		603,37	457,19	0,757	15′
		Moyenne.....		0,749	

Observations. D'après les résultats contenus dans ce tableau, il paraît que le frottement de la pierre calcaire dure sur la pierre calcaire tendre est le même que celui de la pierre calcaire tendre sur le calcaire tendre.

TABLEAU C.

140. *Expériences sur le frottement de la brique sur la pierre calcaire tendre, lorsque les surfaces ont été quelque temps en contact, sans enduit.*

NUMÉROS des expériences.	ÉTENDUE de la surface de contact.	PRESSION Q.	TENSION de la corde au moment du départ, ou frottement. F.	RAPPORT du frottement à la pression.	DURÉE du contact.
	m. c.	kil.	kil.		
1		130,75	83,84	0,641	5 à 6″
2		133,45	92,39	0,692	10′
3		260,56	172,29	0,661	15′
4	0,0506	260,56	160,79	0,617	4′
5		392,79	251,99	0,642	15′
6		392,56	246,26	0,627	10′
7		401,26	286,19	0,713	5′
			Moyenne.....	0,665	

TABLEAU CI.

141. *Expériences sur le frottement du chêne sur la pierre calcaire tendre, lorsque les surfaces ont été quelque temps en contact, sans enduit.*

Nota. Les fibres du bois sont verticales et perpendiculaires à la surface de la pierre.

NUMÉROS des expériences.	ÉTENDUE de la surface de contact.	PRESSION. Q.	TENSION de la corde au moment du départ, ou frottement. F.	RAPPORT du frottement à la pression.	DURÉE du contact.
	m. c.	kil.	kil.		
1		129,16	80,99	0,628	3 à 4″
2		129,16	80,99	0,628	10′
3		402,97	251,99	0,625	15′
4	0,0636	504,97	286,19	0,566	15′
5		504,97	331,79	0,657	15′
6		600,97	400,19	0,665	15′
		Moyenne.....		0,628	

TABLEAU CII.

142. *Expériences sur le frottement du fer sur la pierre calcaire tendre, lorsque les surfaces ont été quelque temps en contact, sans enduit.*

NUMÉROS des expériences.	ÉTENDUE de la surface de contact.	PRESSION. Q.	TENSION de la corde au moment du départ, ou frottement. F.	RAPPORT du frottement à la pression.	DURÉE du contact.
	m. c.	kil	kil.		
1	0,0439	139,31	69,59	0,499	10′
2		218,42	83,84	0,383	15′
3		398,42	200,68	0,503	5 à 6″
4		398,42	223,49	0,561	10′
		Moyenne.....		0,486	

Observations. Les irrégularités que l'on remarque dans les résultats du tableau ci-dessus proviennent des altérations qu'éprouve la surface du fer par le glissement sur la pierre, et des aspérités qui en résultent à la surface de contact.

TABLEAU CIII.

143. *Expériences sur le frottement de la pierre calcaire dure sur la pierre calcaire dure, lorsque les surfaces ont été quelque temps en contact, sans enduit.*

NUMÉROS des expériences.	ÉTENDUE de la surface de contact.	PRESSION. Q.	TENSION de la corde au moment du départ, ou frottement. F.	RAPPORT du frottement à la pression.	DURÉE au contact.
	m. c.	kil.	kil.		
1	0,0872	121,25	115,19	0,757	10′
2		605,79	367,39	0,606	2′
		Moyenne.....		0,686	
3	0,0400	143,56	103,79	0,723	5 à 6″
4		603,37	422,99	0,701	10′
		Moyenne.....		0,712	
5	Arêtes arrondies.....	136,19	103,79	0,762	15′
6		410,00	274,79	0,670	2′
		Moyenne.....		0,716	
		Moyenne générale.....		0,704	

Observations. On voit que le frottement de la pierre calcaire dure sur la pierre calcaire dure est sensiblement le même que celui de la pierre calcaire tendre ou dure, sur le calcaire tendre, quoiqu'il y ait une différence considérable entre la dureté des pierres employées.

TABLEAU CIV.

144. *Expériences sur le frottement de la pierre calcaire tendre sur la pierre calcaire dure, lorsque les surfaces ont été quelque temps en contact, sans enduit.*

NUMÉROS des expériences.	ÉTENDUE de la surface de contact.	PRESSION. Q.	TENSION de la corde au moment du départ, ou frottement. F.	RAPPORT du frottement à la pression.	DURÉE du contact.
	m. c.	kil.	kil.		
1		140,36	103,79	0,739	2 à 3″.
2	0,0464	222,17	160,79	0,723	5′
3		570,17	445,79	0,781	10′.
		Moyenne.....		0,748	

Observations. Le frottement de la pierre calcaire tendre sur la pierre calcaire dure est le même que celui du calcaire tendre ou dur, sur le calcaire tendre.

TABLEAU CV.

145. *Expériences sur le frottement de la brique sur la pierre calcaire dure, lorsque les surfaces ont été quelque temps en contact, sans enduit.*

NUMÉROS des expériences.	ÉTENDUE de la surface de contact.	PRESSION. Q.	TENSION de la corde au moment du départ, ou frottement. F.	RAPPORT du frottement à la pression.	DURÉE du contact.
	m. c.	kil.	kil.		
1	0,0506	135,45	92,39	0,692	5′
2		401,26	263,39	0,656	5′
		Moyenne.....		0,674	

Observations. Le frottement de la brique sur le calcaire dur paraît être le même que sur le calcaire tendre.

TABLEAU CVI.

146. *Expériences sur le frottement du fer sur la pierre calcaire dure, lorsque les surfaces ont été quelque temps en contact, sans enduit.*

NUMÉROS des expériences.	ÉTENDUE de la surface de contact.	PRESSION. Q.	TENSION de la corde au moment du départ, ou frottement. F.	RAPPORT du frottement à la pression.	DURÉE du contact.
	m. c.	kil.	kil.		
1		139,31	46,78	0,335	4 à 5″
2	0,0439	401,12	160,79	0,400	10′
3		809,12	407,79	0,539	15′
			Moyenne.....	0,424	

Observations. Le frottement du fer sur le calcaire dur paraît être sensiblement le même que sur le calcaire tendre.

TABLEAU CVII.

147. *Expériences sur le frottement du chêne sur la pierre calcaire dure, lorsque les surfaces ont été quelque temps en contact, sans enduit.*

Nota. Les fibres du bois sont verticales et perpendiculaires à la surface de la pierre.

NUMÉROS des expériences.	ÉTENDUE de la surface de contact.	PRESSION. Q.	TENSION de la corde au moment du départ, ou frottement. F.	RAPPORT du frottement à la pression.	DURÉE du contact.
	m. c.	kil.	kil.		
1		129,16	69,59	0,538	5′
2		129,16	80,99	0,719	3 à 4″
3		129,16	80,90	0,719	10′
4	0,0636	129,16	75,29	0,583	5′
5		600,97	377,39	0,627	15′
6		600,97	411,59	0,684	15′
7		600,97	377,39	0 627	15′
		Moyenne.....		0,643	

Observations. Le frottement du chêne debout sur le calcaire dur paraît être le même que sur le calcaire tendre.

TABLEAU CVIII.

148. *Expériences sur le frottement de la pierre calcaire tendre sur la pierre calcaire tendre, lorsque les surfaces ont été en contact avec interposition de mortier.*

Nota. Le mortier employé dans ces expériences était composé d'une partie de chaux de Vallière, près de Metz, trois parties de sable de rivière passé au tamis, un cinquième de partie d'eau.

NUMÉROS des expériences.	ÉTENDUE de la surface de contact.	PRESSION. Q.	TENSION de la corde au moment du départ, ou frottement. F.	RAPPORT du frottement à la pression.	DURÉE du contact.
	m.c.	kil.	kil.		
1		147,67	115,17	0,780	10′
2		229,48	183,59	0,800	10′
3	0,0800	355,48	263,39	0,740	15′
4		355,48	275,79	0,773	10′
5		355,48	251,99	0,709	10′
6		529,48	445,79	0,841	15′
		Moyenne.....		0,773	
7		140,36	108,49	0,772	10′
8		222,17	172,19	0,775	10′
9		222,17	172,19	0,775	10′
10		354,17	257,69	0,727	30′
11	0,0464	528,17	365,99	0,792	15′
12		528,17			
13		528,17	411,59	0,779	10′
14		530,17	365,99	0,690	15′
15		702,17	525,59	0,748	15
		Moyenne.....		0,745	
16		145,02	115,19	0,794	10′
17	0,0152	226,83	137,99	0,608	10′
18		358,83	217,79	0,607	10′
19		526,83	331,79	0,629	15′
		Moyenne.....		0,659	
		Moyenne générale...		0,735	

Observations. Les résultats consignés dans ce tableau nous montrent qu'après quelques minutes de contact le frottement de la pierre calcaire tendre sur la pierre calcaire tendre, avec interposition de mortier, est le même que si les pierres posaient à sec l'une sur l'autre, et qu'il est indépendant de l'étendue de la surface de contact.

TABLEAU CIX.

149. *Frottement des surfaces planes en mouvement les unes sur les autres.*

INDICATION DES SURFACES EN CONTACT.	ÉTAT des SURFACES.	DISPOSITION des fibres entre elles par rapport au sens du mouvement.	RAPPORT du frottement à la pression.	OBSERVATIONS.
Pierre calcaire tendre sur pierre calcaire tendre.	Sans enduit.	»	0,64	
Pierre calcaire dure sur pierre calcaire tendre.	*Id.*	»	0,67	
Brique ordinaire sur...*id.*...	*Id.*	»	0,65	
Chêne sur.....*id.*....	*Id.*	Les fibres du bois sont verticales et perpendiculaires à la surface de la pierre.	0,38	
Fer forgé sur.....*id.*....	Sans enduit.	»	0,69	
Pierre calcaire dure sur pierre calcaire dure.	»	*Id.*	0,38	
Pierre calcaire tendre sur *id.*....	*Id.*	»	0,65	
Brique ordinaire sur...*id.*....	*Id.*	»	0,60	
Chêne sur.....*id.*....	*Id.*	Les fibres du bois sont verticales et perpendiculaires à la surface de la pierre.	0,38	
Fer forgé sur.....*id.*....	*Id.*	»	0,24	
Fer forgé sur.....*id.*....	Mouillées d'eau.	»	0,30	

TABLEAU CX.

150. *Frottement des surfaces planes lorsqu'elles ont été quelque temps en contact.*

INDICATION DES SURFACES EN CONTACT.	ÉTAT des SURFACES.	DISPOSITION des fibres entre elles et par rapport au sens du mouvement.	RAPPORT du frottement à la pression.	OBSERVATIONS.
Fonte sur fonte.....	Avec enduit de saindoux.	»	0,10	
Chêne sur chêne.....	Sans enduit.	Les fibres des bandes sont verticales ou perpendiculaires au sens du mouvement.	0,43	
Pierre calcaire tendre sur pierre calcaire tendre.	*Id.*	»	0,74	
Pierre calcaire dure sur *id.*....	*Id.*	»	0,75	
Brique sur.....*id*....	*Id.*	»	0,67	
Chêne sur.....*id*....	*Id.*	Les fibres des bandes sont verticales ou perpendiculaires au sens du mouvement.	0,63	
Fer sur.....*id*....	*Id.*	»	0,49	
Pierre calcaire dure sur pierre calcaire dure.	*Id.*	»	0,70	
Pierre calcaire tendre sur *id*....	*Id.*	»	0,75	
Brique sur.....*id*....	*Id.*	»	0,67	
Fer sur.....*id*....	*Id.*	»	0,42	
Chêne sur.....*id*....	*Id.*	»	0,64	
Pierre calcaire tendre sur pierre calcaire tendre.	Avec enduit de mortier, de chaux et de sable.	»	0,74	Après 10 à 15' de contact.

CHAPITRE II.

Expériences sur la transmission du mouvement par le choc.

1. Les expériences rapportées dans les deux premiers Mémoires, et celles qui sont consignées dans le chapitre précédent de celui-ci, établissent d'une manière incontestable la généralité des lois du frottement de glissement, dans tous les cas où la pression reste constante; et comme ces résultats ont été trouvés depuis des pressions de $0^k,41$ jusqu'à celles de 9 kil. environ par centimètre carré, il paraît naturel de croire qu'ils subsistent encore dans le cas où les pressions varient d'un instant à l'autre, et acquièrent rapidement une intensité considérable, ainsi que cela arrive pendant l'acte du choc. C'est, en effet, ce que l'on admet généralement; mais afin de le confirmer par des expériences directes, j'ai cru devoir me livrer à quelques recherches spéciales sur ce sujet, et cela m'a conduit naturellement à vérifier les lois de la transmission du mouvement par le choc, et celles que l'on a admises jusqu'ici sur la pénétration des corps durs dans les milieux imparfaits, ou dans les corps plus ou moins mous.

Ce sont les résultats de ces recherches que je vais rapporter dans les deux chapitres suivans, avant de m'occuper du frottement pendant le choc, et bien qu'elles aient été entreprises sur une petite échelle, et qu'il ne m'ait pas été possible de leur donner, quant à présent, toute l'extension désirable, elles jetteront, je l'espère, quelque lumière sur ces questions, et ouvriront la voie aux nouvelles expériences qui doivent être entreprises prochainement sur le même sujet, par une commission d'officiers d'artillerie.

Expériences sur la transmission du mouvement par le choc.

2. Les géomètres ont établi la théorie générale de la transmission du mouvement par le choc, et les conséquences qu'on en a déduites étant en grande partie journellement vérifiées par les faits, il n'y avait pas, à la rigueur, besoin d'expériences spéciales pour la sanctionner. J'ai pensé, néanmoins, qu'il ne serait pas inutile d'en faire quelques-unes, afin d'apprécier diverses circonstances de cette transmission, et notamment sa durée approximative.

Pour y parvenir, j'ai disposé mon appareil de manière à avoir une trace de la loi du mouvement que prend le corps choqué pendant et après l'acte du choc, ou en d'autres termes, une courbe dont les espaces parcourus et les temps correspondans fussent les coordonnées. J'y suis parvenu de la manière suivante.

Description de l'appareil.

3. Une caisse A, fig. 1 et 2, pl. XIV (1), en bois, dans laquelle on a placé successivement de la terre glaise plus ou moins molle, du sable, des pièces de bois ou de fonte, est suspendue à un dynamomètre *aa*, calculé comme il est indiqué dans la note première, à la fin de ce Mémoire, et susceptible de supporter, sans altération de son élasticité, un effort de traction de 200 kilogrammes.

Ce ressort prend un accroissement de flexion de $0^m,000314$ pour chaque kilogramme de tension, et porte un style destiné à laisser une trace permanente de ses flexions; mais je n'ai pu employer un pinceau à cet usage,

(1) Nous continuerons dans ce Mémoire la série des numéros d'ordre des planches, adoptés dans les Mémoires précédens.

dans le cas actuel, parce que les oscillations alternatives du ressort en auraient fait courber la pointe dans des sens opposés, ce qui aurait pu occasioner des erreurs notables.

Pour éviter cet inconvénient, le style est formé par un tuyau en cuivre, fig. 4, pl. XIV, mobile, à frottement doux, suivant l'axe d'une vis, qui traverse un écrou taraudé dans l'anneau de tension. Au moyen de cette vis, on peut approcher le bout du tuyau jusqu'au contact, avec un plateau mobile *ee* garni d'une feuille de papier, qui doit recevoir la trace du style. Mais, afin d'être sûr que les légers défauts de rectitude de la surface du plateau n'empêcheraient pas cette trace d'être continue, on a interposé entre le bout de la vis et un petit collet ménagé au tuyau, un ressort à boudin très flexible, fig. 4, dont la tension suffit pour appuyer sans cesse l'extrémité du tuyau sur la feuille de papier. Ce tuyau est terminé par un petit cône qui s'y visse, et dont le sommet arrondi est percé d'un trou capillaire, afin que la trace soit aussi fine que le demande l'exactitude des observations; elle n'a au plus que $0^m,0003$ de largeur.

Dans les expériences dont je vais rendre compte, le tuyau du style était placé horizontalement, rempli d'encre de Chine et bouché à l'extrémité opposée au petit cône : la viscosité du liquide a toujours suffi pour alimenter convenablement la trace, une fois qu'elle était amorcée. Cependant, il ne faut pas que la vitesse relative du style et du plateau soit grande, parce qu'alors l'encre ne file plus et l'on n'obtient pas de trace. Ce genre de style peut aussi s'employer dans la position verticale; mais il faut boucher hermétiquement le gros bout, afin que la pression de l'air ne fasse pas couler le liquide trop abondamment.

Le plateau *ee*, destiné à recevoir et conserver la trace des flexions du style, est animé d'un mouvement de ro-

tation uniforme, qui lui est transmis à l'aide d'un volant à ailettes *ff*, fig. 1, 2 et 3, et d'un contre-poids. Je ne pouvais me servir ici de l'appareil d'horlogerie, que j'ai employé dans mes précédentes expériences, parce qu'il fallait que ce fût le plateau lui-même qui tournât, et que le ressort de cet appareil n'aurait pas été assez fort pour produire ce mouvement, qu'il eût d'ailleurs été très difficile de rendre exactement uniforme. On conçoit, en effet, que dans la question actuelle et dans celle des pénétrations, les phénomènes s'accomplissant dans un intervalle de temps qui, parfois n'est pas de $\frac{1}{100}$ de seconde, il importe d'avoir un mouvement rapide et très régulier. La disposition que j'ai adoptée a complétement atteint ce but; et comme je me propose de l'appliquer, en la perfectionnant, à des recherches ultérieures fort délicates, je vais en donner une description succinte.

Appareil chronométrique.

4. Dans les combles de la halle des fontes, j'ai placé un petit treuil *m* (fig. 3, pl. XIV), de $0^m,10$ de diamètre, sur lequel est enroulée une corde à laquelle est suspendu le poids moteur *c*; mais afin que le poids de la corde descendante n'ait pas d'influence sur le mouvement, une autre corde de même diamètre et tendue par un petit contre-poids *c'*, s'enroule quand le premier se déroule; sous chacun des contre-poids est attaché un bout de corde qui descend jusqu'au fond de la fosse, de sorte que les longueurs de corde comprises entre le treuil et le sol, ainsi que celle qui entoure ce treuil, sont toujours les mêmes : le même axe porte un tambour *n* de $0^m,40$ de diamètre, qui est, ainsi que le treuil, parfaitement équilibré autour de cet axe. Une corde sans fin, qui enve-

loppe le tambour, vient embrasser une poulie *s* d'un diamètre de $0^m,14$, sur l'arbre de laquelle est monté un volant à quatre ailettes de $0^m,1$ carré, dont le milieu est à $0^m,30$ de l'axe de rotation. Une seconde poulie, que porte encore le même arbre, transmet, par une corde sans fin, le mouvement au plateau, qui doit recevoir la trace du style du dynamomètre.

La théorie de cet appareil peut s'établir facilement, en partant de l'hypothèse que la résistance de l'air est proportionnelle au carré de la vitesse; mais comme je me propose, et que j'ai même déjà tenté de faire des expériences spéciales sur la loi de cette résistance, au moyen d'appareils analogues, je ne crois pas devoir entrer, à ce sujet, dans aucun détail de calcul. Je me bornerai, pour le moment, à dire que l'observation du mouvement du volant a montré qu'après huit à dix secondes il parvenait à un mouvement très sensiblement uniforme, et qu'en comptant, à partir de cette époque, et à plusieurs reprises, les temps correspondans à vingt tours, à l'aide d'une montre à demi-secondes mortes, on a toujours trouvé la même durée. J'ai l'intention de faire prochainement construire un appareil du même genre, pour l'appliquer à des recherches qui exigeront la plus grande précision; mais sans altérer sa régularité, je réduirai la hauteur de descente des poids, et afin que la résistance accidentelle du style ne puisse exercer sur le mouvement aucune influence, j'ajouterai au régulateur à ailettes un volant proprement dit, dont l'inertie contribuera à la rendre tout-à-fait insensible pendant la courte durée des expériences.

Tel qu'il est aujourd'hui, le nouvel appareil chronométrique a atteint le but que je me proposais, et le plateau du dynamomètre peut être regardé comme animé

d'un mouvement uniforme, indépendant de celui de la caisse et du ressort, et qui pourra nous servir à la mesure des temps, lorsque nous aurons observé, à l'aide d'une montre, la durée d'un certain nombre de révolutions.

Forme générale des courbes du mouvement.

5. On conçoit facilement, par ce qui précède, que quand la caisse A recevra un choc et acquerra une certaine vitesse, le crochet de tension du dynamomètre prendra précisément le même mouvement, et que le style tracera sur le plateau une courbe qui, fournissant une relation entre l'espace ou la quantité dont la caisse sera descendue et le temps ou l'angle décrit par le plateau, mettra à même de déterminer la vitesse imprimée à cette caisse par l'acte du choc. La tension du ressort, et par suite la résistance qu'il oppose à la descente de la caisse augmentant à mesure que cette caisse s'abaisse, la vitesse imprimée sera bientôt détruite, et alors, la réaction du ressort faisant remonter la caisse, il en résultera une autre courbe relative à l'ascension, qui sera suivie d'une seconde descente, et ainsi de suite. On aura donc sur le plateau une courbe ondulée concentrique avec lui, dont chaque ondulation correspondra à une oscillation du ressort. Les frottemens des articulations du dynamomètre et des attaches de la caisse ainsi que d'autres causes consommant une certaine quantité de travail, l'amplitude de ces oscillations diminuera, et le mouvement s'éteindra graduellement, mais avec d'autant plus de lenteur que le jeu de ces articulations sera plus libre et plus doux.

Usage qu'on pourrait faire de cet appareil pour déterminer les lois du mouvement oscillatoire d'une lame élastique.

6. Il est facile de voir le parti que l'on pourrait tirer de ce dispositif pour déterminer par expérience la loi des oscillations d'une lame élastique, et obtenir ainsi une courbe dont les temps et les flexions de cette lame seraient les coordonnées, et l'on observera aussi que les flexions étant en rapport direct avec la résistance de la lame, cette courbe fournirait à la fois une relation entre le temps, la flexion et l'effort. Rien n'empêchant d'ailleurs de garnir la lame de plusieurs styles, qu'on formerait alors avec des pinceaux, pour ne pas offrir de résistance à son mouvement, on pourrait déterminer la position des nœuds et la courbure de cette lame, à un instant quelconque de la vibration. Je n'insisterai pas davantage sur cette application de l'appareil que j'ai décrit plus haut, et je reviens à l'objet principal pour lequel je l'ai construit.

Moyens employés pour suspendre et lâcher à volonté le corps choquant.

7. Nous avons donc actuellement le moyen d'observer la loi du mouvement de la caisse, il nous reste à indiquer celui que j'ai employé pour suspendre et laisser tomber à volonté le corps choquant dans cette caisse, d'une hauteur donnée. Il consiste en deux couples de pièces pendantes verticales KK, fig. 1 et 2, pl. XIV, percées à hauteurs égales, de trous espacés de $0^m,05$ en $0^m,05$, et placées symétriquement par rapport au plan vertical de suspension de la caisse. Deux chevilles en fer introduites dans les trous correspondans d'un même couple, servent de

supports à une traverse en chêne horizontale *ll*, dont le plan milieu correspond exactement à celui du dynamomètre, et qui passe entre les brins de suspension de la caisse, sans les toucher ni les gêner aucunement dans leurs mouvemens. En montant ou abaissant les chevilles, on peut faire varier à volonté la hauteur de la traverse *ll* au-dessus de la caisse. Une vis *o*, fig. 1, 2 et 5, avec rosette ou écrou à oreilles, passe librement à travers un trou pratiqué au milieu de cette traverse. La tête de cette vis, se trouve en bas, et soutient un étrier *q* qui porte l'axe d'une petite tenaille du genre de celles qu'on nomme *écrevisses* dans l'artillerie, et qui servent à repêcher les corps plongés dans l'eau. Entre les petites branches *s* de l'écrevisse, on engage le nœud d'une corde ou un anneau qui soutient un projectile, et afin que le poids de ce corps ne fasse pas ouvrir la tenaille, on rapproche autant que possible les anneaux qui terminent ses longues branches, en y passant un fil, que l'on serre et que l'on noue. La vis *o* est filetée sur une longueur de $0^m,10$, de sorte qu'après avoir placé convenablement la traverse *ll* et avoir ainsi amené le projectile à peu près à sa position, on peut, à l'aide de l'écrou à oreilles, élever ce corps exactement à la hauteur voulue.

Pour lâcher le corps choquant et le laisser tomber librement sur la caisse, sans occasioner aucun ébranlement dans l'appareil, il suffit de brûler avec une lumière le fil qui rapproche les longues branches de la tenaille. Ce corps descend alors, en vertu de son propre poids, et atteint la caisse avec une vitesse qui est celle due à la hauteur de sa chute, attendu que, dans toutes nos expériences, on a pu négliger l'effet de la résistance de l'air.

Mode d'expérimentation.

8. D'après la description précédente, il est facile de concevoir comment les expériences s'exécutent. Nous allons l'indiquer en peu de mots. On suspend le projectile à la hauteur déterminée au-dessus de la surface du corps qui, placé dans la caisse, doit recevoir le choc. Lorsqu'on a observé, à plusieurs reprises, le temps employé par le plateau pour faire vingt tours, et qu'il est toujours le même, on connaît la vitesse de son mouvement uniforme et l'on brûle le fil qui lie les branches de la tenaille. Le corps qui y est suspendu se trouve libre et tombe dans la caisse; celle-ci, cédant graduellement à la réaction, s'abaisse et acquiert une vitesse qui va d'abord en croissant; mais quand la réaction réciproque du corps a cessé, la résistance du ressort à la flexion retarde ce mouvement, la vitesse décroît et finit par devenir nulle. La courbe du mouvement doit donc être d'abord tangente au cercle tracé par le style, dans sa position de repos; elle s'en écarte ensuite graduellement, sous une inclinaison qui croît jusqu'à un certain terme, au-delà duquel elle fait avec les rayons menés au centre du plateau, des angles de plus en plus grands, tout en continuant à s'éloigner de ce centre. La tangente à la courbe finit par devenir perpendiculaire au rayon, à une certaine distance, qui correspond à l'instant où la vitesse imprimée à la caisse a été éteinte par la résistance du ressort. Au-delà de ce point, la réaction du ressort fait remonter la caisse, et le style décrit en sens contraire une autre courbe relative à cette ascension. Ce mouvement oscillatoire se continue ainsi pendant quelques instans, et l'amplitude des oscillations va toujours en décroissant, par suite de la consommation de travail occasionée par la résistance des articulations.

La régularité et la continuité parfaite de ces courbes montrent qu'un appareil de ce genre pourrait servir, ainsi que nous l'avons indiqué plus haut, à déterminer avec une grande précision la loi du mouvement oscillatoire d'une lame élastique.

Relèvement des courbes.

9. Quant aux expériences dont nous nous occupons ici, il n'y a pas lieu d'examiner ces diverses oscillations successives, et la portion de courbes qui correspond à la première demi-oscillation descendante, est la seule qui nous intéresse. Son relèvement et sa transformation en une courbe à coordonnées rectangulaires dont les temps seront les abscisses et dont les espaces seront les ordonnées, n'offrent aucune difficulté. Il suffit, en effet, de partager la circonférence en degrés ou en demi-degrés, à partir du point où la courbe d'oscillation quitte le cercle du repos, et de mener par chaque point de division, un rayon que l'on prolonge jusqu'à la rencontre de la courbe. Le nombre de degrés compris entre l'origine et le rayon, qui correspond à un point quelconque, fournit la valeur du temps écoulé depuis que la caisse a commencé à descendre, puisqu'on sait par l'observation directe que la circonférence entière, ou 360°, répondent à un temps connu, et la longueur du rayon comprise entre le cercle du repos et la courbe, donne en grandeur réelle la quantité dont la caisse s'est abaissée pendant le même temps. On pourrait donc facilement former une table à deux colonnes, dont l'une contiendrait les temps ou les abscisses, et l'autre les espaces parcourus ou les ordonnées; mais comme ici les uns et les autres sont donnés directement, on peut, sans se donner la peine de transcrire cette table,

passer immédiatement au tracé de la courbe à coordonnées rectangulaires; c'est ce que nous avons fait dans tous nos relèvemens, pour abréger les opérations. Nous devons faire observer que la courbe de descente quittant le cercle de départ tangentiellement, le point de séparation est un peu incertain, mais l'erreur ne peut avoir d'influence notable sur la forme de la courbe à une certaine distance.

La courbe relevée étant donc supposée construite ainsi qu'il vient d'être dit, il résulte de ce qui précède que la tangente trigonométrique de l'angle d'inclinaison de ses tangentes sur l'axe des abscisses ou des temps, nous donnera la vitesse de descente de la caisse, à l'instant correspondant à l'abscisse du point de contact, et puisque cette vitesse croît depuis zéro jusqu'à une certaine valeur *maximum* correspondante à la fin du choc ou de la réaction réciproque des corps, pour décroître ensuite jusqu'à zéro, il s'ensuit que la courbe relevée aura un point d'inflexion pour lequel la tangente à la courbe fera, avec l'axe des abscisses, le plus grand angle possible, et la tangente trigonométrique de cet angle nous donnera la valeur de la vitesse *maximum* et finale imprimée à la caisse, quand le choc est terminé.

Comment on déduit du tracé de ces courbes la vitesse imprimée au corps choqué.

10. La loi géométrique de cette courbe dépend de celle de la compression des corps en contact, et serait par conséquent fort difficile à déterminer; mais nous n'avons pas besoin de la connaître pour trouver, avec une approximation suffisante la vitesse *maximum* imprimée au corps choqué, lorsque toute compression réciproque a cessé. Il nous suffit, en effet, comme nous venons de l'indi-

quer, de connaître l'inclinaison de la tangente à la courbe en son point d'inflexion; or, de part et d'autre de ce point, la courbe, sur une petite étendue, est sensiblement en ligne droite, et les points relevés sont très rapprochés les uns des autres, puisqu'on peut facilement les obtenir de demi-degré en demi-degré, ce qui correspond à un intervalle de $0'',0035$ au plus, dans les expériences où le mouvement du plateau a été le plus lent. On pourra donc déterminer, à très peu près, la position de la tangente cherchée, en menant à la règle une ligne droite qui, passant par les deux ou trois points entre lesquels doit évidemment tomber le point d'inflexion, laisse la partie de la courbe relative à la période d'accélération au-dessous d'elle, et la partie relative au mouvement retardé en-dessus, tout en s'approchant le plus possible de la courbe. Cette construction exige du soin dans le relèvement des courbes, et un peu de tact et d'adresse dans le tracé de la tangente; mais il est évident qu'elle est suffisamment exacte pour la comparaison des résultats de l'expérience avec ceux du calcul. On remarquera, d'ailleurs, que de toutes les tangentes que l'on peut mener à l'une ou à l'autre branche de la courbe, celle que l'on vient de tracer doit être la plus éloignée de l'axe des abscisses, ou faire avec cet axe le plus grand angle. On voit que la position du point d'inflexion ne peut pas être déterminée exactement, mais que cela n'influe pas sur le résultat d'une manière notable.

Formules employées pour comparer les résultats de l'expérience à ceux de la théorie.

11. Après avoir décrit notre appareil et les procédés de relèvement et d'observation, ainsi que le moyen d'en

déduire la vitesse réellement transmise par le choc, nous allons rapporter tous les résultats de nos expériences, pour les comparer à ceux de la théorie du choc des corps mous ou élastiques, telle qu'elle est établie en mécanique rationnelle. Nous rappellerons, à cet effet, qu'en nommant:

P le poids de la caisse qui reçoit le choc, y compris celui de sa suspension et de la lame inférieure du ressort, dont nous regardons toutes les parties comme animées de la même vitesse que la caisse, et en négligeant le poids de la lame supérieure, dont les extrémités seules s'abaissent, ce qui compense sensiblement l'excès de vitesse que nous supposons à celles de la lame inférieure;

p le poids du projectile;

v la vitesse due à la hauteur de chute h, comprise entre le projectile et la surface du corps, qui reçoit immédiatement le choc;

u la vitesse commune aux deux corps, à l'instant de la plus grande compression, et avec laquelle ils marchent de compagnie, quand l'un des deux est mou et qu'ils restent unis l'un à l'autre;

V′ la vitesse imprimée à la caisse, après que le choc est complétement terminé;

V la vitesse du projectile au même instant.

On aura, d'après la théorie du choc des corps (1), pour le cas du choc des corps mous, ou d'un corps dur et d'un corps mou,

$$u = \frac{p}{\mathrm{P}+p}\,v, \quad \text{et} \quad \mathrm{V} = \mathrm{V}' = u,$$

et pour celui de deux corps élastiques,

$$\mathrm{V}' = 2u = \frac{2p}{\mathrm{P}+p}\,v, \quad \text{et} \quad \mathrm{V} = 2u - v.$$

(1) *Traité de Mécanique*, de M. Poisson, T. II, pag. 26 et suiv., 2e édition.

Résultats des expériences.

12. Nous allons maintenant rapporter les résultats des expériences, et nous ferons suivre chaque tableau d'observations particulières.

Toutes les données de chaque expérience sont consignées dans les tableaux suivans, ainsi que les résultats. Quant à la durée de la transmission, elle est fournie par l'abscisse du point d'inflexion de la courbe; mais attendu que ce point, ainsi que l'origine des abscisses, ne sont déterminés qu'approximativement, on voit que cette durée ne peut être assignée exactement.

TABLEAU I.

12. *Expériences sur la transmission du mouvement par le choc d'un corps sphérique en fonte sur une caisse remplie de terre glaise.*

NUMÉROS des expériences.	POIDS de la caisse et de sa suspension P.	POIDS de la sphère p.	POIDS total P + p	HAUTEUR de chute de la sphère h	VITESSE due à la hauteur h v	VITESSE communiquée à la caisse : d'après la théorie. u	VITESSE communiquée à la caisse : d'après l'expérience. u	DURÉE approximative de la transmission du mouvement.	OBSERVATIONS.
	kil.	kil.	kil.	m.	m.	m.	m	//	
1	60,235	6	66,235	0,20	1,981	0,189	0,182	0,017	La terre glaise dont la caisse était remplie dans les expériences de 1 à 19 inclusivement est celle sur laquelle ont été faites les observations relatives à la pénétration dont les résultats sont consignés au tableau 4 du chap. III, et desquelles on a déduit pour la valeur moyenne de la résistance constante par mètre quarré K = 29677 kil.
2	60,235		66,235	0,40	2,801	0,268	0,260	0,012	
3	60,235		66,235	0,50	3,135	0,300	0,280	0,020	
4	61,095		67,095	0,50	3,135	0,280	0,285	0,020	
5	60,235	11,988	72,223	0,10	1,400	0,232	0,255	0,025	
6				0,10	1,400	0,232	0,260	0,025	
7				0,20	1,981	0,330	0,330	0,019	
8				0,20	1,981	0,330	0,335	0,019	
9				0,30	2,426	0,403	0,400	0,021	
10				0,30	2,426	0,403	0,350	0,021	
11				0,30	2,426	0,403	0,410	0,023	
12				0,40	2,801	0,465	0,462	0,024	
13				0,40	2,801	0,465	0,479	0,025	
14	60,235	20,280	80,515	0,10	1,400	0,353	0,366	0,025	
15				0,10	1,400	0,353	0,366	0,024	
16				0,20	1,981	0,499	0,490	0,020	
17				0,20	1,981	0,499	0,365	0,024	
18				0,35	2,620	0,660	0,625	0,026	
19				0,35	2,620	0,660	0,600	0,025	
20	67,025	6	73,025	0,20	1,981	0,163	0,165	0,063	La terre glaise dont la caisse était remplie dans les expériences de 20 à 26 inclusivement est celle sur laquelle ont été faites les observations relatives à la pénétration dont les résultats sont consignés au tableau 1 du chap. III, et dont on a déduit pour valeur moyenne de la résistance constante par mètre quarré K = 1689 kil.
21				0,20	1,981	0,163	0,150	0,063	
22				0,30	1,981	0,199	0,185	0,062	
23				0,40	2,426	0,230	0,215	0,062	
24	67,025	20,025	87,305	0,10	2,801	0,325	0,305	0,073	
25				0,10	1,400	0,325	0,303	0,083	
26				0,20	1,981	0,460	0,440	0,072	

Observations sur les résultats contenus dans le tableau précédent.

14. Dans les expériences consignées dans le tableau précédent, les données ont varié, savoir :

Le poids du corps choquant, de $6^{kil.}$ à $20^{kil.},28$, et son rapport à celui de la caisse remplie de terre glaise, de $\frac{1}{11}$ à $\frac{1}{3}$;

La hauteur de chute, de $0^{m},10$ à $0^{m},50$;

La résistance de la terre glaise à la pénétration, de 17,5 à 1.

En comparant les valeurs de la vitesse transmise à la caisse, obtenues par la méthode graphique du n° 10, avec celles que l'on déduit de la théorie, on trouve entre elles un accord aussi parfait qu'on peut le désirer, et les différences, tantôt en plus, tantôt en moins, ne s'élèvent jamais au-delà de $\frac{1}{15}$ à $\frac{1}{16}$ de la vitesse théorique. Ces expériences nous offrent donc une vérification complète des conséquences de la théorie, en ce qui concerne le choc d'un corps dur sur un corps mou.

Comme exemple de la forme qu'affectent les courbes tracées par le style du dynamomètre, je donne, Pl. 15, fig. 1 et 4, la courbe minute et une portion de son relèvement.

TABLEAU II.

15. *Expériences sur la transmission du mouvement par le choc d'un corps sphérique en fonte sur une caisse remplie de sable.*

Ce sable, extrait de la Moselle, était fin, assez égal de grain, légèrement humide au toucher.

NUMEROS des expériences.	POIDS de la caisse et de sa suspension P	POIDS de la sphère de fonte p	POIDS total P + p	HAUTEUR de chute de la sphère h	VITESSE due à la hauteur h v	VITESSE communiquée à la caisse d'après la théorie. u	VITESSE communiquée à la caisse d'après l'expérience u	DURÉE approximative de la transmission du mouvement.	OBSERVATIONS.
	kil.	kil.	kil.	m.	m.	m.	m.		
1	61,215	11,988	73,203	0,10	1,400	0,229	0,190	0″031	
2	*Id.*	*Id.*	*Id.*	*Id.*	*Id.*	*Id.*	0,190	0,031	
3	61,215	11,988	73,203	0,20	1,981	0,324	0,280	0,030	
4	*Id.*	*Id.*	*Id.*	*Id.*	*Id.*	*Id.*	0,281	0,032	
5	61,215	11,988	73,203	0,30	2,426	0,397	0,315	0,035	
6	*Id.*	*Id.*	*Id.*	*Id.*	*Id.*	*Id.*	0,325	0,042	
7	61,215	20,280	81,495	0,10	1,400	0,348	0,315	0,438	
8	*Id.*	*Id.*	*Id.*	*Id.*	*Id.*	*Id.*	0,320	0,038	
9	61,215	20,280	81,495	0,20	1,981	0,493	0,430	0,045	
10	*Id.*	*Id.*	*Id.*	*Id.*	*Id.*	*Id.*	0,425	0,038	

Observations. Les résultats de ces expériences offrent aussi une vérification de la théorie du choc des corps durs sur les corps mous, auxquels il paraît que l'on doit assimiler le sable.

Comme exemple de la forme qu'affectent les courbes tracées par le style du dynamomètre, je donne, Pl. 15, fig. 2 et 5, la courbe minute et une portion de son relèvement.

TABLEAU III.

16. *Choc d'un corps sphérique en fonte sur une caisse garnie de pièces de bois de* $0^m,08$ *d'épaisseur.*

NUMÉROS des expériences.	POIDS de la caisse et de sa suspension P	POIDS de la sphère de fonte p	POIDS total $P+p$	HAUTEUR de chute de la sphère h	VITESSE due à la hauteur h v	VITESSE communiquée à la caisse : d'après la théorie u	VITESSE communiquée à la caisse : d'après l'expérience, u	DURÉE approximative de la transmission du mouvement.	OBSERVATIONS.
	kil.	kil.	kil.	m.	m.	m.	m.		
1	21,950	11,988	33,938	0,10	1,400	0,490	0,540	0″0076	
2	21,950	11,988	33,938	0,20	1,981	0,694	0,660	0,0075	
3	21,950	11,988	33,938	0,30	2,426	0,850	0,840	0,0074	
4	21,960	20,280	42,23	0,10	1,400	0,672	0,690	0,0080	
5	*Id.*	*Id.*	*Id.*	*Id.*	*Id.*	*Id.*	0,655	0,0080	
6	*Id.*	*Id.*	*Id.*	*Id.*	*Id.*	*Id.*	0,672	0,0090	

Observations. Il paraît, d'après ces expériences, que le bois doit être assimilé aux corps mous, lorsqu'il est choqué par un corps dur en fonte. Mais je dois faire observer que les pièces de bois placées dans la caisse étaient disposées en lits recroisés, ce qui pouvait les empêcher de prendre une flexion générale, et il sera intéressant d'examiner par la suite si la disposition des pièces choquées et l'intensité du choc n'apportent pas parfois quelques modifications à cette conclusion.

TABLEAU IV.

17. *Choc d'un corps sphérique en fonte sur une plaque de fonte.*

NUMÉROS des expériences.	POIDS de la caisse et de sa suspension P	POIDS de la sphère de fonte p	POIDS total $P+p$	HAUTEUR de chute de la sphère h	VITESSE due à la hauteur h v	VITESSE communiquée à la caisse : d'après la théorie $2u$	VITESSE communiquée à la caisse : d'après l'expérience u	DURÉE approximative de la transmission du mouvement.	OBSERVATIONS.
	kil.	kil.	kil.	m.	m.	m.	"	m.	
1	61,215	6,00	67,215	0,40	2,801	0,500	0,500	0,0085	
2	*Id.*	*Id.*	*Id.*	*Id.*	*Id.*	*Id.*	0,480	0,0085	
3	61,215	6,00	67,215	0,50	3,135	0,560	0,570	0,010	
4	*Id.*	*Id.*	*Id.*	*Id.*	*Id.*	*Id.*	0,560	0,010	
5	61,215	6,00	67,215	0,60	3,433	0,633	0,626	0,008	
6	*Id.*	*Id.*	*Id.*	*Id*	*Id.*	*Id.*	0,610	0,008	
7	61,215	11,988	73,203	0,20	1,981	0,648	0,720	0,007	
8	*Id.*	*Id.*	*Id.*	*Id.*	*Id.*	*Id.*	0,750	0,007	
9	61,215	11,988	73,203	0,49	2,801	0,917	0,910	0,0065	
10	*Id.*	*Id.*	*Id.*	*Id.*	*Id.*	*Id.*	0,950	0,0065	
11	61,215	11,988	73,203	0,50	3,135	1,026	0,005	0,0075	
12	*Id.*	*Id.*	*Id.*	*Id.*	*Id.*	*Id.*	1,050	0,0075	

Observations. Les résultats des expériences rapportées dans le tableau ci-dessus montrent que la plaque de fonte, par l'intermédiaire de laquelle le mouvement a été transmis, a agi comme un corps parfaitement élastique, puisque la vitesse de descente de la caisse, déduite de l'observation, est toujours à très peu près la même que celle que donne la théorie; mais il y a lieu de faire ici quelques remarques importantes.

Lorsque le projectile est tombé dans la caisse, le son du premier choc est immédiatement suivi de plusieurs autres coups successifs très rapprochés, et si l'on examine la courbe de descente tracée par le style (*voyez* Pl. 15),

on y observe une série d'inflexions qui indiquent aussi l'effet de plusieurs chocs. Au bout d'un temps très court, qui, dans nos expériences, n'a jamais dépassé $0'',10$, la courbe a repris sa continuité, la descente est achevée et la caisse remonte par l'action du ressort. Dans cette seconde période, il se produit parfois aussi un nouveau choc annoncé par une inflexion de la courbe; mais avant que cette oscillation ascendante soit terminée, tout mouvement relatif est éteint et la courbe redevient continue sans inflexion, et il s'est alors écoulé au plus $0'',2$.

Cette succession de chocs n'a rien en elle-même que de fort naturel et provient de ce que la plaque et le boulet se séparent après le choc, puis se rencontrent de nouveau à plusieurs reprises. Mais en l'examinant avec soin, elle nous révèle une circonstance remarquable.

Si le choc avait lieu entre des corps parfaitement élastiques en leur point de contact, puisque la caisse et la plaque qu'elle contient sont animées d'une vitesse $2u$, le projectile devait remonter avec une vitesse $2u - v$ (*voy.* n° 11). Or, si nous appliquons cette règle à la 11^{e} expérience du tableau précédent, nous trouverons pour cette vitesse de retour du projectile

$$2u - v = -2^{m},109.$$

Le boulet animé de cette vitesse remonterait donc pendant que la caisse continue à descendre avec une vitesse que la résistance du ressort diminue à chaque instant. Le temps que la gravité emploierait à éteindre la vitesse du projectile serait

$$t = \frac{2^{m},109}{g} = 0'',214,$$

puis il redescendrait, et ce n'est que dans ce retour qu'il

pourrait rencontrer de nouveau la plaque, et comme d'ailleurs celle-ci s'écarte (de $0^m,14$, au plus, avant le choc, fig. 3 et 16, pl. XV) fort peu en-dessus et en-dessous de sa position primitive dans les oscillations du dynamomètre, il s'ensuit que le second choc ne pourrait avoir lieu qu'environ $0'',428$ après la fin du premier, tandis que la courbe nous montre qu'il se produit toujours beaucoup plus tôt. En effet, dans la fig. 6, par exemple, i étant le point d'inflexion, c'est-à-dire celui où l'acte du premier choc est terminé, il est facile de voir que le second a eu lieu vers a, et que le temps écoulé entre ces deux instans est égal à peu près à la différence des abscisses de a et de i, ou au plus à $0'',010$. De plus, en vertu de la vitesse $-2^m,109$, le projectile devrait s'élever à $0^m,227$ environ, tandis qu'il s'écarte très peu de la plaque, ainsi qu'on l'a toujours observé. Il est donc bien démontré, par le tracé des courbes, que le projectile n'a pas une vitesse de retour égale à

$$2u - v,$$

ainsi que l'indiquerait la théorie. Comment se fait-il donc que, par rapport à la caisse, le choc ait lieu comme entre des corps élastiques, et qu'il n'en soit pas de même par rapport au boulet? C'est ce que je vais tâcher d'expliquer.

Dans notre appareil, il faut observer que la plaque de fonte n'est pas entièrement libre, qu'elle repose sur des points d'appui, et qu'il s'y produit deux sortes de flexions, par suite de l'acte du choc; les unes, qui ont lieu aux points de contact du boulet et de la plaque, et qui déterminent le volume de l'impression, et les autres qui s'étendent à toute la plaque et lui font prendre une courbure générale. Si les efforts de compression développés aux points

de contact, pendant l'acte du choc, surpassent la limite d'élasticité de la matière de ces points, cette élasticité est altérée et le projectile n'est renvoyé qu'avec une vitesse très faible ou presque nulle, tandis qu'au contraire ces mêmes efforts ne surpassant pas la limite d'élasticité générale de la plaque, celle-ci peut fléchir sous leur action et reprendre, par une suite de vibrations, sa forme primitive; et comme elle transmet par ses points d'appui sur la caisse les efforts auxquels elle est soumise, elle agit sur celle-ci à la manière des corps parfaitement élastiques, et prend avec elle une vitesse $2u$.

Cette explication revient à admettre qu'il faut distinguer dans la résistance d'un corps soumis, en un certain point de sa surface, à un effort qui le fait fléchir, deux effets, l'un qui a lieu au contact, au point d'action de l'effort, qui peut détruire l'élasticité propre des particules immédiatement exposées à l'action, l'autre qui fait prendre au corps une flexion générale qui ne dépasse pas les limites de son élasticité. C'est au reste ce qui se produit fréquemment dans les arts, et par exemple, quand un coup violent frappé sur une pièce de bois ou de métal y laisse une impression permanente, tandis qu'il n'occasione qu'une flexion générale qui disparaît après quelques vibrations oscillatoires.

On conçoit, d'après cela, que la vitesse de retour du projectile doit dépendre de l'altération plus ou moins grande qu'a subie l'élasticité des points de contact, et qu'elle sera d'autant plus grande que le choc aura été moins violent. Or, on remarque, en effet, sur les courbes de descente, fig. 6, 5^{e} expér., tableau IV, que l'intervalle entre le moment où la caisse a atteint sa plus grande vitesse, et l'instant où le second choc a lieu, est d'au-

tant plus grand que le poids et la hauteur de chute du projectile sont moindres, quoiqu'il soit toujours très court dans nos expériences.

Enfin, la durée totale de l'impression et de sa destruction, plus ou moins complète, et celle de la flexion générale, n'étant pas les mêmes, et la première devant être évidemment bien plus courte que la seconde, il s'ensuit que le projectile quitte la plaque avant qu'elle ait pu, par ce retour à sa forme générale, lui restituer la quantité de travail employée à la faire fléchir, et par conséquent, qu'il y a perte d'une certaine quantité de travail ou de force vive pendant l'acte du choc, dans les circonstances où nous avons opéré. Et attendu que nos courbes nous montrent, comme je l'ai indiqué par un exemple, que la vitesse restituée au boulet est sensiblement nulle, cette perte de force vive est à très peu près égale à celle que possédait le boulet, quand il a atteint la caisse, moins celle qui a été communiquée à la caisse.

Il résulte aussi de ce qui précède, que si la pièce de fonte qui reçoit le choc était disposée de manière à ne pas pouvoir fléchir ni faire ressort, le choc n'aurait eu lieu qu'à la manière des corps mous, et que la vitesse transmise n'aurait été que moitié de celle que nous avons trouvée. Il me paraît même assez probable que c'est parce que les pièces de bois que nous avons employées dans les expériences du tableau III étaient posées par lits, croisées les unes sur les autres, qu'elles n'ont pas pu fléchir, et que nous avons trouvé pour la vitesse transmise celle qui est donnée par la théorie du choc des corps mous.

Quant à la perte de force vive, on peut obtenir sa limite supérieure en regardant comme nulle la vitesse de retour du projectile.

On a, en effet alors, pour cette perte,

$$\frac{p}{g}v^2 - \frac{P}{g}4u^2 = \frac{(P-p)^2}{(P+p)^2}\cdot\frac{p}{g}v^2.$$

Cette expression nous montre que quand $P = p$, la perte de force vive est encore nulle, de même que si les deux corps avaient agi en leurs points de contact, comme des corps parfaitement élastiques; mais qu'au contraire elle sera d'autant plus grande que le poids du corps choqué surpassera davantage celui du corps choquant.

Je me garderai bien de présenter les explications précédentes comme suffisamment établies par les observations, quelles que plausibles qu'elles me paraissent, et je me propose de revenir par la suite, si je le puis, sur les recherches qu'elles peuvent provoquer. Il est facile de voir, d'ailleurs, que nos appareils se prêteront aisément, avec quelques modifications, à l'observation de toutes les circonstances du mouvement de la caisse et de celui du projectile, avant, pendant et après le choc. Il suffira, pour cela, de combiner les moyens que j'ai indiqués dans ce chapitre, pour observer la loi du mouvement de la caisse, avec ceux que je décrirai dans le chapitre suivant, et qui donnent la courbe du mouvement du projectile à un instant quelconque.

CHAPITRE III.

Expériences sur les lois de la résistance des milieux imparfaits à la pénétration des projectiles.

Hypothèses admises par les géomètres.

1. La théorie des impressions réciproques qui se produisent dans le choc de deux corps animés de vitesses différentes, a été depuis long-temps établie d'une manière fort simple et fort claire par don Georges Juan (1) dans son *Examen maritime*. Ce savant espagnol est parti de l'hypothèse que, pendant la durée du choc, la résistance à la déformation ou à l'impression reste constante et proportionnelle à l'amplitude de cette impression, c'est-à-dire à l'aire de la plus grande section qu'on peut y faire perpendiculairement à la direction du mouvement, à l'instant que l'on considère. Il a établi les diverses formules à l'aide desquelles on peut calculer, à un instant quelconque du choc, en fonction de cette résistance constante, qu'il nomme dureté, et du volume de l'impression, la vitesse de chacun des corps, la force de percussion ou l'effort réciproque qu'ils exercent respectivement l'un sur l'autre, et dans certains cas le temps écoulé depuis le commencement du phénomène. Cette théorie, d'où l'on déduit les lois du choc des corps, pendant la durée de l'impression, si importantes pour les arts et en particulier pour celui des constructions militaires, a été reproduite et enrichie,

---

(1) *Examen maritime*, livre I, chap. VI, de la percussion, tome I, pages 118 et suivantes. Traduction de Levèque; Paris, 1783.

depuis son auteur, d'abord par M. de Prony (1), puis par M. Navier dans ses savantes notes sur l'*Architecture hydraulique* de Bélidor (2). Mais malheureusement l'expérience n'étant pas encore venue confirmer complétement les hypothèses sur lesquelles elle est fondée, les conséquences que ces géomètres en avaient tirées n'ont pas acquis toute l'autorité qu'elle aurait pu leur donner, et il est resté sur les phénomènes qui se passent pendant la durée de la compression, une incertitude que les abstractions de la mécanique rationnelle n'ont pas contribué à diminuer.

C'est pour la faire cesser, s'il m'est possible, que j'ai pensé qu'à l'occasion des expériences, dont je rendrai compte plus tard, sur le frottement, pendant le choc, il serait utile de rechercher les moyens de mettre en évidence les lois de la réaction réciproque des corps dans l'acte du choc, par des procédés qui permissent, dans certains cas, de déterminer la loi même du mouvement de pénétration d'un corps dans un autre. Je crois y être parvenu, d'abord en combinant mes appareils de manière à obtenir des courbes qui donnent une relation continue entre l'espace et le temps, lorsque l'un et l'autre étaient assez grands pour que l'amplitude de ces courbes permît d'en étudier la loi; puis, dans les cas où les impressions étaient plus faibles, en recherchant directement la relation entre le volume de ces impressions et les autres données de l'expérience, pour m'assurer si elles satisfaisaient aux lois déduites du premier mode d'expérimentation.

Je regrette de n'avoir encore pu étendre ces recherches

(1) *Nouvelle Architecture hydraulique*, tome I, pages 208 et suivantes.
(2) *Architecture hydraulique*, 2e édition, page 76, note *x*.

aussi loin qu'il serait nécessaire, mais ne les ayant entreprises qu'incidemment, je n'ai pas dû m'écarter de l'objet spécial de mes expériences, dont elles n'étaient qu'un accessoire, et j'ai été, quant à présent, forcé de me borner à observer les effets de la pénétration d'un corps dur, tel qu'un projectile de fonte, dans de l'argile à divers degrés de dureté et dans du sable. Mais ce que je n'ai pu faire, doit être entrepris dans le courant de l'année prochaine sur une plus grande échelle par une commission d'officiers d'artillerie, dont je fais partie, et nous espérons étendre aux cas les plus ordinaires des constructions et de la guerre les procédés d'observation que j'ai employés, en y apportant de nouveaux perfectionnemens. Je ne présente donc les résultats de mes recherches sur ce sujet, en 1833, que comme une sorte d'introduction, et pour montrer le parti que l'on peut tirer dans le cas actuel des appareils chronométriques dont j'ai déjà fait usage, et que j'ai modifiés de la manière suivante.

Description de l'appareil employé aux expériences.

2. Pour pouvoir observer sur une certaine étendue la loi du mouvement de pénétration d'un projectile dans de la terre glaise, j'ai pris de la terre de potier, que j'ai fait étendre d'une assez grande quantité d'eau pour la rendre très molle, et j'en ai placé dans une caisse environ 60 kilogrammes. Au-dessus de cette caisse était suspendu, à une hauteur déterminée, le projectile qui devait pénétrer dans la terre. Un plateau en cuivre *a* (Pl. 14, fig. 3) couvert d'une feuille de papier et disposé verticalement, recevait un mouvement uniforme, à l'aide d'un contre-poids descendant d'une grande hauteur et d'un volant à ailettes. J'ai donné au n° 4 du chapitre précédent la description de cet

appareil, et me bornerai à dire que j'avais d'avance vérifié, par de nombreuses observations, que ce plateau acquérait un mouvement de rotation uniforme, quelques secondes après qu'on avait abandonné le contre-poids à lui-même. Par conséquent le plateau tournait d'un mouvement connu, qu'il suffisait d'observer à chaque expérience, pour avoir le temps, et comme il faisait ordinairement un tour en $0'',8$ ou $0'',9$, on voit que chaque degré correspondait, selon les cas, à $0'',0022$ ou à $0'',0025$; ce qui permet d'observer des phénomènes d'une durée inappréciable par tous les autres procédés chronométriques.

D'une autre part, le projectile *b*, fig. 1, Pl. 16, est muni d'une tige en fer rond *bc* qui y est vissée par un bout et qui est terminée à l'autre par un anneau *c*, au moyen duquel on le suspend. Cette tige reçoit un curseur *d* que l'on y fixe à l'aide d'une vis de pression selon la hauteur de chute. A travers ce curseur passe une vis *e* à l'extrémité de laquelle est un pinceau chargé d'encre de Chine, que l'on rapproche à volonté du plateau, à l'aide de cette vis. Pour empêcher que la tige ou le boulet venant à tourner sur eux-mêmes, autour d'un axe vertical, pendant la descente ou la pénétration, le pinceau ne se trouvât éloigné du plateau, j'ai fait donner au curseur la forme d'une petite traverse horizontale, dont les extrémités s'engagent dans deux coulisses verticales, *mm* et *nn* parallèles entre elles et au plan du plateau, et comme ce curseur n'a dans ces coulisses que le jeu suffisant pour qu'il y puisse glisser avec liberté, on voit qu'il est obligé de suivre la verticale sans tourner, et qu'il s'oppose ainsi à la rotation de la tige et du boulet, sans toutefois retarder leur mouvement de descente : c'est au surplus ce que l'expérience a vérifié, ainsi que je l'indiquerai plus loin.

Mode de suspension du projectile.

3. Pour suspendre le boulet à une hauteur convenable et le lâcher à volonté, j'ai employé une disposition tout-à-fait analogue à celle qui est décrite au n° 7 du chapitre précédent.

Mode d'expérimentation.

4. Cette description suffit pour faire comprendre le mode d'expérimentation, et l'on conçoit facilement actuellement que, quand après avoir observé pendant un temps suffisant la vitesse du plateau, on amène le style au contact, il décrit sur la feuille de papier un cercle que j'appellerai *cercle de départ,* et dont les subdivisions donnent la valeur des temps. Cela fait, on lâche la tige, et dans sa descente le style trace sur le plateau une courbe, dont la première partie correspond au mouvement uniformément accéléré du projectile dans l'air, et dont la seconde, qui se raccorde tangentiellement à la première, correspond au mouvement de pénétration. Comme le style part du repos avec une vitesse nulle, il s'ensuit que la première portion de la courbe est à son origine tangente au cercle de départ, mais la loi du mouvement, dans cette preimère période, étant connue, il est facile de retrouver exactement cette origine, comme nous le verrons tout à l'heure. Lorsque le projectile a perdu toute la vitesse dont il était animé, le style, revenu au repos, trace sur le plateau un nouveau cercle, que je nomme *cercle d'arrivée;* mais, attendu que le ralentissement est graduel, la courbe de pénétration se raccorde tangentiellement avec ce cercle en un point qu'on ne peut déterminer que par le calcul et après le relèvement total de l'expérience. On observera d'ailleurs que le projectile descendant vertica-

lement, la ligne droite qu'il parcourt est nécessairement tangente au cercle décrit du centre du plateau, avec un rayon égal à la plus courte distance de ce centre à cette verticale, distance constante et que l'on retrouve de suite à chaque expérience, en décrivant du centre du plateau un cercle qui touche la courbe du mouvement.

Relèvement des courbes.

5. D'après ce qui précède, le relèvement des courbes n'offre aucune difficulté, et nous allons en donner pour exemple la 1re expérience du tableau n° I, Planche 15, fig. 2. Supposons d'abord l'origine de la courbe, ou son point de départ *o*, déterminée; par ce point menons la ligne *o*A tangente au cercle de moindre distance, déterminé comme il vient d'être dit; cette ligne *o*A sera évidemment la verticale parcourue par le style dans sa descente. Divisons-la en parties égales d'abord de deux en deux millimètres pour les parties voisines de l'origine, puis à partir de $0^m,01$ de centimètre en centimètre, ce qui suffit pour l'exactitude. Du centre *c* du plateau et avec la distance de chacun de ces points de division cotés *2*, *4*, *6*.... *10*, *15*, *20*, etc., pour rayons, décrivons des arcs de cercle qui rencontrent la courbe en des points que nous coterons 2, 4, 6..... 10, 15, etc., et considérons un de ces points, par exemple celui qui est coté 60 et qui correspond à une chute du projectile égale à $0^m,060$. Il est évident que puisque le point 60 de la courbe est venu passer au point *60* de la verticale, le plateau a décrit l'angle 60, $c,60 = 49°,5$ pendant que le style est descendu de $0^m,060$, et comme d'après l'observation directe le plateau a parcouru dans cette expérience un tour ou 360° en $0'',80$, ou un degré en $0'',00222$, il s'ensuit que le

temps écoulé, pendant la descente de $0^m,060$, a été de $49^o,5 \times 0,00222 = 0'',1099$. En appliquant le même raisonnement à tous les points, on forme le tableau suivant qui donne les temps et les espaces parcourus.

Relèvement de la première expérience du tableau n° I sur la pénétration.

Vitesse uniforme du plateau, un tour en $0'',80$, ou un degré en $0'',00222$.

ESPACES parcourus par le projectile.	ANGLES décrits par le plateau.	TEMPS correspondans.	ESPACES parcourus par le projectile.	ANGLES décrits par le plateau.	TEMPS correspondans.	ESPACES parcourus par le projectile.	ANGLES décrits par le plateau.	TEMPS correspondans.
m.			m.			m.		
0,000	0°0	0″0000	0,050	45°5	0°1011	0,180	81°0	0°1600
0,002	11,2	0,0249	0,060	49,5	0,1100	0,170	83,0	0,1843
0,004	14,3	0,0318	0,070	53,7	0,1193	0,180	85,7	0,1904
0,006	17,0	0,0378	0,080	57,4	0,1275	0,190	88,5	0,1949
0,008	19,6	0,0435	0,090	60,8	0,1351	0,200	91,5	0,2033
0,010	21,4	0,0475	0,100	64,0	0,1422	0,210	94,7	0,2104
0,015	25,5	0,0567	0,110	66,7	0,1482	0,220	98,4	0,2186
0,020	29,2	0,0649	0,120	69,0	0,1533	0,230	102,6	0,2280
0,025	32,7	0,0726	0,130	72,2	0,1604	0,240	107,9	0,2397
0.030	33,5	0,0789	0,140	74,1	6,1646	0,250	116,0	0,2577
0.040	40,8	0,0906	0,150	»	»	0,253	124,3	0.2767

Détermination de l'origine des courbes.

6. Nous avons supposé plus haut que l'origine o de la courbe nous était connue, et il est facile à présent de démontrer comment on la détermine. En effet, dans nos expériences, le projectile et sa tige descendant librement sous l'action de la gravité, sans que rien s'oppose à son mouvement, puisque la résistance des coulisses, dans lesquelles glisse le curseur, est tout-à-fait négligeable, et que, vu la petitesse des hauteurs de chute qui n'ont pas dépassé $0^m,20$, il en est de même de la résistance de l'air;

il s'ensuit qu'en appelant h la hauteur dont ce projectile est descendu à un instant quelconque, t le temps écoulé au même moment, à partir du départ, on aura,

$$h = \frac{gt^2}{2}, \quad \text{ou } t^2 = \frac{2}{g}.h = 0{,}501\,h,$$

g étant égal à $9^m{,}8088$.

Par conséquent, toute la partie de la course du projectile comprise entre l'instant du départ et celui où il atteint la surface de la terre, donnera dans le relèvement une courbe parabolique dont tous les élémens sont connus.

Il suit de là que si l'on calcule, par la formule ci-dessus, les temps correspondans à diverses valeurs $h = 0^m{,}02$, $0^m{,}04$, etc., jusqu'à $h = 0^m{,}15$ qui, dans le cas actuel, est la hauteur totale de chute, et que l'on en déduise les angles correspondans décrits par le plateau, au moyen de la relation

$$\frac{t}{0'',0022},$$

dans le cas actuel; puis qu'à partir des points 20, 40..... 150 de la courbe, on prenne sur les cercles correspondans des arcs 20, 20.... 40, 40, etc., des nombres de degrés trouvés, les extrémités 20, 40.... 150 de ces arcs devront se trouver sur une même ligne droite, tangente au cercle de moindre distance, et passant par l'origine de la courbe, dont elle fixera la position sur le cercle de départ.

Il faut remarquer que, bien que les points de division de la courbe aient été déterminés à l'aide de la droite oA, dont nous venons de rechercher la vraie position, il n'y a pas de cercle vicieux dans le raisonnement précédent, parce que toutes les tangentes au cercle de moindre résistance étant, à partir de leur rencontre, divisées comme l'a

été la ligne oA, peuvent servir à fixer les points de division de la courbe.

On voit donc que le relèvement de ces courbes peut se faire avec la plus grande précision, et que si le mouvement uniforme du plateau est vérifié et observé avec l'exactitude qu'on peut y apporter, on obtiendra la loi du mouvement avec une approximation qui dépasse tout ce qu'on a fait jusqu'à ce jour. En effet, je n'ai imprimé au plateau qu'une vitesse d'un tour en $0'',80$; mais rien n'est plus facile que de le faire tourner à un tour en $0'',50$ et même à $0'',25$; et alors en supposant qu'on ne poussât pas l'appréciation des angles au-delà des quarts de degrés, on pourrait obtenir les temps à moins de $0'',000347$, ou même de $0'',000173$.

Observation générale sur la précision dont les moyens d'observation employés sont susceptibles.

7. L'emploi de ces appareils, qui peuvent se modifier de bien des manières, permet donc d'observer les lois de certains mouvemens qui s'accomplissent en moins d'un centième de seconde, et d'avoir pour les représenter des courbes d'un développement assez grand, pour qu'on puisse les étudier en détail et en déduire les lois des mouvemens qu'elles représentent. Ce n'est pas ici le lieu d'entrer dans des détails sur les applications et les modifications dont ces procédés sont susceptibles, et je me réserve d'en indiquer plusieurs dans une notice spéciale.

Motifs qui ont obligé à renfermer, pour le moment, ces expériences dans des bornes étroites.

8. Je terminerai cet examen des procédés d'opération et de relèvement, en répétant que les expériences, dont je

rends compte, n'ont été entreprises qu'incidentellement et comme essai, et que j'ai cherché à les faire avec les moyens d'exécution que j'avais déjà sous la main; ce qui a resserré dans des bornes très étroites les limites dans lesquelles j'ai opéré. C'est ainsi, que voulant employer les disques plans en cuivre qui me servaient dans les expériences sur le frottement, et qui n'ont que 0,34 de diamètre, je n'ai pas pu obtenir des courses plus grandes pour le style, et que par suite j'ai été obligé de borner les hauteurs de chute à $0^m,20$ au plus. Enfin, comme de premiers essais se ressentent plus ou moins d'un peu d'inexpérience des choses que l'on étudie, j'ai trouvé que le mode de direction de la tige n'était pas aussi précis que je le pouvais désirer. On verra néanmoins par les résultats et par les courbes données pour exemples, que cette imperfection est peu sensible dans le cas actuel. Tous ces inconvéniens n'existeront pas pour les expériences qui seront entreprises, d'après ces procédés, par la commission dont j'ai parlé et qui s'occupera activement de ces recherches au printemps prochain.

Exposition des formules employées pour le calcul des résultats de l'expérience.

9. Avant de rapporter les résultats des expériences que j'ai faites sur la pénétration des projectiles dans la terre glaise et dans le sable, je dois exposer les formules que j'ai employées pour les calculer, ainsi que les diverses conséquences qui s'en déduisent et qui doivent être vérifiées par le tracé des courbes et par ces résultats eux-mêmes. A cet effet je rappellerai qu'ayant à reconnaître une loi hypothétique qu'un petit nombre d'expériences paraissaient avoir confirmée, la marche, la plus naturelle

était de l'admettre d'abord, pour en comparer les conséquences avec les faits. J'ai donc admis que la résistance des corps mous à la pénétration d'un projectile sphérique, est

1°. Indépendante de la vitesse du mouvement;

2°. Proportionnelle à chaque instant à la surface du cercle de la sphère intercepté par la surface du corps choqué. De plus, attendu qu'il s'agit ici de projectiles en fonte, pénétrant dans des corps mous, j'ai pu regarder les corps choquans comme incompressibles. On verra que j'ai opéré, dans certains cas, sur des corps mous dont la masse restait sensiblement immobile pendant la pénétration, et dans d'autres sur des corps auxquels l'acte du choc imprimait une certaine vitesse, pendant que le projectile y pénétrait. J'ai tenu compte dans chaque cas de ces circonstances, ainsi qu'on le verra, et je vais d'abord établir les formules relatives au premier.

Appelons:

p, le poids du projectile, y compris celui de sa tige directrice;

D, son diamètre;

h, la hauteur de chute au-dessus de la surface de la terre glaise;

$V = \sqrt{2gh}$, la vitesse due à cette hauteur;

e, la profondeur dont la sphère a pénétré dans la terre au bout du temps t;

d, le diamètre du cercle de la sphère intercepté au même instant par la surface du corps mou;

v, la vitesse que possède encore le projectile au bout du temps t;

R, la résistance que la terre glaise oppose au même instant au mouvement du projectile;

$\pi = 3,1416$.

Nous remarquerons d'abord que, d'après l'hypothèse de de la proportionnalité de R à la surface interceptée, que nous nommerons, avec don Georges Juan, l'amplitude de l'impression, il s'ensuit que la quantité de travail

$$\int \mathrm{R}\,de,$$

consommée au bout du temps t par la résistance sera proportionnelle au volume de l'impression, et que si l'on nomme K un coefficient constant pour un même corps mou et exprimant le rapport de la résistance à la surface, ou ce qui revient au même, la résistance par mètre quarré,

I, le volume de l'impression, on devra avoir

$$\int \mathrm{R}\,de = \mathrm{KI};$$

de sorte que l'expression de la quantité de travail, consommée par la résistance cherchée, dépendra de celle du volume de l'impression.

Dans le cas particulier qui nous occupe, on doit partager la durée de la pénétration en deux périodes; la première qui s'écoule depuis l'instant où le projectile atteint la surface de la terre et celui où il a pénétré de son rayon, et la seconde, qui commence à ce dernier instant, et se termine lorsque le projectile a perdu tout mouvement relatif dans l'intérieur de la masse.

Dans la première période, on a, à un instant quelconque,

$$\mathrm{R} = \mathrm{K}.\frac{\pi d^2}{4} = \mathrm{K}\pi e\,(\mathrm{D} - e),$$

à cause que $\frac{d^2}{4} = e\,(\mathrm{D} - e)$,

et par suite la quantité de travail totale développée en

sens contraire du mouvement, pendant le temps t, ou pour la profondeur de pénétration e, a pour expression

$$\int \mathrm{R}\,de = \mathrm{K}.\pi \int e\,(\mathrm{D} - e)\,de = \mathrm{K}\pi e^2 \left(\frac{\mathrm{D}}{2} - \frac{e}{3}\right),$$

la constante étant nulle, puisqu'on a à la fois $e = 0$ et $\mathrm{R} = 0$.

D'une autre part le projectile est soumis à l'action de la pesanteur, qui, pendant le temps t, a développé sur lui et dans le sens du mouvement la quantité de travail

$$pe.$$

Puis donc qu'au bout de ce temps sa vitesse, qui était V à l'origine, est devenue v, on aura, d'après le principe des forces vives,

$$\frac{p}{g}(v^2 - \mathrm{V}^2) = 2pe - \mathrm{K}\pi e^2 \left(\mathrm{D} - \frac{2e}{3}\right);$$

d'où l'on tirera, attendu que $\mathrm{V}^2 = 2gh$,

$$(1) \qquad v^2 = 2g\,(h + e) - \mathrm{K}\,\frac{\pi g}{p}\,e^2 \left(\mathrm{D} - \frac{2}{3}\,e\right),$$

expression qui nous donnera la vitesse v du projectile, à un instant quelconque de la première période de la pénétration, quand on connaîtra K, ou réciproquement

$$(2) \qquad \mathrm{K} = \frac{2g\,(h + e) - v^2}{\frac{\pi g}{p}\,e^2 \left(\mathrm{D} - \frac{2}{3}\,e\right)}.$$

On voit, par cette formule, que si la loi admise était une fois démontrée pour un corps, il suffirait d'observer la pénétration totale à laquelle correspond $v = 0$, et que

si elle n'excède pas le rayon, ou $\frac{D}{2}$, on en déduira la valeur

$$(3) \qquad K = \frac{2g(h+e)}{\frac{\pi g}{p} e \left(D - \frac{2}{3} e\right)}.$$

Deuxième période de la pénétration.

10. Dès que le projectile est parvenu à une profondeur $e = \frac{D}{2}$, la seconde période commence, la résistance devient constante et a pour expression

$$R = K \frac{\pi D^2}{4}.$$

La quantité de travail élémentaire qu'elle développe dans l'instant dt est

$$R de = K \frac{\pi D^2}{4} de,$$

ou en intégrant

$$\int R de = K \frac{\pi D^2}{4} e + \text{const.}$$

Dans cette relation on déterminera la constante en remarquant que, d'après ce qui précède, on a à la fois

$$e = \frac{D}{2} \quad \text{et} \quad \int R de = K\pi \frac{D^3}{4} \left(\frac{D}{2} - \frac{D}{6}\right) = K\pi \frac{D^3}{12};$$

ce qui donne pour le travail total développé par la résistance R, depuis le commencement de la pénétration jusqu'à une profondeur quelconque e plus grande que le rayon de la sphère,

$$\int R de = K\pi \frac{D^2}{4} \left(e - \frac{D}{3}\right).$$

On remarquera que quand le diamètre du projectile sera très petit par rapport à la pénétration totale e, on pourra négliger le terme $\frac{D}{3}$, par rapport à e, et qu'alors le travail total de la résistance sera exprimé par le produit du facteur constant K, et du volume d'un cylindre dont la base serait le grand cercle de la sphère et qui aurait pour hauteur la pénétration totale. C'est aussi par cette règle que l'on calcule ordinairement ce coefficient dans les grandes pénétrations.

Mais il est plus exact, et pour nos expériences il est indispensable, de ne prendre que la valeur rigoureuse du volume de l'impression, qui est représentée par le facteur $\pi \frac{D^2}{4}\left(e - \frac{D}{3}\right)$.

En appliquant, comme précédemment, le principe des forces vives, nous aurons donc pour l'équation du mouvement pendant cette seconde période

$$\frac{p}{g}(v^2 - V^2) = 2pe - K.\pi \frac{D^2}{2}\left(e - \frac{D}{3}\right);$$

d'où, attendu que $V^2 = 2gh$,

$$(4) \qquad v^2 = 2g(h + e) - K\frac{\pi g}{p}\frac{D^2}{2}\left(e - \frac{D}{3}\right),$$

expression qui nous donnera la vitesse du projectile à un instant quelconque de cette deuxième période, et d'où l'on tirerait comme précédemment

$$(5) \qquad K = \frac{2g(h + e) - v^2}{\frac{\pi g}{2p} D^2\left(e - \frac{D}{3}\right)};$$

de sorte que la loi étant une fois démontrée, on déduira la valeur de K de l'observation des pénétrations totales et

de la relation ci-dessus, en y faisant $v = 0$, ce qui donnera

$$(6) \qquad K = \frac{2g\,(h+e)}{\frac{\pi g}{2p}\,D^2\left(e - \frac{D}{3}\right)}.$$

Cas où l'on fait usage des formules ci-dessus.

11. Dans les expériences sur le frottement pendant le choc d'un corps dur tombant sur un corps mou, placé sur le traîneau, et dont je rends compte au chapitre suivant, j'ai observé chaque fois le diamètre et la profondeur des impressions, et comme je n'avais pas pu obtenir la loi du mouvement de pénétration, j'ai été obligé de me borner à l'emploi des formules (3) du n° 9 et (6) du n° 10 pour la détermination du facteur K, dont les valeurs sont consignées au tableau n° III.

Cas où l'on a observé la loi du mouvement de pénétration. Durée de la première période.

12. Mais dans les expériences spéciales sur la pénétration, l'appareil ayant été disposé, ainsi qu'il a été décrit aux n^{os} 2 et suivans, et les courbes relevées du mouvement de pénétration donnant une relation graphique entre les espaces parcourus et les temps, j'ai dû chercher à les comparer avec celles que l'on peut déduire des formules précédentes. A cet effet l'équation du n° 9 relative à la première période

$$v^2 = \left(\frac{de}{dt}\right)^2 = 2g\,(h+e) - K\,\frac{\pi g}{p}\,e^2\left(D - \frac{2}{3}e\right)$$

nous donne

$$(7) \qquad dt = \frac{de}{\sqrt{2g\,(h+e) - K.\frac{\pi g}{p}\,e^2\left(D - \frac{2}{3}e\right)}}.$$

Cette expression est celle d'une transcendante elliptique et ne peut s'intégrer que par les méthodes relatives à ce genre de fonctions, et qui n'étaient pas connues lorsque don Juan publia sa *Théorie de la pénétration*. C'est pour échapper à la difficulté, alors insurmontable, de ce calcul, qui tient à la forme sphérique du projectile, que cet ingénieur a traité le cas où l'amplitude de l'impression serait proportionnelle au quarré de la profondeur de pénétration, ce qui se rapporterait à un cône. Bien que ce cas ne se présente guère dans les applications, il pourrait être intéressant de l'examiner sous le rapport de la théorie.

Méthode approximative pour calculer la durée de la première période de la pénétration.

13. Mais si l'expression ci-dessus présente des difficultés d'intégration qui la rendent peu commode pour les applications, on peut néanmoins en déduire, avec toute l'exactitude désirable, la valeur approchée de la durée de la première période de la pénétration, à l'aide de la méthode d'approximation de Th. Simson ou de celle que M. Poisson a donnée dans la deuxième édition de son *Traité de Mécanique* (1). J'ai employé la première de ces deux méthodes, en opérant ainsi qu'il suit.

L'intégrale à calculer est

$$t = \int_{\frac{D}{2}}^{e} \frac{de}{\sqrt{2g\,(h+e) - K\,\frac{\pi g}{p}\,e^2\left(D - \frac{2}{3}\,e\right)}} + \text{const.}$$

On observera d'abord que la constante est nulle, si l'on compte le temps à partir du commencement de la péné-

(1) *Traité de Mécanique* de M. Poisson, 2e édition, tome I, nos 13 et suivans, et *Journal de l'École Polytechnique*, 18e cahier, page 320.

tration, ce qui est plus commode, et l'on se rappellera que le dénominateur exprime la valeur de la vitesse v du projectile à l'instant qui correspond à la profondeur de pénétration e.

La profondeur totale étant, pour cette période, donnée *à priori* et égale à $\frac{D}{2}$, je la partage en quatre parties et je nomme les valeurs correspondantes de e,

$$e_1 = 0, \quad e_2 = \frac{D}{8}, \quad e_3 = \frac{D}{4}, \quad e_4 = \frac{3D}{8}, \quad e_5 = \frac{D}{2},$$

et je calcule les valeurs correspondantes du radical, ce qui donne celles de la vitesse v relatives aux diverses pénétrations e_1, e_2, etc. En les désignant respectivement par

$$v_1 = \sqrt{2gh}, \quad v_2, \quad v_3, \quad v_4, \quad v_5,$$

on en déduit ensuite celles du coefficient différentiel, que je représente par

$$E_1 = \frac{1}{v_1}, \quad E_2 = \frac{1}{v_2}, \quad E_3 = \frac{1}{v_3}, \quad E_4 = \frac{1}{v_4}, \quad E_5 = \frac{1}{v_5},$$

et finalement la valeur approchée de l'intégrale qui est

$$(8) \quad t = \frac{D}{24}\left[E_1 + E_5 + 4(E_2 + E_4) + 3E_3\right].$$

Autre méthode d'intégration par approximation.

14. La méthode précédente est suffisamment exacte pour tous les cas où le projectile pénètre d'une quantité plus grande que son demi-diamètre, mais lorsqu'au contraire la pénétration est moindre, la vitesse étant nulle à la fin de cette période, la dernière valeur de $E = \frac{1}{v}$ devient infinie, et il n'est plus possible d'employer ni l'une ni l'autre des méthodes d'approximation indiquées.

Il faut alors recourir au développement en série du second membre de l'expression à intégrer,

$$dt = \frac{de}{\sqrt{2gh - 2ge - \frac{K\pi g}{p} De^2 + \frac{2}{3}\frac{K\pi g}{p} e^3}}.$$

Pour l'obtenir nous ferons remarquer que le polynome du troisième degré, qui est sous le radical, a toujours une racine réelle, donnée *à priori* par l'observation, et égale à la profondeur totale de pénétration, puisqu'à cette valeur correspond

$$v^2 = 2gh - 2ge - \frac{K\pi g}{p}.De^2 + \frac{2}{3}\frac{K\pi g}{p} e^3 = 0.$$

D'après cela, en appelant a cette racine réelle ou cette profondeur totale, il sera facile de mettre l'expression précédente sous la forme

$$dt = \frac{(a-e)^{-\frac{1}{2}} de}{\sqrt{A + Be - Ce^2}}.$$

Or, on a

$$(a-e)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\left(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{e}{a} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{e^2}{a^2} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{e^3}{a^3} + \text{etc.}\right),$$

série dans laquelle les termes vont sans cesse en diminuant, puisque l'on a toujours $e < a$ ou au plus $e = a$ à la fin de la période. En se bornant, pour les applications, aux trois premiers termes, l'expression à intégrer revient à

$$dt = \frac{1}{\sqrt{a}}\left(\frac{de}{\sqrt{A + Be - Ce^2}} + \frac{1}{2a}\frac{ede}{\sqrt{A + Be - Ce^2}} + \frac{1.3}{2.4.a^2}\frac{e^2 de}{\sqrt{A + Be - Ce^2}}\right),$$

qui, par les méthodes connues, donne, en prenant les intégrales depuis $e = 0$ jusqu'à $e = a$,

$$t=\frac{1}{\sqrt{aC}}\left[\left(\frac{1}{2a}+\frac{1.3}{2.4.a^3}\cdot\frac{3B}{4C}\right)\sqrt{\frac{A}{C}}-\left(\frac{1}{2a}+\frac{1.3}{2.4.a^2}\frac{3B+2Ca}{4C}\right)\frac{\sqrt{A+Ba-Ca^2}}{\sqrt{C}}\right.$$
$$\left.+\left(1+\frac{B}{4aC}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{3B^2+4AC}{8a^2C^2}\right)\left(\arcsin=\frac{2Ca-B}{\sqrt{4AC+B^2}}-\arcsin=\frac{-B}{\sqrt{4AC+B^2}}\right)\right].$$

Il est une autre circonstance très fréquente dans la pratique où l'on peut obtenir avec une approximation suffisante la durée de l'impression. C'est quand sa profondeur est très petite, par rapport au diamètre du projectile, parce qu'alors, pouvant négliger $\frac{2}{3}e$ par rapport à D sous le radical, l'expression à intégrer se réduit à

$$t=\int\frac{de}{\sqrt{2g\,(h+e)-\frac{K\pi g}{p}De^2}},$$

et revient au cas examiné par D. G. Juan.

En complétant le quarré de la quantité qui est sous le radical, on trouve par les méthodes connues

$$t=\frac{V^2}{\sqrt{K\frac{\pi gD}{p}}}.\arcsin=\frac{eK\frac{\pi gD}{p}-g}{V\sqrt{K\frac{\pi gD}{p}}};$$

la constante étant d'ailleurs nulle comme on l'a dit plus haut.

Durée de la deuxième période et durée totale de la pénétration.

15. Quant à la durée de la deuxième période, elle est beaucoup plus facile à déterminer, parce que la résistance devenant constante dès son origine, le mouvement est uniformément retardé, et que si, en conservant les notations précédentes, nous appelons :

v' la vitesse que le projectile conserve à la fin de la première période de la pénétration;

t', la durée de cette première période déterminée par approximation, comme il a été dit ci-dessus;

e', la profondeur de pénétration correspondante au même instant;

On aura, d'après le principe des forces vives,

$$\frac{P}{g}(v^2 - v'^2) = 2p(e - e') - \frac{K\pi D^2}{2}(e - e'),$$

d'où

$$\frac{d^2e}{dt^2} = -\left(K\frac{\pi g}{p}\frac{D^2}{4} - g\right).$$

En intégrant une première fois, on trouve

$$\frac{de}{dt} = -\left(K\frac{\pi g}{p}\frac{D^2}{4} - g\right)t + \text{const.};$$

et comme on a simultanément,

$$\frac{de}{dt} = v' \quad \text{et} \quad t = t',$$

cette intégrale prise à partir de cette limite, devient

$$(10) \quad v = \frac{de}{dt} = v' - \left(K\frac{\pi g}{p}\frac{D^2}{4} - g\right)(t - t').$$

Une seconde intégration donne, à partir de la même limite,

$$(11) \quad e - e' = v'(t - t') - \left(K\frac{\pi g}{p}\frac{D^2}{4} - g\right)\frac{(t - t')^2}{2}.$$

16. Les équations (10) et (11) du numéro précédent supposent que l'on connaisse la vitesse v' du projectile, à la fin de la première période de la pénétration, ou à l'instant où il s'est enfoncé de son rayon; c'est ce qui sera facile, au moyen de l'équation (1) du n° 9, en y faisant $e = \frac{D}{2}$. Alors l'équation (10) nous donnera la durée de la seconde période de la pénétration, en y supposant

$v = 0$; on en tire, en effet,

$$(12) \qquad t - t' = \frac{v'}{K\frac{\pi g}{p}\frac{D^2}{4} - g};$$

et comme on a pu déterminer par approximation, ainsi qu'il a été dit aux nos 13 et 14, la durée t' de la première période, on aura pour la durée totale de la pénétration à la profondeur e,

$$(13) \qquad t = t' + \frac{v'}{K\frac{\pi g D^2}{p\ 4} - g}.$$

Détermination de la valeur de K.

17. Tout ce que nous venons de dire sur les moyens de déterminer les quantités t et v en fonction de e, à un instant quelconque de la pénétration, suppose que l'on a, par des observations préliminaires, obtenu la valeur de la constante K, et il nous reste à faire voir comment nous y sommes parvenus, à l'aide des courbes du mouvement données par nos appareils.

Dans le choc d'un projectile sphérique, nous avons vu que l'impossibilité d'intégrer l'équation différentielle entre l'espace et le temps ne permet pas d'établir entre ces quantités, une relation sous forme finie, de laquelle on déduirait la valeur de K relative à chaque point de la courbe, en y substituant les coordonnées de ce point. De là résulte que, ne connaissant pas cette quantité K, on ne peut pas obtenir exactement la vitesse finale de la première période. Mais ce que le calcul ne peut nous donner rigoureusement, le tracé des courbes nous permet de l'avoir avec une approximation bien suffisante.

Remarquons, en effet, Pl. XVI, fig. 3, relative à la première expérience du tableau n° I, sur un boulet du

calibre de 12, dont le diamètre est $D = 0^m,118$, et qui tombe d'une hauteur de $0^m,15$, que nous pouvons facilement déterminer le point b de la courbe qui correspond à la fin de la première période; car l'abscisse de ce point est évidemment égale à

$$h + \frac{D}{2} = 0^m,209,$$

et nous pouvons, avec un peu de soin, mener très approximativement (1) la tangente bl au point b, et la tangente trigonométrique de son inclinaison sur l'ordonnée, nous donnera une valeur très approchée de la vitesse v' du projectile au point b de sa trajectoire.

Cela fait, l'équation (11) du n° 15 va nous servir à vérifier si la loi que nous avons admise, est conforme aux faits et nous donnera le moyen d'obtenir la valeur de K relative à chaque expérience.

En effet, on tire de cette équation,

$$(14) \qquad K = \frac{v'(t-t') + g\frac{(t-t')^2}{2} - (e-e')}{\frac{\pi D^2}{4p}.g.\frac{(t-t')^2}{2}};$$

et si l'on substitue successivement dans cette relation diverses valeurs de e et de t correspondantes à des points de la courbe et prises sur le relèvement, on aura pour chacun de ces points une valeur de K, et la loi que nous avons admise sera démontrée, si toutes les valeurs de K, ainsi obtenues, sont égales ou du moins assez peu différentes, pour qu'on puisse raisonnablement attribuer ces divergences, soit aux variations inévitables de la dureté même du corps pénétré, soit à la légère incertitude que

(1) J'ai cherché à employer, pour la détermination de cette tangente, quelques-unes des méthodes graphiques connues; mais le peu de courbure de la courbe les rend au moins aussi incertaines que l'usage immédiat de la règle, qui, par suite de ce peu de courbure, ne peut conduire à des erreurs notables.

le procédé graphique employé pour déterminer ν' a pu laisser sur sa vraie valeur.

Moyen graphique d'abréger les calculs.

18. On observera que si par le point b on mène une horizontale bm, ainsi que par les points c, d, e, etc., de la courbe qu'on veut employer pour déterminer K, puis qu'on projette les points c', d', e', etc., de rencontre de ces dernières sur la première bm, en des points c'', d'', e'', etc., les lignes bc'', bd'', be'', etc., seront précisément les valeurs de $\nu'(t-t')$ correspondantes aux diverses valeurs de t des points c, d, e, etc. De même la projection des points c, d, e sur l'horizontale bm, ou plus simplement leur plus courte distance à l'ordonnée prolongée du point b, donnera les valeurs de $e-e'$ relatives à ces points. On pourrait aussi trouver graphiquement les valeurs de $g\frac{(t-t')^2}{2}$; mais l'obliquité des intersections des horizontales qu'il faudrait mener par les points c, d, e, jusqu'à leur rencontre avec la parabole du mouvement accéléré, pouvant parfois apporter de légères erreurs aux résultats, j'ai préféré calculer ce terme directement.

Observations sur la vérification des lois admises au n° 9.

19. Telle est la marche que j'ai suivie, pour vérifier la loi de la pénétration et déterminer la valeur de la constante, dans toutes les expériences où j'ai pu obtenir graphiquement la loi du mouvement; si je ne l'avais appliquée qu'à des projectiles de même diamètre, comme le calcul précédent n'est relatif qu'à la seconde période de la pénétration, la portion de son mouvement, qui a

lieu après qu'il a pénétré de son rayon, la constance des valeurs obtenues pour K prouverait seulement que le mouvement du projectile est uniformément retardé, pendant cette période, et que par conséquent la résistance est indépendante de la vitesse. Mais comme j'ai fait des expériences sur des projectiles de diamètres très différens, et que j'ai trouvé pour K des valeurs qui sont sensiblement les mêmes, cet accord prouve déjà que la résistance est proportionnelle à l'étendue de la surface interceptée.

Autre mode de vérification de ces lois relatif aux premiers instans de la pénétration.

20. Mais outre ce moyen de vérification, j'en ai employé un autre qui montre avec évidence que la même loi a lieu dès les premiers instans de la pénétration, ce qui est fort important pour la théorie du choc, dans le cas de petites impressions. Voici en quoi il consiste : Ayant déterminé K d'après la méthode précédente et la courbe tracée dans la seconde période de la pénétration, je calcule, au moyen de la formule 7 du n° 12,

$$t = \int_{\frac{D}{3}}^{0} \frac{de}{\sqrt{2g(h+e) - K.\frac{\pi g}{p} e^2 \left(D - \frac{2}{3}e\right)}},$$

et de la méthode approximative de Th. Simson, les valeurs de t, qui correspondent à diverses profondeurs de pénétration, et je compare ces valeurs déduites du calcul avec celles que l'expérience m'a fournies par le tracé des courbes. L'identité presque parfaite des valeurs obtenues dans les deux cas, montre que, même dans les premiers instans de la pénétration, les lois admises pour

l'établissement des formules ci-dessus, sont très exactement vérifiées dans le cas de nos expériences.

Tous les résultats du calcul et de la comparaison ci-dessus sont consignés dans le tableau n° 1, relatif aux expériences où l'on a déterminé le coefficient par l'observation de la loi du mouvement.

Observations sur la forme des courbes du mouvement.

21. A cet examen des diverses circonstances de la pénétration, je crois devoir ajouter quelques observations sur les variations du mouvement du projectile, à partir de l'instant où il atteint la surface du corps mou dans lequel il pénètre, et sur la forme que doit, par suite, affecter la courbe de son mouvement.

Au moment où le projectile atteint la surface du corps mou, il est animé d'une vitesse que nous avons représentée par $V = \sqrt{2gh}$; il pénètre dans le corps, mais dans les premiers instans, où la profondeur de l'impression est très faible, son poids étant encore supérieur à la résistance, la force qui le sollicite,

$$\frac{p}{g}\frac{d^2e}{dt^2} = p - K.\frac{\pi d^2}{4},$$

agit encore dans le sens du mouvement, et celui-ci continue à être accéléré, mais non plus uniformément; il le devient même de moins en moins et cesse complétement de l'être lorsqu'on a

$$p = K.\frac{\pi d^2}{4}, \quad \text{ou} \quad \frac{d^2e}{dt^2} = 0.$$

A cet instant, si le diamètre d du cercle intercepté était égal à celui de la sphère, la résistance cesserait de

croître, elle deviendrait constante et le mouvement se continuerait uniformément avec une vitesse facile à déterminer, puisqu'on a $e = \frac{D}{2}$, et que la formule (1) du n° 9 nous donne

$$v^2 = 2g\left(h + \frac{D}{2}\right) - K\frac{\pi g}{p}\frac{D^3}{6}.$$

Mais attendu que la résistance du milieu est le plus souvent très grande, par rapport au poids du projectile, elle le surpasse bien avant l'instant où $d = D$, et au-delà de la position pour laquelle

$$p = K\frac{\pi d^2}{4},$$

on a $K\frac{\pi d^2}{4} > p$, et par suite la force

$$\frac{p}{g}\frac{d^2e}{dt^2} = -\left(K\frac{\pi d^2}{4} - p\right)$$

agit en sens contraire du mouvement et tend sans cesse à le retarder. La courbe devra donc avoir un point d'inflexion, dont la position sera facile à déterminer, puisqu'il répond à la relation précédente

$$p = K\frac{\pi d^2}{4} = K\pi e(D - e);$$

d'où l'on tire

$$e^2 - De + \frac{p}{\pi K} = 0 \quad \text{et} \quad (15) \quad e = \frac{D}{2} - \sqrt{\frac{D^2}{4} - \frac{p}{\pi K}},$$

le signe — étant évidemment celui qui convient à la question, puisqu'on a toujours alors $e < \frac{D}{2}$.

Passé ce point, le mouvement continue à se retarder de plus en plus rapidement, jusqu'à la position où $d=D$, ou $e=\frac{D}{2}$, au-delà de laquelle il devient uniformément retardé.

Toutes ces circonstances sont parfaitement reproduites par les courbes du mouvement, quoiqu'elles s'accomplissent dans un intervalle de temps souvent moindre que $0'',10$, et lorsque enfin la vitesse du projectile est éteinte, la courbe devient tangente à l'ordonnée qui correspond au point de la pénétration totale; mais, attendu la difficulté de fixer la position du point de contact, le tracé ne donnerait qu'avec incertitude la position de ce point, si le calcul ne permettait pas de le déterminer, ainsi que nous l'avons vu aux n^{os} 13 et suivans.

Formules employées pour calculer les résultats des pénétrations obtenus dans les expériences pour la transmission du mouvement par le choc.

22. Il me reste enfin à établir les formules que j'ai employées pour calculer les résultats des pénétrations obtenues dans les expériences sur la transmission du mouvement par le choc, rapportées au chapitre précédent. On se rappelle que la caisse suspendue au dynamomètre étant remplie de terre glaise ou de sable (*voy.* n^{os} 3 et suivans, Chap. II), on y laissait tomber un projectile en fonte, qui pénétrait plus ou moins dans la matière molle et imprimait à la caisse une certaine vitesse; mais bientôt la résistance du dynamomètre détruisait ce mouvement, dont les courbes de flexion du ressort nous donnent l'amplitude totale. Nous considérerons ce qui se passe dans la première oscillation descendante, la seule qui nous intéresse pour la question actuelle, et, en conservant les no-

tations précédentes, nous appellerons de plus T l'accroissement variable de la tension du dynamomètre exprimé en kilogrammes, pendant l'acte du choc ou de la pénétration; f la flèche ou plutôt l'augmentation de flexion qu'il reçoit à un instant quelconque, par l'action du choc.

Remarquons d'abord que l'accroissement de tension T, que reçoit le dynamomètre, est sans cesse dirigé en sens contraire du mouvement, qu'il tend d'abord à empêcher de naître, puis à détruire, et que dans chaque élément du temps dt il développera une quantité de travail exprimée par

$$\mathrm{T}df,$$

et que pour avoir le travail total développé par cette résistance, pendant la durée totale de l'oscillation descendante, ou pendant que le ressort prend un accroissement de tension f, il faut obtenir la valeur de

$$\int \mathrm{T}df$$

pendant cet intervalle.

Or, rien n'est plus facile, par suite de la construction de cet appareil, car il résulte de sa forme, et l'expérience prouve que les accroissemens des tensions et ceux des flexions sont dans un rapport constant, et que dans le cas actuel le ressort prend une augmentation de flèche de $0^{m},000314$ pour chaque accroissement d'un kilogramme dans sa tension, de sorte qu'on a toujours

$$\frac{f}{0,000314} = \mathrm{T}.$$

On en déduit donc

$$\int \mathrm{T}df = \frac{1}{0,000314}\int f df = \frac{1}{2}\frac{f^{2}}{0,000314}.$$

Cela posé, il est facile d'établir l'équation des forces vives relative à une oscillation descendante de la caisse, depuis l'instant où le choc et la pénétration commencent jusqu'à celui où ils finissent, et pour lesquels la vitesse de la caisse est nulle dans chaque cas.

En effet, le projectile qui est animé d'une vitesse $v = \sqrt{2gh}$ possède à son arrivée la force vive

$$\frac{p}{g} v^2,$$

qui, à la fin de l'oscillation, est entièrement détruite, d'une part par la résistance R de la terre à la pénétration, et qui développe une quantité de travail

$$\int \mathrm{R} de,$$

et de l'autre par l'accroissement total de tension que le dynamomètre a pris, et dont nous venons de calculer la quantité de travail.

Mais il faut observer que le projectile pénétrant d'une quantité e dans la terre et descendant avec la caisse de la quantité f, dont la tension du ressort s'est accrue, la gravité a développé sur lui, dans le sens du mouvement, une quantité de travail mesurée par

$$p(e+f),$$

et que la caisse, dont le poids est P, y compris celui de la lame antérieure du ressort, comme il a été dit au n° 11 du Chap. II, étant aussi descendue de la hauteur f, la gravité lui a communiqué la quantité de travail

$$\mathrm{P}f.$$

On aura donc, pour l'équation des forces vives relative à cette oscillation,

$$\frac{P}{g}v^2 = 2[\int R\,de + \int T\,df - p(e+f) - Pf].$$

Les courbes de flexion du dynamomètre nous donnent facilement la valeur de f, puisqu'il suffit de leur mener une tangente parallèle à l'axe de leurs abscisses sur le relèvement, ou de décrire sur la courbe minute un cercle concentrique au plateau qui les touche en leur point le plus éloigné du centre. La distance de la tangente à l'axe des abscisses, dans le premier cas (Pl. 15, fig. 4), et la différence du rayon du cercle tangent à celui du cercle de départ dans le second (Pl. 15, fig. 1), sera la valeur de f. On pourra donc facilement calculer $\int T\,df$.

On a mesuré dans chaque cas la valeur de e, ou plutôt celle du diamètre d du plus grand cercle d'impression; on aura donc aussi les valeurs de $p(e+f)$ et de Pf.

Quant à $\int R\,de$, nous savons, (n^{os} 9 et 10), qu'avec des projectiles sphériques, lorsque la profondeur de pénétration ne surpasse pas le rayon, on a, dans les hypothèses admises, et qu'il s'agit de vérifier,

$$\int R\,de = K\pi e^2\left(\frac{D}{2} - \frac{e}{3}\right),$$

et quand, au contraire, cette profondeur excède le rayon

$$\int R\,de = K\frac{\pi D^2}{4}\left(e - \frac{1}{3}D\right),$$

on aura donc, dans le premier cas,

$$\frac{P}{g}v^2 = 2\left[K\pi e^2\left(\frac{D}{2} - \frac{e}{3}\right) + \int T\,df - p(e+f) - Pf\right],$$

et dans le second,

$$\frac{p}{g}v^2 = 2\left[K.\frac{\pi D^2}{4}\left(e - \frac{1}{3}D\right) + \int T df - p(e+f) - Pf\right],$$

d'où l'on tire respectivement, en observant que $v^2 = 2gh$,

$$(16) \qquad K = \frac{p(h+e+f) + Pf - \int T df}{\pi e^2\left(\frac{D}{2} - \frac{e}{3}\right)}$$

pour le premier cas, et

$$(17) \qquad K = \frac{p(h+e+f) + Pf - \int T df}{\frac{\pi D^2}{4}\left(e - \frac{1}{3}D\right)}$$

pour le second.

C'est au moyen de ces formules que j'ai calculé les valeurs de K pour la terre glaise et pour le sable, d'après l'observation des pénétrations totales, pendant la durée du choc. Les poids, les diamètres et les hauteurs de chute ayant varié dans chaque série d'expériences, et la quantité K étant restée constante, ainsi qu'on peut le voir au tableau n° I, ces observations confirment donc pleinement la loi que nous avons admise, bien qu'elles soient faites dans des circonstances différentes de celles qui les précèdent.

Résultats des expériences sur la résistance de la terre glaise à la pénétration d'une sphère en fonte, déduits de l'observation de la loi du mouvement.

23. Le tableau suivant contient les résultats des expériences que j'ai faites, en observant la loi du mouvement de pénétration, d'après les procédés indiqués aux n^{os} 2 et suivans. Les valeurs de h sont celles de la hauteur dont le projectile tombe sur la surface de la terre; celles de e

correspondent aux diverses profondeurs de pénétration, de telle sorte que l'abscisse réelle de la courbe est $h + e$. J'ai pris pour e' la valeur constante qui correspond dans chaque expérience à une profondeur de pénétration égale au rayon du projectile, parce que c'est à partir de ce point que la résistance devient constante. Les valeurs de $t - t'$ sont données par l'excès de l'ordonnée de la courbe correspondante à la profondeur e sur celle que l'on trouve pour la profondeur e'.

Les quantités $\varphi'(t - t')$ et $g\frac{(t-t')^2}{2}$ sont déterminées comme il a été dit au n° 18, ainsi que la valeur de K.

Les valeurs de t' sont celles de la durée de la première période de la pénétration ou du temps qui s'écoule depuis l'instant où le projectile rencontre la surface, jusqu'à celui où il a pénétré de son rayon. Celles de t sont relatives à la durée totale de la pénétration, et je dois répéter que le tracé de la courbe ne peut les donner qu'avec peu de précision, attendu l'incertitude inévitable qui règne sur la véritable position du point de contact.

Enfin, j'ai rapporté la valeur de la profondeur de la pénétration à laquelle le mouvement cesse de s'accélérer, et où la courbe présente un point d'inflexion.

Toutes les courbes relevées dont je me suis servi pour le calcul de ces expériences, ont été construites avec le plus grand soin, de grandeur naturelle pour les abscisses ou les chemins parcourus, et à l'échelle d'un mètre pour une seconde pour les temps, ce qui permet d'apprécier, par le tracé, jusqu'à des dix-millièmes de seconde.

La terre glaise employée dans les expériences dont les résultats sont consignés dans le tableau, était très molle et très collante.

TABLEAU I.

24. *Expériences sur la résistance de la terre glaise à la pénétration d'une sphère en fonte.*

Détermination du coefficient K de la formule $R = K\frac{\pi d^2}{4}$ par l'observation de la loi du mouvement de pénétration.

Formule employée.

$$K = \frac{\nu'(t-t') + \frac{g(t-t')^2}{2} - (e-e')}{\frac{\pi D^2}{4p}\,\frac{g(t-t')^2}{2}} \qquad (14).$$

DIVERS EXPÉRIMENTATEURS.	HAUTEUR de chute de la sphère au-dessus de la surface h.	PROFONDEURS DE PÉNÉTRATION. e	$e' = \frac{D}{2}$	$e - e'$	VALEURS correspondantes de $t - t'$.	VALEURS de $\nu'(t-t')$	VALEURS du coefficient R.	DURÉES DE LA PÉNÉTRATION 1re Période calculée t'	1re Période relevée sur la courbe t'	Totale calculée t	Totale relevée sur la courbe t	Profondeur de pénétration correspondante au point d'inflexion.	DONNÉES PARTICULIÈRES.
		m.	m.	m.	"	m.	kil.						
	m.	0,083	0,059	0,02	0,0182	0,0245	1794	"	"	"	"	m.	kil.
	0,15	0,090	0,059	0,031	0,0300	0,0410	1735	0,0368	0,0360	0,1032	0,1020	0,0105	$p = 6,25$
		0,100	0,059	0,041	0,0478	0,0640	1735						
		0,103	0,059	0,044	0,0670	0,0900	1766						
						Moyenne..	1757						m.
		0,080	0,059	0,021	0,0140	0,0227	1583						$D = 0,118$
		0,090	0,059	0,031	0,0220	0,0345	1418						
	0,20	0,100	0,059	0,041	0,0332	0,0520	1726	0,0338	0,0333	0,1207	0,1170	0,0113	$\frac{\pi D^2}{4p} = 0,0017497$
		0,110	0,059	0,051	0,0460	0,0710	1696						
						Moyenne..	1606						
	0,10	0,090	0,073	0,017	0 02 3	0,0195	1544	0,0535	0,0570	0,1234	0,1300		kil.
		0,100	0,073	0,027	0,0403	0,0365	1606						$p = 12,238$
						Moyenne..	1575						
		0,090	0,073	0,017	0,0145	0,0190	1681						
		0,100	0,073	0,027	0,02 5	0,0366	1698						
	0,15	0,110	0,073	0,037	0,0355	0,0460	1797	0,0467		0,1122	0,1230		
		0,120	0,073	0,047	0,0500	0,0650	1700						m.
		0,128	0,073	0,055	0,0778	0,0910	1640						$D = 0,146$
						Moyenne..	1703						
		0,090	0,073	0,017	0,0130	0,0181	1676						
		0,100	0,073	0,027	0,0215	0,0300	1710						
	0,15	0,110	0,073	0,037	0,0315	0,0435	1712	0,0469	0,0430	0,1114	0,1160		$\frac{\pi D^2}{4p} = 0,001368$
		0,120	0,073	0,047	0,0430	0,0600	1782						
		0,130	0,073	0,057	0,0610	0,0845	1782						
						Moyenne..	1732						
						Moyenne générale.	1689						

Observations sur les résultats du tableau.

25. Les résultats consignés dans le tableau précédent confirment pleinement la loi que nous avons admise pour l'établissement des formules. En examinant, en effet, les valeurs du coefficient K, relatives à chacune des expériences, on voit que, pour une même expérience, ce nombre s'écarte toujours fort peu de la valeur moyenne déduite des valeurs partielles, et qu'il en est de même d'une expérience à l'autre. Je dois d'ailleurs dire que la terre glaise employée dans le cas actuel, avait été préparée, et étendue d'eau par les manœuvres que j'employais ordinairement, et que, malgré tous mes soins, je n'avais pu l'amener au degré d'homogénéité que lui donnent les potiers, de sorte qu'elle a pu présenter parfois de petites inégalités qui suffisent pour rendre compte des légères différences que l'on aperçoit dans les valeurs de K.

Ce qui prouve bien que ces variations ne sont qu'accidentelles et ne tiennent peut-être même qu'à de petites erreurs partielles dans le relèvement et le tracé des courbes, c'est que si, à l'aide de la valeur de K donnée par chaque expérience, et des formules (2) et (13), on calcule la durée de la première période et la durée totale de la pénétration, et que l'on compare les valeurs du temps, ainsi obtenues, avec celles que donne la courbe, on trouve que, dans tous les cas, il y a presque identité, surtout pour la première période, qui est relative aux premiers instans de la pénétration. Si les différences, quoique toujours fort petites, paraissent plus sensibles pour la durée totale, cela tient à ce que, d'après le tracé des courbes, cette durée correspond au point de contact de la courbe avec l'ordonnée de la pénétration totale, point

dont la position reste un peu incertaine, ainsi que nous l'avons fait déjà observer.

Expériences faites sur la même terre, dans le cas des petites chutes.

26. Outre les expériences consignées dans le tableau précédent, j'en ai fait d'autres sur la même terre, en laissant tomber le projectile d'une hauteur moindre. La profondeur de pénétration qui en est résultée n'ayant pas été assez grande pour me permettre d'employer la formule (14), je n'ai pu déterminer la valeur de la constante K que d'après l'observation de la pénétration totale et à l'aide de la formule

$$(6) \qquad K = \frac{2g(h+e)}{\frac{\pi g}{2p} D^2 \left(e - \frac{D}{3}\right)}.$$

Dans l'une de ces expériences, où l'on avait, par exemple, pour données et résultats d'observation,

$$h = 0^m,10, \quad e = 0^m,050, \quad D = 0^m,118,$$
$$p = 6^{kil.},25, \quad \frac{\pi g}{2p} D^2 = 0,034322,$$

on a trouvé

$$K = 1787^{kil.}.$$

En adoptant cette valeur de K, j'ai calculé, par la formule (8), le temps correspondant à une profondeur de pénétration $e = 0^m,02$, et j'ai trouvé $t = 0'',014$; la courbe relevée a donné exactement la même valeur. En déterminant de même la durée de la pénétration, jusqu'à la profondeur $e = 0^m,04$, on trouve, par le calcul,

$$t = 0'',0291, \quad \text{et par la courbe,} \quad t = 0'',0277.$$

Une autre expérience, dans laquelle on avait

$$h = 0^m,05, \quad D = 0^m,146, \quad p = 12^{kil.},238, \quad \frac{\pi D^2}{4p} = 0,001368,$$

a donné, par la formule (14),

$$K = 1480^{kil.},$$

et en calculant, à l'aide de cette valeur et de la formule (8), la durée de la pénétration, jusqu'à la profondeur $e = \frac{D}{2} = 0^m,073$, on trouve, par le calcul,

$$t = 0'',075, \quad \text{et par la courbe,} \quad t = 0'',077.$$

Ainsi ces expériences ont encore servi à confirmer la loi que nous avons admise jusqu'ici.

Observations sur les différences présentées par les expériences.

27. Il est remarquable que, dans chaque expérience, les coordonnées des courbes déduites du calcul soient presque identiquement les mêmes que celles qui sont fournies par l'observation, quoique, d'une expérience à l'autre, la valeur de K varie parfois d'une manière assez sensible. Il y a lieu de croire que ces différences entre les résultats des diverses expériences proviennent de l'état de la surface du corps choquant. En effet, la résistance que nous mesurons se compose, selon toute apparence, de deux genres de forces distinctes; les unes sont les forces de compression et de réaction développées par l'acte du choc, normalement à la surface du projectile; les autres sont le frottement ou l'adhérence du corps mou à cette même surface, et qui lui sont tangentes en sens contraire du

mouvement de pénétration. En considérant chaque élément de la surface du corps comme soumis à ces deux genres de forces perpendiculaires entre elles, et décomposant chacune de celles-ci en deux composantes, l'une horizontale, l'autre verticale, les premières se détruiront deux à deux, et la résultante ou la somme des composantes verticales sera évidemment proportionnelle à l'aire du grand cercle ou à l'amplitude.

La nature de la terre restant la même, les forces normales et la position de la résultante totale qui en provient ne changeront pas; mais si la surface du corps choquant adhère plus ou moins à la substance du milieu, d'une expérience à l'autre, la portion de la résultante qui en provient pourra être augmentée ou diminuée. On conçoit, d'ailleurs, que cette influence de l'état de la surface du projectile ne doit être sensible que pour les petites pénétrations, parce que cet état change dès qu'il a pénétré d'une certaine quantité, et est dès lors en relation directe avec celui du milieu.

Ce qui rend cette explication fort probable, c'est que quand on mouille un peu les projectiles et que les pénétrations ne sont pas très grandes, on trouve pour la quantité K une valeur constante encore, mais moindre que quand le corps est sec et que la terre peut y adhérer de suite, dès le commencement de la pénétration, avec le même degré de consistance que dans toute la course. On conçoit, d'ailleurs, que l'effet de l'eau qui se trouve à la surface du projectile ne peut diminuer la résistance que dans le cas des petites pénétrations, parce qu'à mesure qu'il avance, il perd une partie du liquide qui lubrifiait sa surface.

Exemple à l'appui de cette explication.

28. Comme exemple de ce que je viens de dire, je rapporterai l'expérience suivante, où les données étaient

$$h = 0^m,05, \quad e = 0^m,074, \quad D = 0^m,118,$$
$$p = 6^{kil.},25, \quad \frac{\pi g D^2}{2p} = 0,034328,$$

et d'où l'on a déduit, par la formule (6) relative à la pénétration totale,

$$K = 1219^{kil.}.$$

Cette valeur est bien inférieure à celle que nous avons trouvée jusqu'ici pour la même terre, et cependant nous pouvons nous assurer qu'elle répond à très peu près à celle de la résistance qu'éprouvait le projectile pendant la pénétration; car en calculant les durées des pénétrations à diverses distances, par la formule (8), on trouve les mêmes résultats que par le tracé des courbes : ainsi, par exemple, pour

$$\left.\begin{matrix} e = 0^m,0295 \\ e = 0^m,0590 \end{matrix}\right\} \text{ le calcul donne } \left\{\begin{matrix} t = 0'',0283 \\ t = 0'',0620 \end{matrix}\right\} \text{ et la courbe } \left\{\begin{matrix} t = 0'',0270 \\ t = 0'',0610 \end{matrix}\right.$$

L'accord remarquable du calcul et de l'observation nous prouve que la valeur trouvée pour la constante K est bien celle qui convient à cette expérience, et que si elle est plus petite que dans les autres, cela tient à la cause que nous venons d'indiquer.

Ici s'arrête la série d'expériences que j'ai faites sur l'observation de la loi du mouvement pendant la pénétration. Pour déterminer celle de la résistance, je me propose,

par la suite, de reprendre ces recherches par des procédés analogues, et j'espère pouvoir les étendre à des corps plus consistans que cette terre glaise, tels que des sables fins, de la terre végétale et même des bois. Mais, en attendant, je vais offrir encore plusieurs vérifications des lois énoncées, que j'ai déduites de l'observation des pénétrations totales dans divers milieux.

Résultats des expériences sur la résistance de la terre glaise à la pénétration, déduites de l'observation des pénétrations totales, pendant la transmission du mouvement.

29 J'ai recueilli aussi quelques résultats relatifs à la pénétration d'un projectile dans la même terre, en observant les profondeurs totales de pénétration produites dans quelques expériences sur la transmission du mouvement par le choc. Je mesurais directement, après chaque expérience, la profondeur totale de pénétration; la courbe des flexions du dynamomètre me fournissait la flexion totale f; la hauteur h était mesurée d'avance. J'avais donc chaque fois tous les élémens nécessaires pour l'application de la formule (17) du n° 22. J'ai rapporté dans une colonne particulière la valeur de $\int T df$, ou de la quantité de travail développée par le dynamomètre, en sens contraire du mouvement.

TABLEAU II.

30. *Expériences sur la résistance de la terre glaise à la pénétration d'une sphère en fonte.*

Détermination du coefficient K de la formule $R = K\frac{\pi d^2}{4}$ par l'observation des pénétrations totales, pendant la transmission du mouvement à la masse choquée.

NUMÉROS des expériences.	HAUTEUR de chute de la sphère au-dessus de la surface h	PROFONDEUR totale de la pénétration e	FLEXION maximum du dynamomètre	CHUTE totale du projectile $h+e+f$	QUANTITÉ de travail développée par dynamomètre $\int T\,df$	VALEUR de K	DONNÉES PARTICULIÈRES.	FORMULE EMPLOYÉE.
	m	m	m.	m.	k.m.	k.		
1	0,21	0,168	0,0160	0,3840	0,4076	1630	$p = 6^k$. $P = 65^k,99$	$K = \frac{p'(h+e+f)+Pf-\int T\,df}{\frac{\pi D^2}{4}\left\{e-\frac{1}{3}D\right\}}$ (17)
2	0,30	0,208	0,0177	0,5257	0,4988	1675	$D = 0^m,118$	
3	0,40	0,254	0,0202	0,6525	0,6529	1644	$\frac{\pi D^2}{4} = 0^{mq},0109$	
					Moyenne....	k. 1650		

31. *Observations.* La constance des valeurs de K nous montre que la loi de la résistance est encore la même dans le cas actuel, quoique la pénétration du projectile ait eu lieu en même temps que la transmission du mouvement à la caisse qui contenait la terre glaise.

Comme application des formules (8) et (13), je rapporterai les résultats suivans, du calcul de la durée des deux périodes de la pénétration, dans la première expérience du tableau ci-dessus.

1re période..... $e' = 0^m,059$..... $t' = 0'',0309$

2e période..... $e - e' = 0,109$..... $t = 0,0905$

pénétration totale $e = 0,168$ durée totale $= 0'',1214$.

Résultats des expériences faites sur la pénétration, pendant que le corps choqué est animé d'un mouvement perpendiculaire à celui du corps choquant.

32. Les expériences que j'ai entreprises pour vérifier si les lois du frottement subsistaient encore, quand il y a des chocs, m'ont aussi fourni quelques résultats relatifs aux pénétrations, par l'observation des profondeurs totales. On trouvera plus loin, au chapitre IV, nos 2 et suivans, la description de l'appareil employé à ces expériences; il me suffira, quant à ce qui concerne la pénétration, de dire que le traîneau était animé d'une certaine vitesse horizontale, tandis que le projectile tombait avec une vitesse verticale, et l'on verra, par le tableau suivant, que cette circonstance n'altère pas la loi de la pénétration.

N'ayant pu observer que les pénétrations totales, j'ai employé, pour le calcul des valeurs de K, la formule (3) du n° 9.

La terre glaise sur laquelle le choc avait lieu avait un peu plus de consistance que celle des expériences précédentes.

TABLEAU III.

33. *Expériences sur la résistance de la terre glaise à la pénétration d'une sphère en fonte.*

Nota. La terre glaise employée dans ces expériences avait plus de consistance que celle qui avait servi aux expériences des tableaux I et II.

Détermination du coefficient K *de la formule* $R = \frac{\pi K d^2}{4}$ *par l'observation de la pénétration totale.*

NUMÉROS des EXPÉRIENCES.	HAUTEUR de chute de la sphère h	PÉNÉTRATION totale e	VALEUR de $h+e$	VALEURS du coefficient K	FORMULE EMPLOYÉE ET DONNÉES constantes.
1	$0^m,300$	$0^m,1080$	$0^m,1408$	3853k.	$D = 0^m,216$, $p = 25k.$, $\frac{\pi g}{p} = 1,2316$, $K = \frac{V^2 + 2ge}{\frac{\pi g}{p} e^2 \left\{ D - \frac{2}{3} e \right\}}$
2	0, 300	0, 1005	0, 4005	4237	
		Moy. partielle..		4045	
3	0,300	0,1245	0, 4245	4595	$D = 0^m,271$, $p = 50k.$, $\frac{\pi g}{p} = 0,6163$, $V^2 + 2ge = 2g(h+e)$.

34. *Observations.* Les résultats contenus dans ce tableau confirment la loi déduite des précédens; les différences assez faibles que l'on observe entre eux ne dépassent pas ce qu'on peut attribuer à l'inégalité de consistance de la terre.

Les données de ces expériences ont été fournies par celles que l'on a faites sur l'influence des chocs sur le frottement; on pourra donc, au besoin, en lier les résultats entre eux.

Pour donner une application de la formule du n° 14, par laquelle on peut déterminer approximativement la durée de la pénétration, quand elle ne dépasse pas le demi-diamètre du projectile, je choisirai la première expérience du tableau précédent pour laquelle on a

$$h = 0^m,30, \quad c = a = 0^m,108, \quad K = 3853^k,$$

et par suite,

$$A = 54,491, \quad B = 686,194, \quad C = 3137,065;$$

à l'aide de ces données, la formule du n° 14 donne

$$t = 0'',075.$$

Résultats des expériences sur la résistance de la terre glaise ferme, à la pénétration d'une sphère en fonte.

35. Pour m'assurer que les lois observées sur la terre glaise molle subsistent encore, lorsque le milieu devient beaucoup plus consistant, j'ai observé les pénétrations totales produites par la chute d'un projectile en fonte sur la terre glaise que les potiers emploient ordinairement à la fabrication des briques et des fourneaux. Les résultats que je vais présenter dans le tableau suivant sont empruntés aux expériences sur la transmission du mouvement par le choc, rapportées au tableau I du chapitre IV. Je les ai calculés par la formule (16) du n° 22, en relevant les données nécessaires, soit sur la terre glaise, soit sur les courbes de flexion du dynamomètre.

TABLEAU IV.

36. *Expériences sur la résistance de la terre glaise à la pénétration d'une sphère en fonte.*

Nota. La terre employée dans ces expériences avait beaucoup de consistance; elle avait été préparée par des potiers pour être employée à la fabrication des pots en terre et des fourneaux.

NUMÉROS des expériences.	HAUTEUR de chute de la sphère h	PÉNÉTRATION totale e	FLEXION maximum du dynamomètre f	VALEUR du coefficient K	DONNÉES PARTICULIÈRES.	FORMULE EMPLOYÉE.
	m.	m.	m.	kil.		
1	0,10	0,0136	0,0060	32075	$D = 0^m,118$	
2	0,20	0,0190	0,0077	28808		
3	0,40	0,0252	0,0125	30897	$p = 6^{kil.}$	
4	0,50	0,0270	0,0135	28770		
5	0,65	0,0336	0,0140	28595		
			Moyenne....	29829		
6	0,10	0,0210	0,0130	28924		
7	0,20	0,0237	0,0163	29730	$D = 0^m,146$	$K = \frac{p(h+e+f) + Pf - \int T\,df}{\pi e^2 \left\{\frac{D}{2} - \frac{e}{3}\right\}}$ (16)
8	0,30	0,0275	0,0195	31184		
9	0,40	0,0337	0,0233	27702	$p = 11^k,988$	
10	0,50	0,0380	0,0246	26430		
11	0,65	0,0430	0,0275	26137		
			Moyenne....	29351		
12	0,10	0,0185	0,0230	31005	$D = 0^m,216$	
13	0,20	0,0245	0,0280	29446	$p = 20^k,28$	
			Moyenne...	30275		
			Moyenne générale.	29677		

Observations sur les résultats du tableau précédent.

37. Les résultats de ce tableau confirment pleinement les lois que nous avons admises d'abord et vérifiées ensuite par nos précédentes expériences, et cependant on

observera que la résistance de la terre glaise est, dans le cas actuel, dix-sept fois plus grande que dans celui des tableaux I et II, et l'on remarquera même que les différences inévitables entre les résultats de pareilles observations, sont moindres à proportion dans le tableau ci-dessus que dans les précédens. Cela tient sans doute à ce que la terre employée avait été préparée par des potiers pour leur usage, et était bien plus également malaxée que celle qui avait été remaniée par mes manœuvres, peu exercés à ce genre de travail.

Résultats des expériences sur la résistance du sable fin de rivière à la pénétration d'une sphère en fonte.

38. J'ai aussi profité des expériences que j'avais faites sur la transmission du mouvement par le choc d'une sphère en fonte sur du sable de rivière, chap. II, tableau II, pour observer les profondeurs de pénétration dues à diverses hauteurs de chute, et vérifier dans ce cas les lois admises précédemment.

Le sable employé provenait de la Moselle et avait été passé au tamis, il était d'un grain fin et égal, légèrement humide et susceptible d'un assez grand tassement, ce qui apportait quelque divergence dans les résultats, ainsi qu'on le verra au tableau suivant.

On a employé pour le calcul des valeurs de K la formule (16) du n° 22 ; celles de f ont été relevées sur les courbes de flexion du dynamomètre.

TABLEAU V.

39. *Expériences sur la résistance du sable fin de rivière, à la pénétration d'une sphère en fonte.*

NUMEROS des expériences.	HAUTEUR de chute de la sphère h	PÉNÉTRATION totale e	FLEXION maximum du dynamomètre f	VALEUR du coefficient K	DONNÉES PARTICULIÈRES.	FORMULE EMPLOYÉE.
	m	m.	m.	kil.		
1	0,10	0,0338	0,0146	10633	$D = 0^m,146$	$K = \frac{p(h+e+f)+Pf-\int T\,df}{\pi e^2\left\{\frac{D}{2}-\frac{e}{3}\right\}}$
2	0,20	0,0420	0,0183	11283	$p = 11^k,988$	
3	0,30	0,0558	0,0206	8823	$P = 60^k,18$	
4	0,10	0,0348	0,4021	10620	$D = 0^m,216$	
5	0,20	0,0530	0,0290	12525	$p = 20^k,28$	
6	0,30	0,0625	0,0330	12961	$P = 60^k,18$	
			Moyenne...	11141		

Observations. Sauf les différences occasionées par l'inégalité du tassement du sable, on voit que les résultats du tableau ci-dessus confirment les lois que nous avons admises et vérifiées jusqu'ici.

Conclusion générale.

40. Dans les expériences que j'ai rapportées dans les tableaux précédens, le poids des projectiles a varié de 6 kil. jusqu'à 50 kil., ou de 1 à 8,3; les hauteurs de chute de $0^m,05$ à $0^m,65$, ou de 1 à 13; la résistance des milieux de 1 à 17,5, et dans ces limites étendues, les résultats s'accordent pour démontrer que cette résistance est,

1°. Indépendante de la vitesse;

2°. Proportionnelle à l'amplitude de l'impression ou

à l'aire du cercle de la sphère, intercepté par le prolongement de la surface du milieu.

Ces lois simples, admises par D. G. Juan, se trouvent donc vérifiées, quant aux corps soumis à l'expérience, et il y a lieu de croire qu'elles le seront aussi pour d'autres milieux. C'est, au reste, ce que nous montreront les expériences que nous devons entreprendre en 1834, soit à l'aide d'appareils analogues à ceux que j'ai décrits, soit par le tir en brèche contre une assez grande étendue de revêtement de l'ouvrage à cornes de la citadelle de Metz.

Changement de forme de la surface des corps mous par suite de l'impression.

41. Une circonstance assez remarquable, que j'ai passée sous silence jusqu'ici, parce que je n'ai pas eu les moyens de l'examiner avec tout le soin nécessaire, se manifeste lors de la pénétration d'un corps dur dans un corps mou. Le niveau de la surface s'élève et cesse d'être plan; autour du projectile, la terre s'élève en affectant une forme courbe dont le profil est à peu près représenté par la figure 4, Pl. 16. Lorsque le corps choqué est du sable, il se produit un effet analogue, mais, attendu le peu de cohésion des parties entre elles, la surface n'affecte pas une courbure aussi continue, et le bord de l'impression est à arête vive.

Le volume compris entre la nouvelle surface et l'ancien plan de niveau avant l'impression, m'a paru être en rapport avec celui de l'impression, et je me propose d'établir un appareil qui me permette de le cuber approximativement, afin de m'assurer si ces deux volumes ne seraient pas égaux. S'il en était ainsi, on en pourrait conclure que les corps mous qui ne sont pas contenus dans une enve-

loppe inextensible, ou dont une des surfaces est libre ne se compriment pas sensiblement, qu'ils ne font que changer de forme, et que quand ils ne sont renfermés que dans un espace clos, ils doivent transmettre la pression en tous sens. Ce résultat serait, au reste, d'accord avec beaucoup d'autres, et notamment avec le fait suivant observé sur du suif. En tirant des coups de fusil à balle dans une caisse en bois mince, remplie de suif, on observe que les parois sont brisées par la pression qui leur est transmise par le suif (1).

Cette circonstance mérite d'être examinée avec soin, et le temps seul m'a manqué cette année pour faire construire l'appareil convenable. Je me propose de réparer cette omission par la suite, et je me contenterai ici, pour le présent, d'avoir signalé le fait.

Les lois établies précédemment, permettront de déterminer l'effet du choc des bombes sur les voûtes.

42. Lorsque de nouvelles et plus nombreuses expériences auront confirmé les lois que je déduis de celles que je présente aujourd'hui, le calcul des effets du choc des corps durs sur des corps plus ou moins pénétrables, et en particulier celui du choc des bombes sur les voûtes, si intéressant pour l'art des constructions militaires, offrira beaucoup moins de difficultés; il suit, en effet, des formules établies aux n^os^ 9 et suivans, que, quand le coefficient K de la résistance du milieu sera connu, on

(1) Des expériences plus récentes faites à Metz en 1834 par une commission formée par ordre du ministre de la guerre, ont montré que la pression développée par un boulet dans de la terre grasse à $0^m,50$ ou $0^m,60$ de son passage était capable de briser des madriers en chêne de $0^m,05$ d'épaisseur sur $0^m,30$ de largeur, et $3^m,00$ de portée.

pourra, pour chaque instant de la pénétration ou du choc, déterminer l'intensité de l'effort exercé par le projectile ou de la force de compression, ainsi que la durée du phénomène. La valeur *maximum* de cette intensité sera d'ailleurs correspondante à la plus grande amplitude de l'impression, et facile à calculer. Ce n'est pas ici le lieu de m'étendre davantage sur cette question, et je me borne à indiquer le parti qu'on peut tirer des résultats précédens pour sa solution numérique.

CHAPITRE IV.

Expériences sur le frottement pendant le choc.

Les lois qu'il s'agit de vérifier paraissent admissibles à priori.

1. Les expériences sur la résistance des corps mous à la pénétration, et sur la transmission du mouvement par le choc, dont nous avons rendu compte dans les chapitres II et III, nous ont montré comment on pourra, dans chaque cas, à l'aide d'observations spéciales, déterminer l'intensité de la pression exercée par le corps choquant sur le corps choqué, lorsque la valeur du coefficient K de la résistance à la pénétration, et le volume de l'impression permanente qui aura été produite seront connus. Nous avons vu aussi que la durée du choc ou de la transmission du mouvement, bien que très courte, peut, dans tous les cas, être appréciée, au moins approximativement, quand on connaît la valeur de K, et qu'elle sera, toutes choses égales d'ailleurs, d'autant moindre que les corps en contact seront plus durs, mais qu'elle ne peut jamais

être nulle; d'où résulte que les forces de compression développées pendant l'acte du choc ne doivent pas être considérées comme infinies et qu'elles ont, à chaque instant de la compression, une valeur finie qu'on peut exprimer comme les pressions simples, en les comparant au kilogramme comme unité de poids.

Ces conséquences sont tout-à-fait d'accord avec les principes exposés en détail et éclaircis par de nombreux exemples, par M. Poncelet, dans ses considérations sur la communication du mouvement par le choc direct des corps, nos 153 et suivans de sa *Mécanique industrielle*. On serait donc conduit directement à en conclure que le frottement, qui résulte de ces forces de compression, pendant l'acte du choc, quoique dû à des pressions qui varient à chaque instant de la durée du phénomène, doit suivre les lois que nous avons déduites de nos expériences sur les divers cas où les pressions restaient constantes. C'est ce qui est, en effet, admis expressément par M. Poisson, dans la seconde édition de son *Traité de Mécanique*, n° 475, où il s'exprime en ces termes : « Quoi-» qu'on n'ait pas fait d'observations sur l'intensité du » frottement qui a lieu pendant le choc, on peut sup-» poser, par induction, qu'il suit les lois générales du » frottement des corps soumis à des pressions proprement » dites, puisque la percussion n'est autre chose qu'une » pression d'une très grande intensité, exercée pendant » un temps très court. » C'est pour vérifier par l'observation directe l'exactitude de cette appréciation du frottement, pendant le choc, que j'ai entrepris les séries d'expériences suivantes, en choisissant pour les faire le cas où des bandes de fonte glissent sur des barres de même métal enduites de saindoux, attendu que c'est un de ceux qui ont été étudiés avec le plus de soin, dans mes

précédentes expériences, et un des plus fréquens dans la pratique.

Description de l'appareil employé aux expériences.

2. L'appareil que j'ai employé ne diffère de celui qui est décrit en détail aux nos 1 à 9 de mon premier Mémoire, et modifié en 1832, ainsi qu'il est expliqué au n° 68 du second Mémoire, que par la disposition suivante nécessaire pour suspendre au traîneau, à une hauteur voulue, le corps destiné à produire le choc, et à le laisser tomber à volonté pendant le mouvement; disposition d'ailleurs analogue à celle qui a été décrite au n° 3 du chapitre II, mais que je reproduirai en partie ici, pour la clarté de l'exposition des procédés d'observation.

Sur les côtés de la caisse du traîneau s'élèvent deux couples de montans verticaux en sapin *ab* et *a'b'*, fig. 1 et 2, Pl. 18, de $0^m,05$ d'équarrissage, percés de trous espacés de $0^m,05$ en $0^m,05$, et dans lesquels on passe deux chevilles en fer, sur lesquelles s'appuie de part et d'autre une traverse mobile *cd* en chêne. En remontant ou abaissant les chevilles, on peut faire varier à volonté la hauteur de la traverse *cd* au-dessus du traîneau. Une vis *e* avec rosette et écrou à oreilles passe librement à travers un trou pratiqué au milieu de la traverse, et soutient une tenaille en écrevisse, à laquelle est suspendu le corps choquant, comme on l'a vu précédemment. Lorsque la bombe est trop lourde pour qu'on puisse serrer facilement les branches à la main, on billotte les brins de l'étoupille avec laquelle on les lie, pour obtenir une tension suffisante. La vis *e* est filetée sur une longueur de $0^m,10$, de sorte qu'après avoir placé convenablement la traverse *cd* et avoir ainsi amené la bombe à peu près à sa position,

on peut, à l'aide de l'écrou à oreilles, élever cette bombe exactement à la hauteur voulue.

On conçoit facilement, d'après cette description, que la caisse et ce dispositif, faisant corps avec le traîneau, tout le système se met en marche d'un mouvement commun, et que si, à un instant quelconque de la course, la bombe tombe sur le traîneau, elle y arrive avec une vitesse verticale due à la hauteur de la chute et avec une vitesse horizontale qui, ainsi que nous le ferons voir plus loin, est sensiblement la même que celle de ce traîneau. C'est pour obtenir, sans secousse extérieure et sans ébranlement, la chute de la bombe, que les longues branches de l'écrevisse sont retenues par un brin d'étoupille dont un bout libre, d'une longueur convenable, pend en arrière. Un homme met le feu à ce bout libre, et donne le signal du départ du traîneau; la combustion se communiquant à la partie qui retient la tenaille, celle-ci s'ouvre brusquement et lâche la bombe, sans que rien puisse, dans cette opération, altérer le mouvement du système des deux corps. En variant d'ailleurs la longueur du brin libre, ou en l'introduisant dans un tube de papier, on peut retarder ou accélérer la rapidité de la combustion, mais il ne serait pas possible de faire tomber exactement la bombe à un instant donné, ce qui est, comme on le verra, tout-à-fait inutile pour le but qu'on se propose.

Circonstances générales des expériences.

3. Les expériences ont été faites en imprimant au traîneau tantôt un mouvement uniforme, tantôt un mouvement accéléré : on obtenait, à volonté, le premier de ces mouvemens en ne donnant à la caisse descendante

que le poids nécessaire, pour vaincre le frottement, et en pendant sous cette caisse une bombe du poids de 50 kilogrammes, qui ne descendait que de $0^m,50$, et cessait ensuite d'agir, ainsi qu'il a été expliqué au n° 97 du second Mémoire. Quant au mouvement accéléré, il se produit, comme on sait, toutes les fois que le poids moteur surpasse le frottement. La loi de ces mouvemens était d'ailleurs observée et déterminée dans chaque cas à l'aide des courbes tracées par le style de notre appareil chronométrique.

Examen général de ce qui se passe dans les expériences.

4. On voit aisément, d'après ce qui précède, ce qui se passe pendant les expériences; prenons, en effet, pour exemple un cas où le système du traîneau et de la bombe pendue au-dessus de lui sont animés d'un mouvement uniforme. A l'instant où la combustion de l'étoupille, qui retenait les branches de la tenaille, leur permet de s'écarter, la bombe devient libre et tombe, en vertu de son poids; pendant qu'elle descend, et jusqu'au moment où elle atteint le traîneau, celui-ci se trouve déchargé du poids de la bombe, et acquiert une quantité de mouvement précisément égale à celle que le frottement dû à ce poids aurait consommé. La vitesse horizontale du traîneau, à l'instant où le choc commence, est donc un peu plus grande que celle de la bombe. Passé cette époque, les forces de compression développées par le choc produisent un frottement variable comme elles, à chaque instant, et qui consomme une certaine quantité de mouvement; de sorte que le traîneau, dont la marche s'accélère pendant la chute de la bombe, est ensuite retardé pendant l'acte du choc.

Formules employées au calcul des expériences. — Cas où le traîneau est animé d'un mouvement uniforme.

5. Comme il s'agit de vérifier si le frottement reste proportionnel aux pressions variables qui le produisent pendant la durée très courte du phénomène, nous allons établir les formules qui y sont relatives dans cette hypothèse, et nous les comparerons ensuite aux résultats de l'expérience. Considérons d'abord le cas d'un mouvement uniforme, et appelons

Q, le poids du traîneau et de l'appareil de suspension;

q, le poids de la sphère qui produit le choc;

f, le rapport du frottement à la pression pour les surfaces en contact;

h, la hauteur de chute de la bombe au-dessus du traîneau;

u, la vitesse due à cette hauteur;

t, le temps de la chute;

v, la vitesse horizontale du traîneau et de la bombe, à l'instant où celle-ci est lâchée par la tenaille;

v', la vitesse de ces corps après le choc;

$g = 9^m,8088$.

Au moment où la bombe devient libre, la quantité de mouvement possédée par le système, est

$$\frac{Q+q}{g}.v.$$

Le poids de la bombe, quand elle est liée au traîneau, produit un frottement fq, qui, dans chaque élément du temps dt, consomme une quantité de mouvement

$$fqdt,$$

et qui, pendant la durée de la chute, en consommerait la quantité

$$fqt;$$

mais puisqu'au contraire la bombe cesse de presser sur le traîneau, pendant ce temps, il s'ensuit que la quantité de mouvement gagnée par le système, par suite de cette diminution de pression, pendant le temps t de la chute, est précisément

$$fqt.$$

A l'instant où la bombe atteint le traîneau, la quantité de mouvement possédée par le système, est donc

$$\frac{Q+q}{g}v + fqt.$$

A partir de cet instant, et pendant toute la durée du choc, la bombe perd dans chaque élément du temps, une quantité de mouvement

$$\frac{q}{g}.du;$$

d'où résulte une force de compression $\frac{q}{g}\frac{du}{dt}$, produisant un frottement

$$\frac{fq}{g}.\frac{du}{dt}.$$

Ce frottement consomme, dans l'élément du temps, une quantité de mouvement

$$\frac{fq}{g}du;$$

et quand tout mouvement relatif, dans le sens vertical,

est détruit, ce frottement, dû aux forces de compression, a finalement consommé une quantité de mouvement égale à

$$\frac{fqu}{g}.$$

Par conséquent, lorsque le choc est terminé, on doit avoir

$$\frac{Q+q}{g}v + fqt - \frac{fqu}{g} = \frac{Q+q}{g}v',$$

ou

$$fqgt - fqu = (Q+q)(v'-v).$$

Or, la bombe tombant d'un mouvement uniformément accéléré, en vertu de la pesanteur, on a évidemment

$$u = gt,$$

d'où résulte que

$$v = v',$$

c'est-à-dire que, dans notre appareil, la quantité de mouvement détruite par le frottement résultant des forces de compression, doit être précisément égale à celle qu'il gagne pendant la chute de la bombe.

Ces deux effets sont successifs, mais ils se passent tous deux dans un intervalle de temps très court, et ne doivent par conséquent occasioner dans la courbe du mouvement que des ondulations en sens contraire qui n'altèrent pas la loi générale et qui doivent être à peine sensibles, soit dans la courbe minute, soit dans la courbe relevée à l'échelle du dixième.

On peut négliger l'accélération du mouvement du traîneau pendant la chute de la bombe.

6. Il est facile de s'assurer *à priori* que l'accélération

de la vitesse du traîneau pendant la chute de la bombe est toujours très faible dans nos expériences, quoique leur poids ait atteint 50 kilog., et que la hauteur ait été pour ce cas jusqu'à $0^m,60$. Nous remarquerons en effet que, d'après ce que nous avons dit dans le numéro précédent, on aura, en appelant v_1, la vitesse horizontale du traîneau à l'instant où la bombe l'atteint,

$$\frac{Q}{g} v + fqt = \frac{Q}{g} v_1,$$

d'où

$$v_1 - v = \frac{fqgt}{Q} = \frac{fqu}{Q},$$

en y faisant, par exemple,

$$q = 50 \text{ kil.}, \quad h = 0^m,60,$$

d'où

$$u = 4_m,21, \quad Q = 267^{kil.},84, \quad f = 0,071,$$

ce qui se rapporte à l'un des chocs les plus intenses que nous ayons obtenus dans nos expériences (*voy.* tableau III, douzième expérience); on trouve

$$v_1 - v = 0^m,000295.$$

Or, le choc de la bombe sur le traîneau, dans le sens horizontal, n'ayant lieu qu'en vertu de cette différence de vitesse, on voit que son effet, sur le mouvement général, doit être tout-à-fait insensible, et qu'on peut, ainsi que nous l'avons fait dans le calcul ci-dessus, en négliger l'influence sur le mouvement général du traîneau.

Cas où le traîneau est animé d'un mouvement accéléré.

7. Le raisonnement qui précède s'appliquerait de la

même manière au cas où le système de la bombe ou du traîneau serait animé d'un mouvement accéléré, et il en résulte que si, comme nous l'avons admis, le frottement pendant le choc reste proportionnel à la pression, la loi générale du mouvement de notre appareil ne doit pas être troublée; ou, en d'autres termes, que si avant la chute de la bombe le mouvement était uniforme ou accéléré suivant une certaine loi, il le sera encore après le choc, suivant la même loi. La seule perturbation qui pourra en résulter, sera manifestée par fois par des ondulations, qui, dans la plupart des cas, devront être à peine sensibles.

La dureté ou la compressibilité des corps en contact ne devra d'ailleurs avoir aucune influence sur le résultat, et en faisant tomber la bombe sur les madriers de hêtre qui forment le traîneau, ou sur une masse de terre glaise molle posée sur ce traîneau, on devra, pour des circonstances égales d'ailleurs, trouver la même loi de mouvement, et cette loi de mouvement sera la même que s'il n'y avait pas eu de choc.

Résultats des expériences.

8. Il nous reste maintenant à comparer ces conséquences avec les résultats des expériences, qui sont consignés dans les quatre tableaux suivans. Dans ces expériences, on a fait varier le poids des sphères choquantes de $11^{k},99$ à $50^{kil.}$ ou 1 à 4 environ; le rapport du poids du corps choquant à celui du corps choqué de $\frac{1}{10}$ à $\frac{1}{4}$; les hauteurs de chute de $0^{m},10$ à $0^{m},70$ ou de 1 à 9. Les mouvemens ont été ou uniformes ou uniformément accélérés, et la résistance des corps qui recevaient immédiatement le choc de la sphère, a varié depuis la valeur $K = 417$ kil., relative à la terre glaise qu'on avait mise sur le traîneau et déduite,

ainsi qu'on peut le voir au tableau III, n° 33, chapitre III, des enfoncemens totaux observés directement, et celle de K=5000000 kil. environ, correspondante, d'après les expériences connues jusqu'à ce jour, aux bois durs, tels que le chêne, le hêtre, etc.; c'est-à-dire que cette résistance a différé d'une série à l'autre dans le rapport de 1 à 1250000. Si donc les lois que nous avons admises jusqu'ici sont vérifiées par l'expérience entre ces limites étendues, on pourra en conclure qu'elles sont générales et s'appliquent à tous les cas de la pratique. Quant à l'étendue de la surface de contact des pièces frottantes, elle a été constante et égale à $0^{m.q}$,036.

Le calcul des expériences a été fait d'après les formules et les résultats exposés aux n^os^ 19 et suivans du premier Mémoire, et que nous allons rapporter ici pour épargner au lecteur la peine de les y rechercher.

Dans le cas où le mouvement est uniforme, d'après ces formules, en appelant,

P, le poids moteur de la caisse descendante et qui suffit pour entretenir le mouvement uniforme;

F, le frottement,

on a,

$$F = 0{,}95.P;$$

et dans celui où le mouvement est uniformément accéléré, en appelant

P, le poids moteur de la caisse descendante;

T, la tension du brin horizontal de la corde,

$2c$, le paramètre de la parabole qui représente la loi du mouvement;

$Q + q$, la pression totale due au poids du traîneau et de la bombe;

F, le frottement;

on a

$$T = 0{,}95\left[P - \left(0{,}516 + \frac{P}{g}\right)\frac{2}{2c}\right] - 0^{kil.},086,$$

et

$$F = T - \frac{Q+q}{g}\cdot\frac{2}{2c}.$$

TABLEAU I.

9. *Expériences sur le frottement de la fonte en mouvement sur de la fonte, avec enduit de saindoux, pendant le choc.*

Nota. Le choc est produit par la chute d'une sphère en fonte qui tombe sur les madriers de hêtre du traîneau, pendant qu'il glisse d'un mouvement uniforme.

NUMÉROS des expériences.	POIDS du traîneau Q.	POIDS de la sphère q.	PRESSION totale $Q+q$.	HAUTEUR de chute de la sphère. h.	POIDS moteur pendant le mouvement uniforme	FROTTEMENT.	RAPPORT du frottement à la pression.	VITESSE du mouvement uniforme.	OBSERVATIONS.
	kil.	kil.	kil.	mèt.	kil.	kil.		mèt.	
1	223,23	11,99	235,22	0,10	18,733	17,796	0,075	0,842	
2	223,23	11,99	235,22	0,10	18,733	17,796	0,075	0,800	La bombe n'est pas tombée; il n'y a pas eu de choc.
3	223,23	11,99	235,22	0,10	18,733	17,796	0,075	0,828	
4	223,23	11,99	235,22	0,30	18,733	17,796	0,075	0,806	
5	223,23	11,99	235,22	0,30	18,733	17,796	0,075	0,818	
6	216,86	11,99	228,85	0,60	17,103	16,248	0,071	0,750	
7	216,86	11,99	228,85	0,60	17,103	16,248	0,071	0,780	
8	216,86	25,00	241,86	0,30	18,54	17,613	0,072	0,773	
9	216,86	25,00	241,86	0,30	18,54	17,613	0,072	0,817	
10	216,86	25,00	241,86	0,30	18,54	17,613	0,072	0,840	
11	216,86	25,00	241,86	0,60	18,54	17,613	0,072	0,853	
12	216,86	25,00	241,86	0,60	18,54	17,613	0,072	0,811	
13	216,86	25,00	241,86	0,60	18,54	17,613	0,072	0,830	Il n'y a pas eu de choc.
14	216,86	25,00	241,86	0,60	18,54	17,613	0,072	0,810	
15	216,86	25,00	241,86	0,90	18,54	17,613	0,072	0,815	
16	216,86	25,00	241,86	0,90	18,54	17,613	0,072	0,858	Il n'y a pas eu de choc.
17	216,86	50,00	266,86	0,30	20,38	19,361	0,072	0,925	
18	216,86	50,00	266,86	0,60	20,38	19,361	0,072	0,903	
19								0,928	

Observations sur les résultats du tableau précédent.

10. Si nous comparons entre eux les résultats consignés dans ce tableau, nous voyons d'abord que, dans les expériences où il n'y a pas eu de choc et dans celles où il y en a eu, la vitesse générale du mouvement uniforme est la même, et cela quelle qu'ait été la hauteur de chute des bombes. Cette vitesse n'a dépendu, dans chaque cas, que de la charge ou pression totale du poids moteur, qui imprimait le mouvement, et de l'état des surfaces.

L'examen des courbes du mouvement rend encore plus sensible cette vérification des lois énoncées, si l'on jette en effet les yeux sur la fig. 1 de la Pl. 22, qui représente la courbe relevée du mouvement de la neuvième expérience du tableau ci-dessus, et sur la fig. 1, Pl. 18, qui représente à l'échelle moitié de la grandeur naturelle la courbe minute du mouvement; on voit par la ponctuation de la courbe minute, produite par les vibrations que le choc a occasionnées dans tout l'appareil, et qui se sont fait sentir jusqu'au style du chronomètre, on voit, dis-je, que le choc a eu lieu vers le point 8, ou à environ $0^m,923$ du point de départ, c'est-à-dire, dans une partie de la course où le mouvement devait déjà être uniforme, puisque le poids additionnel, qui agit avec la caisse pour imprimer au système une vitesse convenable, ne descend que de $0^m,50$. Cependant, vers cette partie de la course, la courbe relevée du mouvement offre à peine quelques petites ondulations, et le mouvement général reste uniforme après le choc avec la même vitesse qu'il avait avant. La fig. 2, Pl. 18 et la fig. 2, Pl. 22, relatives à la dixième expérience du même tableau, nous offrent l'exemple d'un cas où, par la rapidité de la combustion de l'étoupille, qui liait les branches de la tenaille, la bombe est tombée

sur le traîneau, presque à l'instant où il se mettait en marche, c'est-à-dire après $0^m,02$ de course, ainsi que le montre le tremblement de la courbe. Le choc a donc eu lieu pendant la période d'accélération du mouvement, et cependant la vitesse, imprimée par le concours du poids P et du poids additionnel au traîneau et à la bombe, n'en est pas moins uniforme et sensiblement la même que dans le cas précédent.

Enfin, la fig. 2, Pl. 19, relative à la quatorzième expérience, où toutes les circonstances ont été les mêmes que dans les deux précédentes, à l'exception du choc qui n'a pas eu lieu, parce que l'étoupille s'étant éteinte, la bombe n'est pas tombée, nous montre, ainsi que les chiffres du tableau, que le mouvement après $0^m,50$ de course est devenu uniforme avec une vitesse qui est encore la même que dans ces expériences.

Je ne pense pas qu'il soit nécessaire de multiplier davantage les figures, et je me bornerai à continuer l'examen du tableau.

Les 11^e, 12^e, 13^e, 14^e, 15^e et 16^e expériences font aussi voir que, soit qu'il y ait choc par la chute d'une bombe du poids de 25 kilogrammes, tombant de $0^m,30$, de $0^m,60$, ou de $0^m,90$ de hauteur, soit qu'il n'y en ait pas, le mouvement du système n'en reste pas moins uniforme, avec la même vitesse.

Les autres expériences du tableau, où toutes les circonstances, sauf celles relatives au choc, restent les mêmes, nous offrent des résultats analogues.

Nous sommes donc autorisés à conclure que les expériences ci-dessus confirment la loi de la proportionnalité du frottement à la pression, pendant le choc d'une sphère en fonte tombant d'une hauteur quelconque, sur un traîneau en bois.

TABLEAU II.

11. *Expériences sur le frottement de la fonte en mouvement sur la fonte, pendant le choc.*

(Les surfaces sont rendues très onctueuses avec du saindoux.)

Nota. Le choc est produit par la chute d'une sphère en fonte qui tombe sur les madriers de hêtre du traîneau pendant qu'il glisse d'un mouvement accéléré.

NUMÉROS des expériences.	POIDS du traîneau Q.	POIDS de la sphère q.	PRESSION totale $Q+q$.	HAUTEUR de chute de la sphère. h.	POIDS moteur pendant le mouvement P.	PARAMÈTRE aC.	FORCE accélératrice $\frac{rd\omega}{dt}$.	FROTTEMENT. F.	RAPPORT du frottement à la pression.	Espace parcouru par le traîneau à l'instant où le choc a eu lieu.	OBSERVATIONS.
	kil.	kil.	kil.	mèt.	kil.	mèt.		kil.		mèt.	
1	223,23	25	248,23	0,30	49,25	4,220	0,473	32,24	0,129	0,072	
2	223,23	25	248,23	«	49,25	4,213	0,474	32,22	0 129	«	Il n'y a pas eu de choc.
3	223,23	25	248,23	0,60	49,25	5,62	0,355	28,25	0,113	0,120	
4	223,23	25	248,23	0,60	40,94	5,00	0,400	26,91	0,104	2,282	
5	223,23	25	248,23	0,60	40,94	5,72	0,350	28,39	0,114	0,417	
6				0,90		5,72	0,350	28,39	0,114	«	
7	223,23	25	248,23	0,90	40,94	5,76	0,347	28,47	0,114	0,580	
8				«		5,68	0,352	28,39	0,114	«	Il n'y a pas eu de choc.
9				«		5,76	0,347	28,47	0,114	«	
10	223,23	50	273,23	0,30	49,25	4,56	0,348	32,20	0,117	0,368	
11	223,23	50	273,23	0,30	49,25	4,56	0,471	31,11	0,113	0,500	
12	223,23	50	273,23	0,30	49,25	4,56	0,471	31,11	0,113	1,750	
13	216,86	50	266,86	0,60	49,25	4,24	0,471	31,11	0,116	0,750	
14	223,23	50	273,23	0,60	49,25	4,08	0,490	30,49	0,111	0,850	

Observations sur les résultats contenus dans le tableau précédent.

12. On voit par les résultats contenus dans ce tableau, que, dans toutes ces expériences, le mouvement a été uniformément accéléré, et que les paraboles qui en représentent la loi, ont sensiblement le même paramètre, lorsque, toutes choses égales d'ailleurs, il n'y a pas de

choc ou qu'il y en a un produit par la chute d'une bombe d'une hauteur quelconque.

La fig. 1, Pl. 20, et la fig. 4, Pl. 22, relatives à la cinquième expérience où la bombe a atteint le traîneau à $0^m,417$ de son point de départ, nous font voir que les variations d'accélération et de retard, produites successivement par la chute et par le choc de cette bombe, sont à peine sensibles dans la loi générale du mouvement, et en la comparant à la fig. 2, Pl. 20, et la fig. 5, Pl. 22, relatives à la huitième expérience, où il n'y a pas eu de choc, mais où toutes les autres données ont été les mêmes, on voit que la loi d'accélération du mouvement est la même dans les deux cas.

On remarquera de plus, que les chocs ayant eu lieu en des points quelconques de la course du traîneau, soit au commencement, soit vers la fin, c'est-à-dire quand il était animé de vitesses par conséquent très différentes, il s'ensuit une autre confirmation que le frottement dû aux compressions occasionées par le choc est indépendant de la vitesse des surfaces en contact.

TABLEAU III.

13. *Expériences sur le frottement de la fonte en mouvement sur la fonte, avec enduit de saindoux, pendant le choc.*

Nota. Le choc est produit par la chute d'une sphère en fonte qui tombe sur une masse de terre glaise, pendant que cette masse et le traîneau glissent d'un mouvement uniforme commun.

NUMÉROS des expériences.	POIDS. du traîneau Q.	POIDS. de la sphère q.	PRESSION totale. $Q+q$.	HAUTEUR de chute de la sphère h.	POIDS moteur pendant le mouvement uniforme P.	Frottement F.	RAPPORT du frottement à la pression.	VITESSE du mouvement uniforme.	OBSERVATIONS.
	kil.	kil.	kil.	mèt.	kil.	kil.		mèt.	
1	267,84	25	292,84	0,30	21,94	20,84	0,071	0,863	
2	267,84	25	292,84	0,30	21,94	20,84	0,071	0,837	
3	267,84	25	292,84	«	21,94	20,84	0,071	0,740	Il n'y a pas eu de choc.
4	267,84	25	292,84	«	21,94	20,84	0,071	0,750	
5	267,84	25	292,84	0,60	21,94	20,84	0,071	0,755	
6	267,84	25	292,84	«	21,94	20,84	0,071	0,897	Il n'y a pas eu de choc.
7	267,84	25	292,84	0,90	21,94	20,84	0,071	0,777	
8	267,84	25	292,84	0,90	21,94	20,84	0,071	0,716	
9	267,84	25	292,84	0,90	21,94	20,84	0,071	0,824	
10	267,84	25	292,84	0,30	21,94	20,84	0,071	0,710	
11	267,84	25	292,84	0,30	21,94	20,84	0,071	0,870	
12	267,84	50	317,84	0,60	23,75	22,56	0,071	0,816	Il n'y a pas eu de choc.
13	267,84	50	317,84	«	23,75	22,56	0,071	0,870	

Observations sur les résultats du tableau précédent.

14. Toutes ces expériences confirment que l'uniformité du mouvement n'est pas altérée par le choc et l'examen de la fig. 1 de la Pl. 21 et fig. 3, Pl. 22, relatives à la neuvième expérience, où une bombe du poids de 25 kilogrammes est tombée de $0^m,90$ de hauteur sur la terre glaise placée sur le traîneau, nous montre que les ondu-

lations dans la courbe du mouvement sont encore à peine sensibles.

On voit de plus que quand les autres circonstances sont les mêmes, la vitesse du mouvement uniforme est la même, soit qu'il y ait choc, soit qu'il n'y en ait pas.

Ces expériences confirment donc aussi la loi de la proportionnalité du frottement à la pression pendant le choc.

TABLEAU IV.

15. *Expériences sur le frottement de la fonte en mouvement sur la fonte, pendant le choc.*

(Les surfaces sont rendues très onctueuses avec du saindoux.)

Nota. Le choc est produit par la chute d'une sphère en fonte qui tombe sur une masse de terre glaise, animée, ainsi que le traîneau, d'un mouvement accéléré.

NUMÉROS des expériences.	POIDS. du traîneau Q.	POIDS. de la sphère q.	PRESSION totale Q + q.	HAUTEUR de chute de la sphère h.	POIDS moteur pendant le mouvement P.	PARAMÈTRE ac.	FORCE accélératrice. $\frac{vdv}{dt}$	FROTTEMENT F.	RAPPORT du frottement à la pression.	OBSERVATIONS.
	kil.	kil	kil.	mèt.	kil.	mèt.		kil.		
1	273,14	25	298,14	0,30	52,94	4,12	0,485	32,74	0,109	
2				0,30		4,24	0,471	33,25	0,111	
3				«		4,16	0,480	32,92	0,110	Il n'y a pas eu de choc.
4	273,14	25	298,14	0,60	52,94	5,92	0,337	38,07	0,126	Il n'y a pas eu de choc
5				«		5,96	0,335	38,14	0,126	
6	266,77	25	291,77	0,60	52,94	5,72	0,349	37,91	0,129	
7				0,60		5,04	0,396	36,25	0,124	
8	226,77	25	291,77	0,90	52,94	4,48	0,446	34,48	0,118	
9				«		6,00	0,333	38,46	0,131	Il n'y a pas eu de choc.
10	267,84	50	317,84	0,60	52,94	5,40	0,370	36,24	0,113	
11				«		6,00	0,333	37,57	0,118	
12				«		4,44	0,454	42,95	0,103	Il n'y a pas eu de choc.
13				0,60		4,36	0,461	32,69	0,102	
14	267,84	50	317,84	0,60	49,25	5,60	0,357	33,35	0,104	

Observations sur les résultats du tableau précédent.

16. L'examen des résultats contenus dans ce tableau et celui des fig. 2, Pl. 21, et fig. 6, Pl. 22, relatives à la huitième expérience, nous montre que, malgré le choc, le mouvement reste uniformément accéléré, et que les perturbations que ce choc et la chute de la bombe peuvent y occasioner sont insensibles. On voit de plus que, quelle qu'ait été la hauteur de chute de la bombe, le paramètre de la parabole qui représente la loi du mouvement est resté sensiblement le même que quand il n'y a pas eu de choc, toutes les fois que les autres circonstances étaient d'ailleurs les mêmes.

La chute de la bombe ayant eu lieu tantôt vers la fin, tantôt vers le commencement de la course, en des points qu'il n'est pas possible de déterminer même approximativement à l'inspection de la courbe du mouvement, attendu que la présence du corps mou a rendu les vibrations du système extrêmement faibles, il s'ensuit encore que la vitesse du corps choqué, et par conséquent celle des points en contact n'a pas d'influence sur le résultat; ce qui, joint à la forme parabolique de la courbe du mouvement, montre que dans ce cas le frottement est encore indépendant de la vitesse.

Conclusion générale.

17. De l'ensemble de ces expériences nous sommes donc autorisés à conclure que pendant l'acte du choc le frottement suit les mêmes lois que dans le cas des pressions ordinaires, et qu'il est encore proportionnel à la pression et indépendant de la vitesse du mouvement, ainsi que de l'étendue des surfaces en contact.

NOTICE

Sur l'application des appareils dynamométriques et chronométriques à diverses recherches de physique, de mécanique et de balistique.

Dans les deux premiers mémoires que j'ai présentés à l'Académie des Sciences, en 1832 et en 1833, et qui ont été insérés, par son ordre, dans le recueil des *Savans étrangers*, tome 4, j'ai décrit en détail les appareils dynamométrique et chronométrique que j'ai mis en usage, et dans celui qui précède, j'ai indiqué les modifications que je leur ai fait subir, pour les appliquer à la vérification des lois de la transmission du mouvement par le choc, et de celles de la pénétration des projectiles dans les corps mous. Ces exemples suffiraient, sans doute, pour faire sentir l'utilité, la fécondité et la précision de ces procédés, mais je crois néanmoins devoir insister sur l'avantage dont ils peuvent être, pour une foule de recherches de physique et de mécanique, et donner une idée succincte de plusieurs applications importantes que je me propose de tenter par la suite; mais l'étendue et la multiplicité des questions à étudier ne me permettant pas d'espérer que je puisse les étudier toutes, je pense qu'il pourrait être utile de faire connaître d'avance, en peu de mots, la marche que je me proposerais de suivre, afin de mettre les physiciens sur la voie de ce genre d'observations.

Les appareils que j'ai mis en usage, sont de deux sortes; les premiers sont destinés à mesurer à chaque instant, ou en chaque position d'un système de corps en mouvement,

l'effort exercé sur l'un de ces corps. Ce sont les dynamomètres analogues à ceux qui sont décrits dans mon premier Mémoire et dans celui-ci. J'ai dit, et je me plais à repéter hautement que c'est à M. Poncelet que je dois l'idée de combiner la flexion d'un ressort avec le chemin parcouru par le point où il est appliqué, afin d'en déduire une relation graphique entre l'effort et le chemin parcouru, d'où par quadrature, ou autrement, on déduit la quantité d'action ou de travail, ainsi que l'effort exercé en chaque position. L'exécution seule m'appartient et je suis parvenu en employant les règles de la résistance des matériaux à la flexion et à la rupture (1) à construire des dynamomètres à deux lames, aussi flexibles ou aussi raides que peut l'exiger le genre de recherches auxquelles on peut les employer, et qui, pour des accroissemens égaux de tension, prenaient des accroissemens égaux de flexion, entre des limites très étendues. Ainsi celui que j'ai employé en 1831 prend depuis la tension $0^{kil.}$ jusqu'à celle de 100 kil. des accroissemens constans de flexion égaux à $0^{m},00104$, pour des accroissemens de tension de 2 kilogrammes. Celui qui est décrit dans le Mémoire précédent, chap. II, n° 3, est destiné à des recherches sur le tirage des voitures, sur le frottement de roulement, sur le travail que peuvent développer les animaux dans une journée, etc. J'en ai fait faire deux pareils, qui prennent des accroissemens de flexion constans et proportionnels aux tensions dans le rapport de $0^{m},000314$ à 1 kil. pour l'un, et de $0^{m},00028$ à 1 kil. pour l'autre. La différence entre

(1) Voir la note du chap. II de ce Mémoire, où l'on rectifie une erreur numérique de la note 2 du premier Mémoire, qui n'a pas été corrigée à temps par l'imprimeur dans tous les exemplaires, et où l'on donne une nouvelle application des formules.

ces deux rapports, qui d'ailleurs est tout-à-fait indifférente, dès que l'instrument est taré, tient aux variations inévitables dans la qualité de l'acier, dans la trempe et dans le recuit. Enfin, j'en ai fait construire un quatrième qui pourra supporter des tensions variables de $0^{kil.}$ à 500 kil., et qui prend des accroissemens de flexion proportionnels aux tensions dans le rapport approché de $0^{m},00015$ à 1 kil.

Je me suis servi des résultats d'observations faites sur ces dynamomètres, au fur et à mesure de leur construction, pour déterminer la valeur du coefficient d'élasticité de l'acier fondu, trempé et recuit, à un certain degré, au moyen de laquelle on est à peu près sûr de pouvoir obtenir un ressort de flexibilité donnée et toujours proportionnée à la délicatesse des observations que l'on aura à faire.

La flexion des dynamomètres peut d'ailleurs, à l'aide de la trace d'un style, dont on les munit, se combiner, soit avec les chemins parcourus, comme je l'ai fait en 1831 et 1832 (premier et second Mémoire), soit avec le temps, comme j'en donne un exemple dans le Mémoire précédent, chapitre II.

Application au tirage, au halage, etc.

Ce genre de dynamomètres, susceptibles d'une exactitude supérieure à tout ce qui a été fait jusqu'ici, s'applique à la mesure de tous les efforts exercés en ligne droite. Ainsi l'on pourra les employer avec sécurité au tirage des voitures sur les routes ordinaires, ou sur les chemins de fer, au halage des bateaux, soit par des animaux, soit par des remorqueurs, à des expériences sur le choc des liquides ou des fluides élastiques contre les corps exposés à leur action, sur la poussée des voûtes, sur les

quantités de travail transmises dans un grand nombre de machines, sur le tirage des animaux, etc.

Nouveau dynamomètre de rotation.

Le même principe s'applique facilement à la mesure des efforts exercés par des pièces de rotation, au moyen de quelques modifications, que je ferai connaître en détail quand je présenterai les recherches que je compte entreprendre cette année sur le frottement des axes de rotation. Pour le moment, je me bornerai à indiquer l'ensemble de l'appareil, dont on saisira facilement la disposition. La pièce ou la roue qui transmet le mouvement ou l'effort qu'on veut mesurer, tourne à frottement doux sur l'arbre, qu'elle doit entraîner; mais elle porte une ou deux chevilles qui rencontrent une ou deux lames dynamométriques fixées sur cet arbre. Dès que l'effort exercé sur ces lames, suffit pour vaincre la résistance, l'arbre cède à l'action de la roue, et la flexion de ces lames sert de mesure à cet effort. L'idée de cette disposition n'est pas nouvelle : elle est indiquée, quoique d'une manière différente, dans plusieurs ouvrages de mécanique; mais ce qu'il y a de particulier dans mon appareil, c'est que j'obtiens facilement une trace des flexions sur un disque qui est emporté dans le mouvement général de rotation du système, et qui est en outre animé d'un mouvement propre, en sens contraire, et dépendant du mouvement général; de sorte, que je puis, dans chaque cas, avoir l'effort constant ou variable qui est exercé. Cet appareil est déjà construit, il a été éprouvé et essayé l'année dernière à la poudrerie de Metz, et il a parfaitement rempli son but. Je lui ai donné le nom de dynamomètre de rotation, et je le décrirai plus en détail

par la suite, en présentant les résultats des expériences sur le frottement des axes, auxquelles il est destiné.

Applications à diverses questions.

On voit qu'il pourra s'appliquer à la recherche des quantités de travail transmises par les courroies ou cordes sans fin, qu'il pourra dans certains cas mesurer l'effort moyen d'un moteur, tel qu'une roue hydraulique, d'un moulin à vent, la résistance d'une corde, d'une bluterie, etc. Les applications se présentent en foule à l'esprit, mais je dois faire observer que pour obtenir des courbes nettes, bien tracées, il faut que le mouvement soit uniforme, ou peu variable, et dans ce dernier cas, borner son observation à deux ou trois révolutions, pour qu'il n'y ait pas de confusion.

Apareils chronométriques.

Mais les appareils les plus féconds en applications et les plus utiles pour les recherches expérimentales de physique et de mécanique, sont, sans contredit, ceux qui permettent de déterminer graphiquement, par des courbes, les lois de mouvement des corps soumis à l'action des forces que l'on veut mesurer, en donnant une relation continue entre l'espace et le temps. Je me fais un devoir et un plaisir de répéter ici que je dois aussi à M. Poncelet, mon maître et mon ami, l'idée de combiner le mouvement à déterminer, avec un mouvement connu, et que la réalisation seule de cette pensée si féconde m'appartient. Je vais entrer dans quelques détails sommaires sur leur construction et leur emploi et faire voir qu'ils peuvent atteindre un degré de précision inouï jusqu'à ce jour et qui permet de représenter par des courbes d'une

grande amplitude des lois de mouvement qui s'accomplissent dans moins de $\frac{1}{100}$ ou $\frac{1}{200}$ de seconde, avec une approximation qui peut facilement dépasser $\frac{1}{6120}$ de seconde. Le premier que j'ai employé et qui est décrit dans mon premier Mémoire, tome 4 du Recueil des *Savans étrangers*, consiste en un mouvement d'horlogerie qui fait mouvoir un style formé d'un pinceau. J'en ai indiqué l'usage et il m'a été d'une grande utilité pour mes recherches sur le frottement. Je m'étais déterminé à adopter un ressort pour moteur de cet appareil, afin de le rendre susceptible d'être employé dans diverses positions et surtout d'être placé sur un corps qui l'entraînerait dans son mouvement général. Il a parfaitement rempli le but que je me proposais, mais la nécessité de vérifier sa marche à chaque expérience et l'influence du plus ou moins d'abondance ou de viscosité de l'encre sur la rapidité du mouvement, peuvent dans certains cas être des inconvéniens, surtout pour les expériences qui s'accomplissent dans des temps très courts. Il peut d'ailleurs être souvent nécessaire que le style soit placé sur le corps dont on veut observer le mouvement, et que le plateau, qui doit conserver sa trace, soit animé d'un mouvement uniforme, ce qui est tout-à-fait impossible avec l'appareil d'horlogerie. Il y a donc bien des cas où l'on ne pourrait l'employer avec succès.

Chronomètre à contre-poids.

C'est ce qui m'a engagé à essayer l'usage d'un appareil à contre-poids, régularisé par un volant à ailettes, et le premier emploi que j'en ai fait en 1833, et dont il est rendu compte dans le Mémoire précédent, m'a prouvé que l'on pouvait obtenir ainsi un mouvement d'une uni-

formité à peu près parfaite, et bien plus long-temps prolongé que celui de l'appareil d'horlogerie. De plus, dans ce nouveau système, on peut à volonté faire en sorte que le style ou le plateau soit animé du mouvement uniforme, ce qui est fort commode pour beaucoup de cas. On peut d'ailleurs combiner les dimensions de cet appareil, ainsi que la transmission, de bien des manières, et il peut être réduit à ne pas occuper beaucoup plus de place qu'une horloge à poids. Dans ce moment je suis occupé à en faire faire un qui différera un peu de celui que j'ai employé en 1833 et décrit au chapitre II du Mémoire précédent; je lui donnerai une vitesse uniforme de rotation de deux tours par seconde environ ; il portera un plateau de $0^m,40$ de rayon, un régulateur à ailettes et un volant. Il suit de là que le plateau parcourra 720° par seconde, et que par conséquent chaque degré correspondra à $\frac{1}{720}$ de seconde, et comme on pourra, vu la grandeur de ce plateau, subdiviser le degré en quatre parties, même sans le secours d'un vernier, il donnera la valeur des temps à $\frac{1}{2880}$ de seconde près.

On s'assurera d'ailleurs dans chaque cas de l'exacte périodicité du mouvement, et l'on déterminera sa vitesse avant chaque expérience, en comptant à l'aide d'un chronomètre à plumes de Breguet, le temps nécessaire à un nombre donné de tours, et quant à son uniformité dans une même révolution, elle sera d'avance assurée par l'exacte centricité des parties et par l'exclusion de toute transmission de mouvement capable de l'altérer.

Quelque remarquable que soit la précision que ces appareils promettent, elle n'a cependant rien qui doive paraître impraticable, dès que l'on se rend bien compte du principe sur lequel ils sont fondés, et surtout si l'on observe qu'elle est la conséquence de la simultanéité des

deux mouvemens. Au reste, j'ai déjà obtenu à peu près ce que j'annonce, puisque l'appareil employé aux expériences sur la pénétration, décrit au chapitre II du Mémoire précédent, faisait faire souvent un tour en o'',7 à un plateau de o^m,34 de diamètre, de sorte que chaque degré correspondait à $\frac{1}{514.28}$ de seconde, et que par conséquent, en le subdivisant en quatre, on pouvait obtenir le temps à $\frac{1}{2057}$ de seconde près environ.

Chronomètre hydraulique.

Il est encore un autre moyen plus simple dans l'exécution et surtout plus puissant, de se procurer un mouvement exactement uniforme dans certaines localités ou même avec un appareil portatif; c'est l'emploi d'une roue hydraulique. En effet, lorsque la hauteur d'eau, la levée de la vanne et toutes les circonstances de l'écoulement restent les mêmes, une roue hydraulique bien centrée se meut d'un mouvement à très peu près uniforme. Cela paraît évident *à priori* et je m'en suis assuré l'été dernier en mettant la roue à aubes de la sécherie de la poudrerie de Metz, en communication avec mon mouvement d'horlogerie. Les courbes de mouvement que j'ai relevées, pour plusieurs révolutions consécutives, m'ont prouvé que le mouvement était très sensiblement uniforme à moins de o'',01 près, et cependant cette roue n'était centrée qu'imparfaitement, ses aubes n'étaient pas tout-à-fait égales de dimensions. Si au lieu d'une roue en bois on en emploie une en fer, parfaitement équilibrée, qu'on multiplie les aubes ou les augets, ou plutôt qu'on emploie une roue à aubes courbes, pour éviter les chocs, on sera sûr, *à priori*, d'obtenir un mouvement aussi parfaitement uniforme qu'on peut le désirer. Une petite roue

hydraulique, ainsi disposée, serait donc un excellent chronomètre, et, comme elle pourrait avoir une certaine puissance, il serait facile de lui faire porter un plateau d'une grande dimension, de deux mètres et plus de diamètre, par exemple, ce qui serait nécessaire dans certains cas, comme je l'indiquerai plus loin.

Avec cette dimension et en supposant que cette roue portant immédiatement le plateau ne fît qu'un tour en une seconde, ce que j'obtenais facilement avec la roue de la sécherie de la poudrerie, chaque degré correspondait à $\frac{1}{360}$ de seconde, et comme il aurait à la circonférence environ $0^m,017$ de longueur, on voit que chaque millimètre de cette circonférence correspondrait à $\frac{1}{6120}$ de seconde environ. On sent que rien ne s'oppose à ce que l'on pousse encore l'approximation plus loin.

Avec les précautions que j'ai indiquées ci-dessus, l'emploi des roues hydrauliques me semble un moyen aussi parfait qu'on peut le désirer d'obtenir le mouvement uniforme d'un plateau ou d'un style qui se mouvrait dans un plan vertical. Mais il est des cas où il pourrait être nécessaire que ce mouvement eût lieu dans un plan horizontal, et alors l'emploi des diverses roues à réaction, de la danaïde, par exemple, à axe vertical, serait d'autant plus convenable qu'en général elles doivent marcher à de très grandes vitesses.

Ce n'est pas ici le lieu d'entrer dans de plus grands détails, et ce que je viens de dire suffira sans doute aux physiciens et aux artistes qui pourraient désirer d'appliquer ces idées à certaines recherches. Je ferai seulement observer qu'il faudra varier la nature du style selon les circonstances, et qu'un pinceau ne peut guère laisser de traces visibles quand il est animé d'une vitesse de plus de 6 mètres par seconde.

Applications.

Il me reste maintenant à indiquer sommairement l'application que l'on peut faire de ces appareils chronométriques aux principales questions de physique, de mécanique et de balistique.

D'abord, dans les cours de physique, la détermination de la courbe du mouvement des graves abandonnés à l'action de la pesanteur peut servir à vérifier expérimentalement les lois de cette force d'une manière bien plus précise et bien plus satisfaisante que la machine d'Atwood, et ces appareils ne tarderont sans doute pas à la remplacer.

Frottement de roulement.

Le frottement de roulement peut être étudié, comme le frottement de glissement, par l'emploi simultané des appareils dynamométriques et chronométriques dont je viens de parler. C'est ainsi que je me propose de l'examiner par la suite de mes expériences sur le frottement.

Résistance de l'air et de l'eau au mouvement des corps de diverses formes.

La résistance de l'air et celle des liquides au mouvement des corps de diverses formes pourront être étudiées avec succès, en obtenant une relation graphique entre l'espace et le temps. J'ai déjà tenté quelques expériences à ce sujet, dans le courant de l'année dernière; elles sont en trop petit nombre pour que je puisse en rendre compte, et j'ai d'ailleurs reconnu qu'il importait d'avoir un appareil plus régulier encore que le mouvement d'horlogerie

que j'avais employé, parce que ces résistances étant fonctions de la vitesse, de légères erreurs sur celle du mouvement uniforme peuvent avoir une grande influence sur les résultats. Néanmoins j'ai reconnu que, dans l'eau, au bout de très peu de temps, le mouvement des projectiles pleins ou creux en fonte atteignait l'uniformité, et qu'un boulet de 24, abandonné à son propre poids, acquérait, après 2^m à $2^m,50$ de chute, sa vitesse limite qui n'excède guère 4^m. Nous devons reprendre dans le courant de 1834 ces deux séries d'expériences que je n'avais entamées que pour me déterminer sur le mode d'expérimentation.

Pénétration des projectiles dans les milieux imparfaits, tels que les terres molles, etc.

On pourra aussi vérifier que la résistance des milieux à la pénétration est indépendante de la vitesse du projectile, en les faisant mouvoir par traction à travers du sable, des terres légères, des terres glaises, des pâtes, etc., et en observant la loi du mouvement, d'où l'on déduira celle de la résistance.

Lois de la dilatation des corps.

En adaptant un style à l'extrémité d'une barre que l'on chaufferait à l'autre bout, et le mettant en contact avec un plateau animé d'un mouvement uniforme convenable, et qui, dans ce cas, devrait être assez lent, on obtiendra facilement une courbe qui donnera entre le temps et les longueurs de dilatation une relation graphique, qui servira à déterminer la loi de cette dilatation.

On pourra même faire des observations analogues sur

la marche du thermomètre, en suivant la course de la colonne dilatée avec une loupe, et en employant pour le tracé sur le plateau mobile des appareils graphiques qui donnent à la main toute la sûreté désirable et analogues à ceux qui ont été imaginés par M. le capitaine Gavart.

Une disposition analogue pourra donner une loi graphique de la formation de la vapeur.

Des modifications convenables pourraient même peut-être permettre de déterminer par ces procédés la durée de la transmission du fluide électrique à travers les corps et celle des vibrations produites par le choc.

Trajectoire des projectiles creux.

A l'aide d'appareils graphiques qui permettront de suivre exactement à vue un projectile creux dans l'espace, lorsque sa fusée sera allumée, je me propose aussi de tracer sur un disque animé d'un mouvement uniforme, et formé d'un verre dépoli ou d'un papier suffisamment transparent, la trajectoire des projectiles creux dans l'espace, et d'obtenir par son relèvement la véritable forme de cette courbe. Au moyen des relations qu'on déduira du relèvement entre les abscisses, les ordonnées et les temps, on pourra déterminer à chaque instant la vitesse du projectile et les autres circonstances du mouvement; ce qui conduira sans doute à d'importans résultats pour la science de la balistique.

Loi du mouvement des projectiles dans l'âme des bouches à feu.

En perçant la culasse d'une bouche à feu d'un trou

qui laisse passer à frottement doux une tige cylindrique, adaptée à un projectile, et en prenant d'ailleurs les précautions convenables pour que le fluide ne s'échappe pas par cette ouverture, on pourra de même obtenir une courbe qui fournisse une relation entre l'espace parcouru et le temps. Il suffira d'adapter à la tige un curseur qui tracera sur un plateau, enduit d'une substance molle et animé d'un mouvement uniforme, la courbe du mouvement.

Ce procédé, qui peut s'appliquer aux fusils à vent, aux canons à vapeur, ainsi qu'aux bouches à feu, ne présentera sans doute de difficultés que dans le cas des grandes charges.

Loi du mouvement de recul des canons et fusils-pendules.

Nous emploierons aussi ces procédés à la détermination de la loi du mouvement de recul des canons et fusils-pendules, pour en déduire la loi des pressions du gaz à chaque instant de ce recul, ainsi que la vitesse et les autres circonstances du mouvement.

Enfin nous appliquerons aussi le même mode d'observation au pendule balistique, pour déterminer, à chaque instant de son mouvement, la vitesse qui lui est imprimée par le choc du projectile.

Détermination de la loi des mouvemens périodiques.

La plus grande difficulté que l'on éprouve quand on veut calculer les dimensions et la vitesse qu'il convient de donner au volant qui doit régulariser le mouvement d'une machine, vient de ce que l'on ne peut déterminer

la plus grande et la plus petite vitesse de rotation du mouvement périodique, dont on veut renfermer les variations entre les limites données. A l'aide des appareils chronométriques, rien ne sera plus facile que d'obtenir des courbes qui représenteront la loi du mouvement et dont les ondulations donneront, à l'aide de la règle, la plus grande et la plus petite vitesse de chaque période, ainsi que la position correspondante des diverses pièces du système, et dès lors le problème de l'établissement des volans pourra être résolu avec facilité et exactitude.

Je me suis attaché dans cette notice à indiquer les principales applications de ces deux méthodes d'observation, en choisissant pour exemples les recherches les plus importantes et les plus difficiles. Au premier aperçu, les résultats que je promets étonneront peut-être, mais si l'on se rappelle et si l'on examine attentivement ceux que j'ai déjà obtenus, on acquerra bientôt la conviction que, par des combinaisons faciles à concevoir et à exécuter, on les réalisera tous. J'ai l'espoir que je pourrai moi-même le faire pour beaucoup de questions; mais ne pouvant me flatter d'y parvenir pour toutes, j'ai pensé faire une chose utile en indiquant quelques applications et en montrant tout le parti qu'on peut tirer de ces appareils.

NOTE DU CHAPITRE II.

J'ai indiqué dans mon premier Mémoire la marche que j'avais suivie pour calculer les dimensions du dynamomètre employé dans les expériences de 1831, ainsi que les vérifications auxquelles je l'ai soumise. Mais il s'est glissé dans cette note deux erreurs numériques qui se compensent exactement, de sorte que le résultat final n'en étant point altéré, elles m'avaient d'abord échappé. Mais bientôt ayant eu à calculer les dimensions à donner à d'autres dynamomètres, je me suis aperçu de ces erreurs, et j'avais envoyé avant la publication du quatrième volume du *Recueil des Savans étrangers*, publié par l'Académie, un errata pour rectifier ces erreurs de chiffres. L'imprimeur ayant négligé l'insertion de cet errata, je crois devoir donner ici une rectification de ce calcul, en même temps que d'autres applications que j'ai faites des mêmes formules pour le calcul de dynamomètres de la force de 200 kilogrammes.

L'erreur de la note II du premier Mémoire consiste en ce qu'à la page 119 ligne 9, en descendant, j'ai écrit $f = 0^m,05$, pour l'accroissement de flexion correspondant à la charge de 25 kil., tandis que d'après le tableau des expériences rapporté page 118, on a $f = 0^m,025$. Il en est résulté que la valeur du coefficient d'élasticité A que j'ai obtenue n'est que la moitié de la valeur réelle, qui est, en reprenant le calcul avec les données véritables,

$$P = 25 \text{ kil.}, \quad f = 0^m,025, \quad c = 0^m,20, \quad b = 0^m,00455, \quad a = 0^m,021,$$
$$A = 33444000000 \text{ kil.}$$

L'erreur commise n'a pas eu d'influence sur le résultat final du calcul des dimensions du premier dynamomètre, parce qu'à la ligne cinquième, en remontant, j'ai pareillement écrit $f = 0^m,050$ au lieu de $f = 0^m,025$, de sorte que dans l'application de la formule

$$b^3 = \frac{P8c^3}{Afa},$$

les facteurs A et f se sont trouvés l'un double, l'autre moitié de sa valeur réelle, de sorte qu'il y a eu compensation exacte pour la valeur de b. C'est ce qui m'avait empêché de m'en apercevoir, et ce qui fait qu'il n'y a du reste aucun changement à faire au texte du Mémoire.

Après cette rectification je vais rapporter les résultats de calcul et d'expériences auxquels je suis parvenu pour les dynamomètres de la force de 200 kil. que j'ai fait faire.

Je me suis donné *à priori* les dimensions suivantes :

La largeur constante de la lame $a = 0^m,03$,

La longueur de portée de chaque branche $c = 0^m,25$,

L'accroissement total de flexion du dynamomètre sous la charge de 200 kil.

devait être de $0^m,050$, on a donc pour chaque branche,

$$P = 100 \text{ kil.} \quad \text{et} \quad f = 0^m,025;$$

en faisant en outre

$$A = 33444000000 \text{ kil.},$$

la formule

$$b^3 = \frac{P.8c^3}{Af a}$$

a donné

$$b = 0^m,0079.$$

L'équation de la parabole d'égale résistance,

$$v^2 = \frac{b^2}{c}.x,$$

m'a ensuite donné pour les ordonnées de la courbe qui détermine l'une des faces de chaque lame, l'autre étant en ligne droite.

Valeurs de x ou des abscisses.	Valeurs de v ou des ordonnées.
0^m01	0^m0016
0,02	0,0035
0,10	0,0050
0,15	0,0061
0,20	0,0070
0,25	0,0079

J'ai fait construire, d'après ces dimensions, deux dynamomètres que je destine à des expériences sur le tirage des voitures, et dont l'un est celui que j'ai employé dans mes expériences sur la transmission du mouvement par le choc. Quand ils ont été forgés, trempés et montés, je les ai soumis à des observations spéciales pour les tarer et comparer les flexions réelles à celles que je devais obtenir, si la valeur employée pour A était exacte. Les deux tableaux suivans donnent les résultats de ces observations.

Vérification des flexions des dynamomètres.

POIDS suspendus AU DYNAMOMÈTRE.	ACCROISSEMENS DE FLEXION.	
	1er dynamomètre.	2e dynamomètre.
Kil.	Mèt.	Mèt.
10	0,0031	0,0027
20	0,0032	0,0029
30	0,0031	0,0027
40	0,0032	0,0029
50	0,0031	0,0032
60	0,0031	0,0027
70	0,0031	0,0026
80	0,0031	0,0028
90	0,0030	0,0029
100	0,0031	0,0029
110	0,0030	0,0029
120	0,0030	0,0027
130	0,0030	0,0027
140	0,0030	0,0029
150	0,0030	0,0027
160	0,0030	0,0028
170	0,0029	0,0026
180	0,0029	0,0027
190	0,0029	0,0027
200	0,0028	
Accroissement moyen de flexion pour 1 kil.	$0^m,000303$,	$0^m,00028$.

Les différences observées dans les flexions sont assez faibles pour qu'il soit permis de les attribuer, avec toute probabilité, à la difficulté même de les mesurer. J'employais à cet usage une mesure à coulisses que j'introduisais entre les lames et qui me donnait, à l'aide d'un vernier, les cinquièmes de millimètres; mais les quatres angles, par lesquels j'introduisais successivement les branches de la mesure, n'étaient pas également écartés, par suite du gauchissement inévitable des lames, et je ne pouvais être sûr de la mesure prise qu'à un cinquième au plus de millimètre près. C'est pour arriver à une valeur moyenne suffisamment exacte que j'ai taré le ressort de 10 en 10 kilogrammes.

On voit que les deux dynamomètres donnent à peu près la même flexion par kilogramme de charge. La petite différence qu'on observe entre eux ne peut tenir qu'à la nature de l'acier, à la trempe, au recuit plus ou moins identiques.

A l'aide des résultats de cette vérification, j'ai ensuite calculé pour chacun de ces dynamomètres la valeur correspondante qui en résulte pour A, et j'ai trouvé

Pour le 1^er^ $A = 27595000000$ kilogrammes.
Pour le 2^e^ $A = 29833000000$

Celui que j'ai employé en 1831 ayant donné, comme nous venons de le voir,

$$A = 33444000000;$$

on déduit de ces trois ressorts, pour la valeur moyenne du coefficient d'élasticité de l'acier,

$$A = 30290000000 \text{ kil.},$$

qui ne diffère que de $\frac{1}{10}$ des valeurs ci-dessus.

J'aurai par la suite l'occasion de faire construire d'autres dynamomètres plus forts ou plus faibles que les précédens, et à mesure qu'ils me fourniront de nouvelles valeurs de A, je les rapporterai pour arriver à une détermination aussi exacte que possible de cette quantité.

RECHERCHES

SUR

LE CALCUL DES SÉRIES,

OU

APPLICATION DE LA MÉTHODE DES MOYENNES A LA TRANSFORMATION, AU CALCUL NUMÉRIQUE ET A LA DÉTERMINATION DES LIMITES DU RESTE DES SÉRIES;

PAR J.-V. PONCELET,

Chef de bataillon du génie.

(Lu à l'Académie des Sciences, le lundi 29 juillet 1833).

On rencontre fréquemment, dans les calculs relatifs aux machines, des expressions analytiques qui compliquent singulièrement la résolution des équations ou la recherche des valeurs numériques des inconnues, qu'il n'est point d'ailleurs indispensable d'obtenir avec un degré d'approximation très rigoureux. Déjà, dans une note insérée, en 1826, à la suite de la lithographie du cours de *Mécanique appliquée aux machines* de l'école de Metz, j'avais fait quelques tentatives pour remplacer les fonctions complexes dont il s'agit, par une fonction purement linéaire des mêmes variables, et dont les valeurs diffèrent, le moins qu'il est possible, de celles de la fonction proposée, dans une étendue donnée, c'est-à-dire entre des li-

mites assignées des valeurs de ces variables. Je suis revenu sur ce sujet, avec plus de développemens, dans une dernière édition de cette lithographie (Sect. III, note 1re (*), année 1832 à 1833).

Le procédé consiste à égaler la fonction proposée à une expression de la forme

$$\alpha + \beta x + \gamma y + , \text{ etc.},$$

$x, y, z, \ldots$ étant les variables, $\alpha, \beta, \ldots$ des coefficiens numériques à déterminer d'après la condition dont il s'agit; puis à rendre un *minimum*, pour l'intervalle assigné, *l'erreur proportionnelle* ou le rapport de la différence de la fonction proposée et de celle qui la remplace, à la première de ces mêmes fonctions; ce à quoi on parvient, soit à l'aide de considérations purement géométriques, soit au moyen de considérations analytiques analogues à celles par lesquelles Laplace, Fourier, etc., ont cherché à rendre un *minimum* la plus grande des erreurs relatives à une fonction linéaire de plusieurs variables, qui doit satisfaire à certaines données fournies par l'expérience.

Cette méthode, qui semble mériter l'attention des géomètres, a été principalement appliquée, dans la note précitée, aux fonctions radicales de la forme $\sqrt{X^2 + Y^2}$, $\sqrt{X^2 - Y^2}$, qu'on rencontre fréquemment dans le calcul du frottement des pièces des machines, et qui tantôt font élever le degré ou l'ordre des équations qu'on a à résoudre, tantôt font tomber les intégrales qui servent à déter-

(*) Le contenu de cette note a, depuis, été publié dans le tome XIII du *Journal de Mathématiques* de M. Crelle, année 1834, 4me cahier.

miner la valeur moyenne des résistances passives ou leurs quantités d'action, dans la classe des transcendantes elliptiques. A l'aide de ce procédé et en partageant l'étendue entière de l'intégrale définie ou des fonctions radicales, en intervalles convenablement rapprochés, on parvient à obtenir, avec un degré d'approximation très suffisant, et par des procédés qui n'exigent que les premières opérations de l'arithmétique, les valeurs de quantités inconnues, enveloppées dans des expressions analytiques qui pourraient embarrasser tous ceux qui n'ont pas acquis ou conservé l'habitude des calculs.

Il me suffira d'avoir donné ici une légère idée de cette méthode, en renvoyant, pour les développemens, à la lithographie qui en contient l'exposition succinte et l'application à divers exemples relatifs au calcul des machines. L'objet que je me propose dans le Mémoire qui suit, est très différent, quoiqu'il soit analogue dans son but : il contient le résultat des efforts que j'ai faits pour faciliter, dans certains cas, l'application numérique d'une autre méthode non moins importante : celle du développement des fonctions en séries.

Lorsqu'en effet, ces développemens sont rapidement convergens dans l'étendue des applications qu'on peut avoir à en faire, il arrive qu'en bornant l'approximation aux premiers termes, on obtient des expressions finies et rationnelles, des fonctions génératrices, très faciles à soumettre au calcul, et qui fournissent des résultats suffisamment exacts pour les applications qu'on a en vue. Mais il arrive fort souvent, ou que ces séries sont elles-mêmes tellement peu convergentes qu'il faudrait pousser le calcul jusqu'à des termes fort avancés afin d'obtenir un degré d'approximation convenable, ou qu'étant très rapidement convergentes pour certaines valeurs des indéter-

minées qui y entrent, elles le deviennent, au contraire, très peu pour d'autres, si même elles ne viennent à diverger, du moins à compter de leurs premiers termes. Or, bien qu'on puisse, dans chaque cas spécial, et à l'aide d'artifices analytiques particuliers qui consistent principalement dans le changement des variables, obtenir de nouveaux développemens de la fonction, qui n'aient point l'inconvénient dont il s'agit pour les secondes valeurs de ces variables; on conçoit néanmoins qu'il serait avantageux, pour le grand nombre des applications, de posséder des méthodes qui permissent de calculer directement et avec le degré d'approximation désiré, la valeur que représente une série peu convergente, sans recourir aux artifices analytiques dont il s'agit.

Les séries qui procèdent par signes alternativement positifs et négatifs, sont précisément dans ce cas : la valeur qu'elles représentent peut être calculée avec un degré d'approximation d'autant plus grand et par un procédé d'autant plus rapide, qu'elles sont moins convergentes dès leurs premiers termes.

Quant aux séries dont les termes sont constamment de même signe, outre qu'il est bien des cas où leur calcul peut être ramené à celui de séries qui procèdent par signes alternativement positifs et négatifs (*), il est encore dans

---

(*) L'exemple le plus simple de cette transformation, se rapporte à la fonction exponentielle a^x, dont le développement a tous ses termes positifs avec x, et dont la valeur inverse $\frac{1}{a^x} = a^{-x}$ se calcule, comme on sait, par une série qui a ses termes alternativement affectés des signes + et —. Un second exemple, également simple, est donné par la fonction π^2, dans laquelle π représente le rapport de la circonférence au diamètre du cercle, et dont on connaît deux développemens différens : l'un qui a tous ses termes positifs, l'autre procédant par termes alternativement positifs et négatifs.

leur nature que, lorsqu'elles cessent d'être rapidement convergentes, les valeurs qu'elles représentent deviennent tellement grandes, que la difficulté de les calculer réside presque uniquement dans la difficulté même de les exprimer par un nombre de chiffres fini.

Euler avait déjà présenté, dans ses *Institutions de calcul différentiel* et dans d'autres écrits, un mode de transformation des séries, rapporté aux pages 344 et suivantes du tome III du *Traité in-4° de Calcul différentiel et intégral* de M. Lacroix, et qui conduit à des résultats analogues à ceux que j'ai obtenus, dans ce Mémoire, par des considérations directes et purement algébriques, ressortant de la théorie des *moyennes*. J'ignorais cette circonstance à l'époque où je fus conduit, par l'examen de certaines questions de mécanique appliquée aux machines, à entreprendre les recherches suivantes sur les séries; ce dont on ne peut manquer de s'apercevoir d'après la diversité des méthodes et des résultats.

Le procédé d'Euler consiste, comme on sait, à substituer, dans la série proposée, censée procéder suivant les puissances ascendantes et entières d'une certaine variable x, à la place de cette même variable, le développement indéfini d'une fonction de la forme

$$\frac{y}{1 \pm y}.$$

Les fonctions identiques

$$(1-x)^{\pm\frac{1}{n}} = \left(1+\frac{x}{1-x}\right)^{\mp\frac{1}{n}}, \quad \log(1-x) = -\log\left(1+\frac{x}{1-x}\right),$$

dans lesquelles on suppose x plus petit et n plus grand que l'unité, donnent lieu à des rapprochemens pareils, etc., etc.

Mais, outre que ce mode de transformation, fruit d'une de ces heureuses inspirations qu'on connaît à l'illustre géomètre allemand, ne peut s'appliquer directement ni avantageusement à beaucoup de cas des séries, il manque encore d'un complément indispensable, et qui consiste, d'une part, dans la détermination du reste ou complément de la transformée supposée limitée à l'un quelconque de ses termes, et d'où résulte l'appréciation de l'erreur absolue qu'on risque de commettre en arrêtant le calcul à ce terme; d'une autre, dans la discussion des limites de cette erreur, qui peut servir à régler la marche qu'on doit suivre pour obtenir, avec le moins de calcul possible, la valeur des sommes qu'on cherche. Car il est aisé de voir, sans même entrer dans aucun détail, qu'une série donnée est susceptible d'une infinité de transformées distinctes, selon le terme auquel on commence à l'appliquer; or, on conçoit aussi que le choix de ce terme n'est point indifférent, et qu'il peut arriver bien des cas où la transformée, qui procéderait à compter des premiers termes de la série proposée, offrirait une convergence moins rapide que ne le fait cette dernière elle-même.

La marche à l'aide de laquelle je suis parvenu à transformer les séries d'une manière purement identique et sans négliger aucun de leurs termes, consiste à les combiner plusieurs fois de suite, avec elles-mêmes, par voie d'addition ou de soustraction, et en les multipliant ou divisant, chaque fois, par des nombres convenablement choisis, de manière à ne pas changer la valeur absolue de leur somme, et à les partager en deux autres, dont l'une, finie et qui se rapporte essentiellement à la série d'Euler, soit, quand la chose est possible, plus rapidement convergente que la proposée, et l'autre, non moins digne de remarque et également convergente dans les cas d'appli-

cation, ait une valeur négligeable vis-à-vis de celle de la première, et dont on puisse assigner des limites convenablement approchées.

Les premières parties de ce Mémoire ont pour objet la transformation et le calcul des séries purement numériques, et dont les termes indéfiniment décroissans sont alternativement positifs et négatifs; on y expose plusieurs formules de transformation qui permettent d'obtenir la somme de ces séries d'une manière beaucoup plus rapide que par la formule d'Euler; on insiste principalement sur la manière de régler la marche des opérations de manière à les réduire, dans chaque cas, au plus petit nombre possible; ce à quoi l'on parvient par la considération des limites supérieures et inférieures relatives à l'erreur que l'on risque de commettre quand on néglige la seconde partie des transformées, composée d'une infinité de termes décroissans, et qui forme, en quelque sorte, le reste ou complément de la première.

Ces considérations générales sont d'ailleurs suivies d'applications numériques à des séries telles que celles qui expriment la valeur des nombres $\frac{1}{4}\pi$, $\log 2$, $\sqrt{2}$, et dont la convergence est si faible qu'il faudrait en calculer plus de 50000 et même de 500000 termes pour obtenir le degré d'approximation qui résulte de l'emploi des 5, 6 ou 7 premiers termes des nouvelles formules.

Dans les articles suivans, on expose les formules de transformation relatives principalement aux séries qui procèdent suivant les puissances ascendantes ou descendantes d'une certaine variable plus ou moins voisine de l'unité, soit que d'ailleurs les termes de ces séries prennent alternativement les signes $+$ et $-$, soit qu'ils conservent constamment le même signe.

Malheureusement l'application de la théorie des moyennes à cette dernière classe de séries, ne conduit à des transformées rapidement convergentes que lorsque la série proposée l'est elle-même déjà beaucoup, ou que les différences des divers ordres des coefficiens numériques, qui lui appartiennent, sont susceptibles de décroître très rapidement et tendent ainsi à devenir nulles ou constantes. Mais au moins offre-t-elle l'avantage de faire découvrir une expression générale des limites supérieure et inférieure du complément de chaque transformée, et, par suite, de l'erreur qu'on risque de commettre quand on s'arrête à un terme quelconque de la série proposée, et cela sans qu'on ait besoin de connaître autre chose que la manière dont chaque terme de cette série se forme au moyen des précédens.

La dernière partie du Mémoire qui nous occupe est principalement consacrée à la recherche des limites dont il s'agit, et l'on y insiste d'une manière spéciale sur les conséquences qui se déduisent, en quelque sorte intuitivement, d'un mode particulier de représenter les séries par des polygones ayant pour ordonnées les différens termes de ces séries, pris abstraction faite du signe, et pour abscisses les valeurs des sommes des termes qui précèdent chacun d'eux.

On retombe, de la sorte, sur le principal des résultats déjà obtenus relativement aux limites du reste des séries, et qu'on peut énoncer très simplement ainsi :

« Soit une série quelconque dont tous les termes, » du moins à partir d'un certain d'entre eux a_n, sont » positifs et décroissent indéfiniment, la valeur du reste, » quand on s'arrête à ce terme, sera comprise entre les » nombres qu'on obtient en divisant successivement a_n » par l'excès, sur l'unité, du plus grand ou du plus petit

» des rapports numériques de chaque terme au suivant, » considérés dans toute l'étendue comprise depuis a_n jus- » qu'à l'infini. »

Ce théorème paraît d'autant plus digne de remarque qu'il suppose seulement que la série, d'ailleurs décroissante, soit donnée d'une manière quelconque par la loi de dérivation de ses termes, et qu'on soit en état d'assigner la plus petite et la plus grande des valeurs du rapport de chacun d'eux au suivant; la seule restriction portant sur le cas où la première de ces valeurs est précisément égale à l'unité, ce qui rend infinie l'une des limites, et indique une modification quelconque survenue dans l'état algébrique de la fonction que représente le développement en série : comme, par exemple, lorsqu'elle change de signe ou devient imaginaire en passant par o ou l'infini, etc.

Des séries purement numériques dont les termes, alternativement positifs et négatifs, décroissent indéfiniment ainsi que leurs différences.

1. Représentons par s_n la somme des n premiers termes $a_0, a_1, a_2, \ldots a_{n-1}$ d'une pareille série, supposés quelconques, et par $a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}, \ldots$ les valeurs absolues ou numériques des termes suivans; enfin par S la véritable valeur s_∞ de la série, poussée à l'infini, ou ce qu'on nomme sa *limite*, de sorte qu'on ait

$$(a)\quad S = s_n + a_n - a_{n+1} + a_{n+2} - a_{n+3} + a_{n+4} - \text{etc.}$$

En désignant, en général, par Δa_η la différence $a_\eta - a_{\eta+1}$ entre les valeurs absolues de deux termes consécutifs quelconques, dont le premier est a_η et le second $a_{\eta+1}$, afin de n'avoir à considérer que des différences positives dans

des suites qui seront ici supposées naturellement décroissantes; on pourra successivement mettre la série proposée sous les formes suivantes :

$$(b)\quad S = s_n + \Delta a_n + \Delta a_{n+2} + \Delta a_{n+4} + \Delta a_{n+6} + \text{etc.},$$
$$(c)\quad S = s_n + a_n - \Delta a_{n+1} - \Delta a_{n+3} - \Delta a_{n+5} - \text{etc.},$$
$$(d)\quad S = s_n + a_n - a_{n+1} + \Delta a_{n+2} + \Delta a_{n+4} + \Delta a_{n+6} + \text{etc.},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

ce qui montre généralement que, dans une série à termes alternativement positifs et négatifs décroissans : 1° la valeur absolue d'un terme quelconque, est plus grande que celle de la somme de tous les termes qui le suivent, pris avec leurs signes; 2° qu'en arrêtant la série à ce terme, la somme obtenue sera trop forte, si ce terme est positif, et trop faible, s'il est négatif, d'une quantité comprise entre les valeurs absolues du terme suivant et de sa différence à celui qui vient immédiatement après; 3° qu'une pareille série sera toujours convergente ou aura une limite $S = s_\infty$, finie, dès que les valeurs absolues de ses termes iront sans cesse en diminuant, ce que nous supposerons expressément dans tout ce qui va suivre (*).

Ainsi, par exemple, on aura alternativement dans la série proposée,

$$s_n < S,\ s_n + a_n = s_{n+1} > S,\ s_n + a_n - a_{n+1} = s_{n+2} < S,\ \text{etc.};$$

(*) Nous supposerons en outre, afin d'éviter toute espèce de difficultés, que ces valeurs convergent vers zéro, ou que a_n devienne rigoureusement nul pour n infini. Dans le cas où elles convergeraient vers une valeur finie quelconque, il se présenterait, généralement parlant, une indétermination relative au signe ou au rang du terme a_∞ placé à l'infini, vers la droite de la série, et cette indétermination ne pourrait être levée que dans des cas tout particuliers où l'origine de la série serait bien connue; la même remarque est applicable aux séries de différences, etc., dont il sera question par la suite.

et, si l'on prend successivement $S = s_n$, $S = s_n + a_n$, $S = s_n + a_n - a_{n+1}$, etc., l'erreur commise sera au-dessous de a_n pour la première, de a_{n+1} pour la seconde, de a_{n+2} pour la troisième, et ainsi de suite.

2. Ces notions fondamentales étant rappelées, on remarquera que, puisque la valeur de S se trouve comprise entre celles de s_n et de $s_n + a_n$, elle pourra différer moins de leur moyenne arithmétique $s_n + \frac{1}{2} a_n$, que de chacune d'elles en particulier. Prenant, en effet, la demi-somme des expressions (*b*) et (*c*) de S, on trouvera

$$(e)\quad S = s_n + \tfrac{1}{2} a_n + \tfrac{1}{2}(\Delta a_n - \Delta a_{n+1} + \Delta a_{n+2} - \Delta a_{n+3} + \Delta a_{n+4} - \text{etc.}),$$

relation que nous appellerons la *transformée du premier ordre* de la proposée (*a*), relative au terme a_n, et dans laquelle la partie entre parenthèses forme une série d'un genre analogue et jouissant des mêmes propriétés, si les différences Δa_n, Δa_{n+1}, Δa_{n+2}...., sont constamment décroissantes, ou, ce qui est la même chose, si les différences du second ordre $\Delta a_n - \Delta a_{n+1} = \Delta^2 a_n$, $\Delta a_{n+1} - \Delta a_{n+2} = \Delta^2 a_{n+1}$, $\Delta a_{n+2} - \Delta a_{n+3} = \Delta^2 a_{n+2}$, etc., sont toutes positives; circonstance qui a lieu dans une infinité de cas.

La série entre parenthèses étant donc convergente, on aura

$$S = s_n + \tfrac{1}{2} a_n, \quad \text{à moins de} \quad \tfrac{1}{2}\Delta a_n = \tfrac{1}{2}(a_n - a_{n+1});$$

de sorte que cette valeur de S, qui est trop faible, sera d'autant plus approchée, que la série proposée sera moins convergente dans ses premiers termes, ou que le rapport de a_n à a_{n+1} s'approchera davantage de l'unité.

Mais, pour que cette même valeur de S soit plus exacte que celle $S = s_n + a_n$, il faut, tout au moins, que la limite

de l'erreur qui lui est relative soit moindre que celle de cette dernière quantité, ou qu'on ait

$$\tfrac{1}{2}\Delta a_n < a_{n+1}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \Delta a_n < 2a_{n+1}, \quad a_n < 3a_{n+1},$$

et l'on en sera complétement certain si la condition

$$\tfrac{1}{2}\Delta a_n < a_{n+1} - a_{n+2}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \Delta a_n < 2\Delta a_{n+1},$$

se trouve en même temps satisfaite, puisque l'erreur de $s_n + a_n$ surpasse nécessairement $a_n - a_{n+1}$, ou Δa_n.

3. Si le contraire avait lieu, il faudrait s'en tenir à la valeur $s_n + a_n$ donnée immédiatement par la série proposée, ou plutôt à la valeur $s_n + a_n - \frac{1}{2}a_{n+1} = s_{n+1} - \frac{1}{2}a_{n+1}$ que donne la transformée du premier ordre

$$(f)\ \mathrm{S} = s_n + a_n - \tfrac{1}{2}a_{n+1} - \tfrac{1}{2}(\Delta a_{n+1} - \Delta a_{n+2} + \Delta a_{n+3} - \Delta a_{n+4} + \text{etc.}),$$

relative aux termes qui suivent a_n dans la proposée, et qu'on obtient, soit en prenant la demi-somme des expressions (c) et (d) de S, soit en remplaçant n par $n+1$ dans la transformée précédente (e), après y avoir changé le signe des termes qui suivent s_n, soit enfin en faisant simplement sortir de la parenthèse, de cette même transformée, le premier terme Δa_n; ce qui donne

$$(f)\ \mathrm{S} = s_n + \tfrac{1}{2}a_n + \tfrac{1}{2}\Delta a_n - \tfrac{1}{2}(\Delta a_{n+1} - \Delta a_{n+2} + \Delta a_{n+3} - \Delta a_{n+4} + \text{etc.});$$

relation identique avec celle dont il s'agit, à cause de $\Delta a_n = a_n - a_{n+1}$, et sur laquelle d'ailleurs on peut raisonner comme on l'a fait ci-dessus pour la relation (e).

Ainsi on devra prendre

$$\mathrm{S} = s_n + \tfrac{1}{2}a_n + \tfrac{1}{2}\Delta a_n = s_n + a_n - \tfrac{1}{2}a_{n+1},$$

valeur exacte à moins de $\frac{1}{2}\Delta a_{n+1}$, si l'on a

$a_{n+1} < 3a_{n+2}$, ou, plus rigoureusement, $\Delta a_{n+1} < 2\Delta a_{n+2}$,

et

$$S = s_n + a_n - a_{n+1} + \tfrac{1}{2} a_{n+2}, \text{ à moins de } \tfrac{1}{2}\Delta a_{n+2},$$

si l'inverse avait précisément lieu; ce qui revient à n'opérer la transformation qu'à partir du terme suivant a_{n+2} de la série proposée.

4. En continuant à raisonner ainsi, de proche en proche, on voit que, si l'on avait constamment, pour un indice quelconque n, $a_n > 3a_{n+1}$, il n'y aurait aucun avantage, sous le rapport de l'approximation, à remplacer la série (a) par l'une de ses transformées du premier ordre, à quelque terme qu'elle appartînt, ce qui tient à ce que cette série serait, par elle-même, très convergente. Nous verrons, plus tard, comment, dans cette circonstance, on doit modifier le procédé qui nous occupe; contentons-nous, pour le présent, d'examiner le cas des séries peu convergentes où l'on a, dès le terme a_n et pour les suivans, $\Delta a_n < 2\Delta a_{n+1}$ ou, tout au moins, $a_n < 3a_{n+1}$. Voici comment, dans cette hypothèse, on pourra obtenir de nouvelles expressions de S, plus approchées que les précédentes, ou dont les erreurs aient de plus petites limites.

Mettant les transformées (e) et (f) sous cette forme

$$S = s_n + \tfrac{1}{2} a_n + \tfrac{1}{2}(\Delta^2 a_n + \Delta^2 a_{n+2} + \Delta^2 a_{n+4} + \text{etc.}),$$
$$S = s_n - a_n + \tfrac{1}{2} a_{n+1} - \tfrac{1}{2}(\Delta^2 a_{n+1} + \Delta^2 a_{n+3} + \Delta^2 a_{n+5} + \text{etc.}),$$

relations dont la dernière revient à la suivante:

$$S = s_n + \tfrac{1}{2} a_n + \tfrac{1}{2}\Delta a_n - \tfrac{1}{2}(\Delta^2 a_{n+1} + \Delta^2 a_{n+3} + \Delta^2 a_{n+5} + \text{etc.});$$

prenant leur demi-somme membre à membre, il viendra, pour la transformée du second ordre, relative à a_n,

$$(g)\begin{cases} S = s_n + \frac{3}{4}a_n - \frac{1}{4}a_{n+1} + \frac{1}{4}(\Delta^2 a_n - \Delta^2 a_{n+1} + \Delta^2 a_{n+2} - \Delta^2 a_{n+3} + \text{etc.}), \\ \text{ou } S = s_n + \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{4}\Delta a_n + \frac{1}{4}(\Delta^2 a_n - \Delta^2 a_{n+1} + \Delta^2 a_{n+2} - \Delta^2 a_{n+3} + \text{etc.}); \end{cases}$$

ce qui prouve que si les différences secondes $\Delta^2 a_n$, $\Delta^2 a_{n+1}$, $\Delta^2 a_{n+2}$,.... des termes successifs de la série proposée, sont décroissantes comme les différences premières, ou que les différences troisièmes soient toutes positives, on aura

$$S = s_n + \tfrac{3}{4}a_n - \tfrac{1}{4}a_{n+1} = s_n + \tfrac{1}{2}a_n + \tfrac{1}{4}\Delta a_{n+1}, \text{ à moins de } \tfrac{1}{4}\Delta^2 a_n.$$

Cette valeur est nécessairement plus approchée que celle de $s_n + \frac{1}{2}a_n$; mais elle ne surpassera, en exactitude, la valeur de $s_n + a_n - \frac{1}{2}a_{n+1}$ fournie par la transformée du premier ordre (f), qu'autant qu'on aurait, tout au moins,

$$\tfrac{1}{4}\Delta^2 a_n < \tfrac{1}{2}\Delta a_{n+1} \quad \text{ou} \quad \Delta a_n < 3\Delta a_{n+1}.$$

S'il en était autrement, il faudrait recourir à la transformée du second ordre

$$S = s_n + a_n - \tfrac{3}{4}a_{n+1} + \tfrac{1}{4}a_{n+2} - \tfrac{1}{4}(\Delta^2 a_{n+1} - \Delta^2 a_{n+2} + \Delta^2 a_{n+3} - \text{etc.}),$$

ou

$$S = s_n + \tfrac{1}{2}a_n + \tfrac{1}{4}\Delta a_n + \tfrac{1}{4}\Delta^2 a_n - \tfrac{1}{4}(\Delta^2 a_{n+1} - \Delta^2 a_{n+2} + \Delta^2 a_{n+3} - \text{etc.}),$$

qu'on déduit des précédentes (g), en faisant sortir de la parenthèse, le premier terme $\Delta^2 a_n$, et qui donne

$$S = s_n + \tfrac{1}{2}a_n + \tfrac{1}{4}\Delta a_n + \tfrac{1}{4}\Delta^2 a_n = s_n + a_n - \tfrac{3}{4}a_{n+1} + \tfrac{1}{4}a_{n+2},$$

à moins de $\frac{1}{4}\Delta^2 a_{n+1}$; valeur par conséquent plus exacte que celle $s_n + \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{4}\Delta a_{n+1}$.

5. On peut poursuivre ce raisonnement tant que les différences des ordres successifs seront constamment décroissantes, ou que celles de l'ordre $\mu+1$, immédiatement supérieur à l'ordre μ auquel on s'arrête, demeureront toutes positives; si, de plus, la condition $\Delta^\mu a_n < 3\Delta^\mu a_{n+1}$ se trouve satisfaite pour tous les ordres inférieurs à μ, l'approximation sera très rapide, et elle le sera le plus qu'il est possible, eu égard au nombre des termes employés, si l'on a, en même temps,..... $\Delta^{\mu+1} a_n < 2\Delta^{\mu+1} a_{n+1}$, pour ces différens ordres. On trouvera ainsi, pour la transformée de l'ordre μ, relative au terme a_n,

$$(h) \qquad S = s_n + \tfrac{1}{2} a_n + \tfrac{1}{4}\Delta a_n + \tfrac{1}{8}\Delta^2 a_n \ldots\ldots + \tfrac{1}{2^\mu}\Delta^{\mu-1} a_n + \tfrac{1}{2^\mu}(\Delta^\mu a_n - \Delta^\mu a_{n+1} + \Delta^\mu a_{n+2} - \Delta^\mu a_{n+3} + , \text{etc.}),$$

et par conséquent, on aura

$$(i) \qquad S = s_n + \tfrac{1}{2} a_n + \tfrac{1}{4}\Delta a_n + \tfrac{1}{8}\Delta^2 a_n \ldots\ldots + \tfrac{1}{2^\mu}\Delta^{\mu-1} a_n,$$

à moins de $\frac{1}{2^\mu}\Delta^\mu a_n$.

6. Cette dernière expression de S, supposée prolongée à l'infini, est précisément celle à laquelle Euler est arrivé, par une autre voie, dans ses *Institutiones calculi differentialis* (Pars II, *de transformatione serierum*, pag. 232 et seq.), et dont il a tiré un très grand parti pour la sommation des séries peu convergentes ou même divergentes (*); mais Euler n'a pas fait connaître l'expression

(*) *Voyez* aussi, au sujet de ces recherches d'Euler, l'excellent *Traité de Calcul différentiel et intégral* de M. Lacroix, 2e édition, in-4°, tome III,

ci-dessus, du reste ou complément de la transformée supposée arrêtée à un terme quelconque, reste qui constitue, par lui-même, une série remarquable du genre de la proposée; qu'on obtiendrait difficilement par l'analyse de cet illustre géomètre, et qui, en permettant d'assigner les limites de l'erreur commise, règle la marche à suivre dans chaque cas, lorsqu'il s'agit d'obtenir la plus grande approximation possible de l'emploi d'un nombre donné de termes de la série proposée. Ce qui précède, montre, en effet, qu'il arrivera bien des cas où la transformée (i), relative au terme a_n de la série et à ses différences, pourra conduire à des valeurs moins exactes que celles qu'on obtiendrait, à moins de frais, des transformées d'ordres inférieurs, mais relatives à des termes plus avancés de cette série.

Pour démontrer la chose d'une manière générale, nous reprendrons nos premiers raisonnemens, en les appliquant à la transformée ci-dessus (h), de l'ordre quelconque μ.

---

page 346, n° 1124. Ce célèbre professeur observe, avec raison, que le résultat d'Euler peut conduire à des difficultés dans beaucoup de cas, et notamment quand on l'applique à des séries divergentes, ainsi que l'a fait cet illustre géomètre à l'égard de plusieurs séries, purement numériques, parmi lesquelles M. Lacroix a principalement cité la série

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \text{etc.},$$

qui, ayant toutes ses différences nulles, conduit à la valeur $S = \frac{1}{2}$, tandis que dans la réalité, la somme de cette série est susceptible d'une infinité de limites distinctes selon l'origine dont elle provient.

Cette difficulté, qui a été levée ou plutôt expliquée par Lagrange (*voy.* la note de la page 160 du tome III de l'ouvrage cité), n'a pas lieu quand on a soin (1) de n'appliquer les transformations qu'à des séries convergentes ou dont les termes s'approchent indéfiniment de 0, conformément à ce qui a été admis dans tout ce qui précède, et de façon qu'on puisse assigner avec certitude, pour chaque cas, les limites des erreurs commises.

Supposant notamment que cette transformée soit celle pour laquelle on cesse précisément d'avoir $\Delta^\mu a_n < 3\Delta^\mu a_{n+1}$, de sorte qu'on ait, au contraire, $\Delta^\mu a_n > 3\Delta^\mu a_{n+1}$, on voit qu'on devra arrêter la série (i) au terme $\frac{1}{2^\mu}\Delta^{\mu-1}a_n$, puisque les limites de l'erreur relative aux termes suivans, deviendraient supérieures à celles qui se rapportent à des termes moins avancés dans les séries analogues concernant a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}.....

7. Faisant, en effet, sortir de la parenthèse, dans l'équation (h), le premier terme $\Delta^\mu a_n$, on obtiendra la nouvelle transformée de l'ordre μ,

$$S = s_n + \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{4}\Delta a_n + \frac{1}{8}\Delta^2 a_n \ldots\ldots$$
$$+ \frac{1}{2^\mu}\Delta^{\mu-1}a_n + \frac{1}{2^\mu}\Delta^\mu a_n - \frac{1}{2^\mu}\left(\Delta^\mu a_{n+1} - \Delta^\mu a_{n+2} + \Delta^\mu a_{n+3} - \text{etc.}\right),$$

qui, d'après ce que nous avons vu (3 et 4) pour les cas particuliers de $\mu = 1$ $\mu = 2$, coïncide avec cette autre

$$(j)\quad \left\{\begin{array}{l} S = s_n + a_n - \frac{1}{2}a_{n+1} - \frac{1}{4}\Delta a_{n+1} - \frac{1}{8}\Delta^2 a_{n+1} \ldots\ldots \\ \qquad - \frac{1}{2^\mu}\Delta^{\mu-1}a_{n+1} - \frac{1}{2^\mu}\left(\Delta^\mu a_{n+1} - \Delta^\mu a_{n+2} + \Delta^\mu a_{n+3} - \text{etc.}\right), \end{array}\right\}$$

relative au terme suivant a_{n+1} de la série proposée : ce qu'on peut d'ailleurs constater directement et très simplement en observant qu'on a généralement

$$\frac{1}{2^x}\Delta^{x-1}a_n + \frac{1}{2^x}\Delta^x a_n = \frac{1}{2^{x-1}}\Delta^{x-1}a_n - \frac{1}{2^x}\Delta^{x-1}a_{n+1},$$

puis en faisant, membre à membre, la somme de toutes les relations pareilles, obtenues en donnant successive-

ment à x les différentes valeurs comprises depuis 1 jusqu'à μ inclusivement.

On aura donc, avec un degré d'approximation nécessairement supérieur à celui que comporte l'expression (i),

$$(k)\quad \left\{\begin{array}{l} S = s_n + \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{4}\Delta a_n + \frac{1}{8}\Delta^2 a_n \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad + \frac{1}{2^\mu}\Delta^{\mu-1}a_n + \frac{1}{2^\mu}\Delta^\mu a_n, \\ \text{ou} \\ S = s_n + a_n - \frac{1}{2}a_{n+1} - \frac{1}{4}\Delta a_{n+1} - \frac{1}{8}\Delta^2 a_{n+2} \ldots\ldots \\ \qquad - \frac{1}{2^\mu}\Delta^{\mu-1}a_{n+1}, \end{array}\right\} \text{à moins de } \frac{1}{2^\mu}\Delta^\mu a_{n+1}.$$

Si, de plus, on prend la demi-somme des transformées (h) et (i), il viendra pour celle de l'ordre $\mu+1$, relative au terme a_n et à ses différences successives,

$$(l)\quad \left\{\begin{array}{l} S = s_n + \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{4}\Delta a_n + \frac{1}{8}\Delta^2 a_n \ldots\ldots + \frac{1}{2^\mu}\Delta^{\mu-1}a_n \\ \qquad + \frac{1}{2^{\mu+1}}\Delta^\mu a_n + \frac{1}{2^{\mu+1}}\left(\Delta^{\mu+1}a_n - \Delta^{\mu+1}a_{n+1} + \Delta^{\mu+1}a_{n+2} - \Delta^{\mu+1}a_{n+3} + \text{etc.}\right); \end{array}\right\}$$

et, par conséquent, si les différences $\Delta^{\mu+1}a_n$, $\Delta^{\mu+1}a_{n+1}$, $\Delta^{\mu+1}a_{n+3}$,.... relatives à cet ordre, continuent à être décroissantes, ce qui exige simplement que celles de l'ordre $\mu+2$ soient toutes positives, on aura

$$(m)\quad \left\{\begin{array}{l} S = s_n + \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{4}\Delta a_n + \frac{1}{8}\Delta^2 a_n \ldots\ldots\ldots \\ \qquad + \frac{1}{2^\mu}\Delta^{\mu+1}a_n + \frac{1}{2^{\mu+1}}\Delta^\mu a_n \end{array}\right\} \text{à moins de } \frac{1}{2^{\mu+1}}\Delta^{\mu+1}a_n.$$

Cette expression est, à la vérité, plus approchée que ne l'est celle (i), qui lui correspond dans l'ordre immédiatement inférieur, mais elle pourra l'être moins que (k),

quand sa limite surpassera celle de cette dernière, ou qu'on aura

$$\frac{1}{2^{\mu+1}}\Delta^{\mu+1}a_n > \frac{1}{2^{\mu}}\Delta^{\mu}a_{n+1}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \Delta^{\mu}a_n > 3\Delta^{\mu}a_{n+1}.$$

Par conséquent, si cette dernière inégalité continue à avoir lieu dans les ordres supérieurs à μ, il sera avantageux, sous le rapport de l'approximation, de substituer (k) à (i), ce qui suppose d'ailleurs que l'on ait, pour la première et pour tous ces ordres, $\Delta^{\mu}a_{n+1} < 3\Delta^{\mu}a_{n+2}$. En effet, dès que cette condition cessera d'être satisfaite, on devra remplacer, à son tour, l'expression (k) par celle qui se rapporte au terme a_{n+2} de la proposée, et ainsi de suite, à mesure qu'on admettra un plus grand nombre de termes de cette dernière série dans les calculs, ou qu'on voudra atteindre des ordres de plus en plus élevés.

8. On se rappellera, au surplus, d'après ce qui a été dit relativement au cas de $\mu=1$, $\mu=2$, que la condition $\Delta^{\mu}a^n > 3\Delta^{\mu}a_{n+1}$, n'offre qu'un indice ou, en quelque sorte, une présomption de la supériorité d'exactitude de la formule (k) sur celle (m), et que, pour en acquérir la certitude parfaite, il est nécessaire de recourir aux conditions relatives aux limites inférieures des erreurs qu'on risque de commettre dans chaque cas.

Posant, en effet,

$$\begin{aligned} s_n &= \Delta^{\mu}a_n - \Delta^{\mu}a_{n+1} + \Delta^{\mu}a_{n+2} - \Delta^{\mu}a_{n+3} + \text{etc.} \\ &= \Delta^{\mu+1}a_n + \Delta^{\mu+1}a_{n+2} + \Delta^{\mu+1}a_{n+4} + \text{etc.}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s'_n &= \Delta^{\mu}a_n - s_n = \Delta^{\mu}a_{n+1} - \Delta^{\mu}a_{n+2} + \Delta^{\mu}a_{n+3} - \text{etc.} \\ &= \Delta^{\mu+1}a_{n+1} + \Delta^{\mu+1}a_{n+3} + \Delta^{\mu+1}a_{n+5} + \text{etc.}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_{n+1} &= s_n - s'_n = \Delta^{\mu+1}a_n - \Delta^{\mu+1}a_{n+1} + \Delta^{\mu+1}a_{n+2} - \Delta^{\mu+1}a_{n+3} + \text{etc.} \\ &= \Delta^{\mu+2}a_n + \Delta^{\mu+2}a_{n+2} + \Delta^{\mu+2}a_{n+4} + \text{etc.}\ ; \end{aligned}$$

de sorte que les erreurs absolues relatives à (i), à (k) et à (m), soient respectivement représentées par les expressions

$$\frac{1}{2^\mu}\varepsilon_n, \qquad \frac{1}{2^\mu}\varepsilon'_n, \qquad \frac{1}{2^{\mu+1}}\varepsilon_{n+1};$$

on aura évidemment, d'après les propriétés des séries ci-dessus supposées convergentes,

$$\begin{aligned}
\varepsilon_n &< \Delta^\mu a_n > \Delta^{\mu+1} a_n = \Delta^\mu a_n - \Delta^\mu a_{n+1},\\
\varepsilon'_n &< \Delta^\mu a_{n+1} > \Delta^{\mu+1} a_{n+1} = \Delta^\mu a_{n+1} - \Delta^\mu a_{n+2},\\
\varepsilon_{n+1} &< \Delta^{\mu+1} a_n > \Delta^{\mu+2} a_n = \Delta^{\mu+1} a_n - \Delta^{\mu+1} a_{n+1};
\end{aligned}$$

ce qui donne, *à fortiori*,

$$\frac{1}{2^{\mu+1}}\varepsilon_{n+1} > \frac{1}{2^\mu}\varepsilon'_n,$$

si $\frac{1}{2^{\mu+1}}\Delta^{\mu+2} a_n > \frac{1}{2^\mu}\Delta^\mu a_{n+1}$, ou $\Delta^\mu a_n > 3\Delta^\mu a_{n+1} + \Delta^{\mu+1} a_{n+1}$;

$$\frac{1}{2^{\mu+1}}\varepsilon_{n+1} < \frac{1}{2^\mu}\varepsilon'_n,$$

si $\frac{1}{2^{\mu+1}}\Delta^{\mu+1} a_n < \frac{1}{2^\mu}\Delta^{\mu+1} a_{n+1}$, ou $\Delta^\mu a_n < 3\Delta^\mu a_{n+1} - 2\Delta^\mu a_{n+2}$.

Lors donc que cette dernière condition sera satisfaite, on pourra affirmer, *à fortiori*, que l'erreur relative à (m) sera moindre que celle qui se rapporte à (k); et, si c'est, au contraire, la première qui l'est, on sera certain que l'inverse aura précisément lieu; mais, dans tous les cas où l'on aurait, à la fois,

$$\Delta^\mu a_n > 3\Delta^\mu a_{n+1} - 2\Delta^\mu a_{n+2} < 3\Delta^\mu a_{n+1} + \Delta^{\mu+1} a_{n+1},$$

et où par conséquent la valeur de $\Delta^\mu a_n$ se trouverait comprise entre $3\Delta^\mu a_{n+1} - 2\Delta^\mu a_{n+2}$ et $3\Delta^\mu a_{n+1} + \Delta^{\mu+1} a_{n+1}$, on serait complétement incertain quelle est celle des deux expressions (k) ou (m), qui est la plus exacte; du moins

ne pourrait-on rien prononcer sans un examen circonstancié de la loi que présentent les différences des divers ordres de la série proposée.

9. Or, de cette incertitude même, il résulte une conséquence importante, et qui permet d'obtenir, avec un égal nombre de termes de cette série, une valeur de S à la fois plus approchée que celles fournies par (k) et par (m). En effet, puisqu'on a

$$\varsigma_{n+1} > 2\varsigma'_n \quad \text{quand} \quad \Delta^\mu a_n > 3\Delta^\mu a_{n+1} + \Delta^{\mu+1} a_{n+1},$$
$$\varsigma_{n+1} < 2\varsigma'_n \quad \text{quand} \quad \Delta^\mu a_n < 3\Delta^\mu a_{n+1} - 2\Delta^\mu a_{n+2},$$

il faut que $\Delta^\mu a_n$ se trouve compris entre ces deux dernières limites quand la relation $\varsigma_{n+1} = 2\varsigma'_n$ est rigoureusement satisfaite; et c'est ce qui arrive précisément lorsque μ et n ont été choisis de façon qu'on ait sensiblement $\Delta^\mu a_n = 3\Delta^\mu a_{n+1}$.

La différence entre ς_{n+1} et $2\varsigma'_n$, n'étant donc alors qu'une fraction assez petite de chacune d'elles, et l'expression $\frac{1}{2^{\mu+2}}(\varsigma_{n+1} - 2\varsigma'_n)$ de l'erreur relative à la moyenne de (k) et de (m), ne dépendant que de cette différence, il faut que cette moyenne s'approche aussi davantage de la vraie valeur de S, que ne le font séparément (k) et (m).

10. Du reste, il est facile de voir, attendu que les expressions de ς_{n+1} et ς'_n constituent des séries convergentes du genre de la proposée, que les quantités $\frac{1}{2^{\mu+2}}(\Delta^\mu a_n - 3\Delta^\mu a_{n+1} + 2\Delta^\mu a_{n+2})$, $\frac{1}{2^{\mu+2}}(\Delta^\mu a_n - 3\Delta^\mu a_{n+1} - \Delta^{\mu+1} a_{n+1})$, sont précisément (1) les limites de l'erreur qu'on risque de commettre en adoptant, pour S, la moyenne des valeurs données par (k) et par (m); c'est-à-dire qu'on a

$$\frac{1}{2^{\mu+2}}(\varsigma_n - 3\varsigma'_n) < \frac{1}{2^{\mu+2}}(\Delta^\mu a_n - 3\Delta^\mu a_{n+1} + 2\Delta^\mu a_{n+2}) > \frac{1}{2^{\mu+2}}(\Delta^\mu a_n - 3\Delta^\mu a_{n+1} - \Delta^{\mu+1} a_{n+1})$$

Dans le cas particulier où μ et n sont tels que $\Delta^\mu a_n = 3\Delta^\mu a_{n+1}$ rigoureusement, les limites ci-dessus deviennent respectivement

$$\frac{1}{2^{\mu+1}}\Delta^\mu a_{n+2}, \qquad -\frac{1}{2^{\mu+2}}\Delta^{\mu+1}a_{n+1},$$

dont la plus grande, si on les prend abstraction faite du signe, surpasse évidemment la valeur absolue de l'erreur, et se trouve, en effet, être moindre que les limites supérieures

$$\frac{1}{2^\mu}\Delta^\mu a_{n+1}, \qquad \frac{1}{2^{\mu+1}}\Delta^{\mu+1}a_n = \frac{1}{2^{\mu+1}}(\Delta^\mu a_n - \Delta^\mu a_{n+1}) = \frac{1}{2^\mu}\Delta^\mu a_{n+1},$$

des erreurs relatives aux expressions (k) et (m).

11. Quant à l'expression générale et rigoureuse de l'erreur relative à la moyenne de (k) et de (m), on peut lui donner successivement les formes suivantes, qui nous paraissent également dignes de remarque, et dont la loi est facile à saisir :

$$\frac{1}{2^{\mu+2}}(s_{n+1}-2s'_n) = \frac{1}{2^{\mu+2}}\left(\Delta^{\mu+1}a_n - 3\Delta^{\mu+1}a_{n+1} + \Delta^{\mu+1}a_{n+2} - 3\Delta^{\mu+1}a_{n+3} + \Delta^{\mu+1}a_{n+4} - 3\Delta^{\mu+1}a_{n+5} + \text{etc.}\right)$$

$$= \frac{1}{2^{\mu+2}}\left[(\Delta^\mu a_n - 3\Delta^\mu a_{n+1}) - (\Delta^\mu a_{n+1} - 3\Delta^\mu a_{n+2}) + (\Delta^\mu a_{n+2} - 3\Delta^\mu a_{n+3}) - (\Delta^\mu a_{n+3} - 3\Delta^\mu a_{n+4}) + \text{etc.}\right]$$

$$= \frac{1}{2^{\mu+2}}\left[\Delta^\mu a_n - 4(\Delta^\mu a_{n+1} - \Delta^\mu a_{n+2} + \Delta^\mu a_{n+3} - \Delta^\mu a_{n+4} + \Delta^\mu a_{n+5} - \text{etc.})\right].$$

On trouverait, au surplus, facilement des limites de cette erreur, beaucoup plus resserrées que celles qui ont été rapportées ci-dessus, en faisant intervenir, dans leur expression, un plus grand nombre de termes des séries

qui en représentent la valeur (*); mais le calcul de ces limites devenant de plus en plus laborieux, il sera préférable, en général, de s'en tenir aux précédentes, qui suffiront, dans la plupart des cas, pour donner une idée du degré d'approximation obtenu, si, mieux encore, on ne préfère, dans la vue d'éviter tout-à-fait ce calcul lors des applications numériques, déterminer immédiatement les valeurs de (i) et de (k) pour en conclure celle de leur moyenne arithmétique (m), puis enfin celle de la moyenne semblable relative à (m) et à (k). En effet, les chiffres décimaux communs à ces derniers nombres, mettront en état d'apprécier, à moins d'une demi-unité du dernier de ces chiffres, le degré d'exactitude obtenu.

12. Les discussions qui précèdent indiquent la marche à suivre, dans chaque circonstance particulière, pour

---

(*) On a, en effet (8),

$$2s'_n = 2\Delta^\mu a_{n+1} - (2\Delta^\mu a_{n+2} - 2\Delta^\mu a_{n+3} + 2\Delta^\mu a_{n+4} - \text{etc.}) = 2\Delta^\mu a_{n+1} - \delta,$$

$$s_n - s'_n = \Delta^{\mu+1} a_n - (\Delta^{\mu+1} a_{n+1} - \Delta^{\mu+1} a_{n+2} + \Delta^{\mu+1} a_{n+3} - \text{etc.}) = \Delta^{\mu+1} a_n - \delta';$$

et, attendu que les séries δ et δ' sont censées convergentes,

$$\delta < 2\Delta^\mu a_{n+2} - \Delta^\mu a_{n+3} > 2\Delta^{\mu+1} a_{n+2}, \quad \delta' < \Delta^{\mu+1} a_{n+1} - \tfrac{1}{2}\Delta^{\mu+1} a_{n+2} > \Delta^{\mu+2} a_{n+1};$$

ce qui donne, en général,

$$\frac{1}{2^{\mu+2}}(s_n - s'_n - 2s'_n) = \frac{1}{2^{\mu+2}}(\delta - \delta') < \frac{1}{2^{\mu+2}}\left(2\Delta^\mu a_{n+2} - \Delta^\mu a_{n+3} - \Delta^{\mu+2} a_{n+1}\right)$$

$$> \frac{1}{2^{\mu+2}}\left(2\Delta^{\mu+1} a_{n+2} - \Delta^{\mu+1} a_{n+1} + \frac{1}{2}\Delta^{\mu+1} a_{n+2}\right),$$

ou, par les transformations relatives aux différences,

$$\frac{1}{2^{\mu+2}}(s_n - 3s'_n) < \frac{1}{2^{\mu+2}}\left(2\Delta^{\mu+1} a_{n+2} - \Delta^{\mu+1} a_{n+1} + \Delta^\mu a_{n+2}\right)$$

$$> \frac{1}{2^{\mu+2}}\left(2\Delta^{\mu+1} a_{n+2} - \Delta^{\mu+1} a_{n+1} + \frac{1}{2}\Delta^{\mu+1} a_{n+2}\right).$$

tirer un parti avantageux du mode de transformation proposé, et notamment pour arriver au plus grand degré d'approximation possible, eu égard au nombre des termes employés dans les calculs. Mais on abrégera beaucoup ces discussions au moyen des considérations qui suivent.

On remarquera, en effet, que la série proposée (*a*) étant censée donnée par la loi régulière de ses termes, du moins à partir de a_n, qui peut être indifféremment positif ou négatif, puisqu'il n'y a qu'un simple changement de signe à opérer, on connaîtra aussi la loi des différences des divers ordres relatives au terme général a_n, de cette série, dont le rang est marqué par n, ce qui donnera l'expression de $\Delta^{\mu+1}a_n$, $\Delta^{\mu+1}a_{n+1}$, en fonction de n, de μ et de constantes, et, par suite, celle de leur rapport que nous représenterons par $\varphi(\mu, n) : \psi(\mu, n)$, en le supposant réduit à son expression la plus simple. Posant ensuite

$$\frac{\varphi(\mu,n)}{\psi(\mu,n)} = \zeta, \quad \text{ou} \quad \varphi(\mu,n) - \zeta.\psi(\mu,n) = 0;$$

cette équation, qui est à trois variables, fera connaître la loi qui lie entre eux les nombres ζ, μ et n, et pourra tenir lieu complétement de la série proposée, du moins à compter de a_n, si l'on a soin de n'y attribuer à μ et à n que des valeurs entières et positives.

En premier lieu, elle mettra à même de reconnaître, sur-le-champ, si la valeur de ζ est constamment décroissante, dans chaque ordre μ de différences, avec le nombre n qui marque le rang des termes, et à partir de quel terme cette circonstance a précisément lieu ; ce qui est indispensable pour l'application de la méthode qui nous occupe.

Posant enfin l'équation

$$\varphi(\mu, n) - 3\psi(\mu, n) = 0,$$

qui peut être censée représenter une courbe plane aux coordonnées rectangulaires μ et n, lorsque la première représente une surface tout entière aux coordonnées ζ, μ et n, elle fera pareillement connaître, pour chaque ordre de différences, le rang n du terme passé lequel l'inégalité $\Delta^\mu a_n < 3\Delta^\mu a_{n+1}$ va se changer en l'inégalité inverse $\Delta^\mu a_n > 3\Delta^\mu a_{n+1}$ et réciproquement.

13. Supposant notamment qu'on se donne le rang n du terme de la série proposée qu'on veut soumettre aux transformations dont il s'agit, l'équation

$$\varphi(\mu, n) - 3\psi(\mu, n) = 0,$$

résolue par rapport à μ, fera découvrir l'ordre μ' auquel on doit arrêter ces transformations pour être certain qu'on a constamment $\Delta^\mu a_n < 3\Delta^\mu a_{n+1}$ depuis $\mu = 0$ jusqu'à $\mu = \mu' - 1$, c'est-à-dire dans tous les ordres inférieurs à μ; ce qui est indispensable, comme on l'a vu (7), pour que la formule (*i*) soit d'une application avantageuse. Il ne s'agira, en effet, que de prendre pour μ', un nombre entier inférieur ou tout au plus égal à la plus grande des racines positives de l'équation ci-dessus; car la fonction $\varphi(\mu, n) - 3\psi(\mu, n)$ ne pouvant, dès lors, changer de signe pour les valeurs de μ comprises entre μ' et 0, elle sera constamment négative si seulement elle l'est pour $\mu = 0$; ce qui a lieu, par hypothèse, puisque autrement on devrait, d'après nos principes, substituer au terme a_n de la série proposée quelqu'un de ceux qui le suivent.

Mais, afin d'être positivement assuré que la valeur

donnée par la formule (i), lorsqu'on y suppose $\mu = \mu'$, est la plus approchée possible, il faudra, en outre, examiner (6) si, pour toutes les valeurs entières de μ comprises depuis $\mu = 1$ jusqu'à $\mu = \mu'$, on a constamment

$$\zeta \text{ ou } \frac{\varphi(\mu, n)}{\psi(\mu, n)} < 2, \text{ ou tout au plus } = 2;$$

condition facile à vérifier, mais qui n'est point absolue, et qui pourra être suppléée avantageusement par les considérations qui ressortent directement de l'équation

$$\varphi(\mu, n) - 3\psi(\mu, n) = 0.$$

En effet, si le nombre n égale ou surpasse la plus grande des racines positives de cette équation, lorsqu'on y donne successivement à μ toutes les valeurs entières comprises depuis $\mu = 0$ jusqu'à $\mu = \mu'$, l'expression qui constitue son premier membre, et par conséquent la différence $\Delta^\mu a_n - 3\Delta^\mu a_{n+1}$ conserveront un signe invariable dans la même étendue, et cela depuis $n = n$ jusqu'à n infini; ce signe sera d'ailleurs négatif puisque, par hypothèse, on a

$$\Delta^0 a_n < 3\Delta^0 a_{n+1}, \quad \text{ou} \quad a_n < 3a_{n+1}.$$

Donc aussi on pourra affirmer, avec certitude, que, depuis l'ordre $\mu = 0$ jusqu'à l'ordre $\mu = \mu' - 1$, la valeur de (m) est constamment plus approchée que celle de (k), attendu que, pour tout cet intervalle, la quantité

$$\Delta^{\mu+1} a_n - 3\Delta^{\mu+1} a_{n+1} + \Delta^{\mu+1} a_{n+2} - 3\Delta^{\mu+1} a_{n+3} + \Delta^{\mu+1} a_{n+4} - 3\Delta^{\mu+1} a_{n+5} + \text{etc.}$$

qui représente (8 et 11) la valeur de $\varsigma_{n+1} - 2\varsigma'_n$, sera elle-même négative et par conséquent $\varsigma_{n+1} < 2\varsigma'_n$.

Quant à l'ordre μ', il est aisé de voir qu'il arrivera généralement, à moins que n ne corresponde précisément à un *maximum* absolu de n dans l'équation indéterminée

$$\varphi(\mu, n) - 3\psi(\mu, n) = 0,$$

que l'on aura $\Delta^{\mu'+1}a_n > 3\Delta^{\mu'+1}a_{n+1}$, tout au moins pour $n=n$; car ayant choisi, par hypothèse, μ' de façon que $\varphi(\mu', n) - 3\psi(\mu', n)$ soit nul ou très petit, la quantité $\varphi(\mu, n) - 3\psi(\mu', n)$ changera de signe dans le passage de $\mu = \mu' - 1$ à $\mu = \mu' + 1$; on ne pourra donc plus affirmer que ε_{n+1} est plus petit que $2\varepsilon'_n$, ou (m) plus exact que (k), pour l'ordre μ' dont il s'agit; ce qui fera retomber dans le cas d'indécision mentionné au n° 9, et conduira à prendre, pour la valeur S de la série proposée, la moyenne arithmétique entre ces dernières quantités.

14. La discussion qui vient de nous occuper, se simplifie beaucoup, dans la plupart des applications, soit parce que les fonctions $\varphi(\mu, n)$, $\psi(\mu, n)$ ont elles-mêmes une forme très simple, soit parce qu'on prétend se borner aux premiers ordres de différences ou aux premiers termes de la série proposée. Mais, avant de passer aux exemples numériques qui sont indispensables pour en bien saisir l'esprit, il ne sera pas inutile de montrer comment on peut transformer les expressions de (i) et de (k), en d'autres qui ne dépendent directement que des termes mêmes de la série proposée.

Il ne s'agit, pour cela, que d'y remplacer les différences qui y entrent, par leurs valeurs en fonction de ces termes; ce qui leur donnera évidemment la forme

$$(i') \quad S = s_n + \frac{1}{2^\mu}\left(\alpha_1 a_n - \alpha_2 a_{n+1} + \alpha_3 a_{n+2} \ldots \pm \alpha_{\mu-1} a_{n+\mu-2} \mp \alpha_\mu a_{n+\mu-1}\right),$$

$$(k') \quad S = s_n + \frac{1}{2^\mu}\left(2^\mu a_n - \alpha_1 a_{n+1} + \alpha_2 a_{n+2} \ldots \pm \alpha_{\mu-2} a_{n+\mu-2} \mp \alpha_{\mu-1} a_{n+\mu-1}\right),$$

en réduisant tous les termes, indépendans de s_n, au même dénominateur 2^μ, et α_1, α_2, α_3,.... α_μ étant des coefficiens numériques à déterminer.

Or, d'après la nature de ces expressions de S, la seconde doit (7) être égale à la première augmentée de $\frac{1}{2^\mu}\Delta^\mu a_n$, ou, si l'on veut, on doit avoir identiquement

$$(2^\mu-\alpha_1)a_n-(\alpha_1-\alpha_2)a_{n+1}+(\alpha_2-\alpha_3)a_{n+2}\ldots.$$
$$\ldots.\pm(\alpha_{\mu-2}-\alpha_{\mu-1})a_{n+\mu-2}\mp(\alpha_{\mu-1}-\alpha_\mu)a_{n+\mu-1}\pm\alpha_\mu a_{n+\mu}=\Delta^\mu a_n;$$

et, comme d'après les principes connus du calcul des différences finies, différences qu'il convient ici de prendre (1) dans un ordre inverse,

$$\Delta^\mu a_n=a_n-\frac{\mu}{1}a_{n+1}+\frac{\mu(\mu-1)}{1.2}a_{n+2}-\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3}a_{n+3}$$
$$+\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)}{1.2.3.4}a_{n+4}-\text{etc.},$$

il faut qu'on ait séparément

$$2^\mu-\alpha_1=1,\quad \alpha_1-\alpha_2=\frac{\mu}{1},\quad \alpha_2-\alpha_3=\frac{\mu(\mu-1)}{1.2},\quad \alpha_3-\alpha_4=\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3},\ldots$$

et, en général,

$$\alpha_{m-1}-\alpha_m=\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-m+2)}{1.2.3.\ldots\ldots(m-1)}.$$

On tire successivement de ces équations,

$$\alpha_1=2^\mu-1,\quad \alpha_2=2^\mu-1-\frac{\mu}{1},\quad \alpha_3=2^\mu-1-\frac{\mu}{1}-\frac{\mu(\mu-1)}{1.2},$$
$$\alpha_4=2^\mu-1-\frac{\mu}{1}-\frac{\mu(\mu-1)}{1.2}-\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2}{1.2.3},$$

et ainsi de suite; ce qui donne, pour le coefficient d'un rang quelconque m,

$$\alpha_m = 2^\mu - 1 - \frac{\mu}{1} - \frac{\mu(\mu-1)}{1.2} - \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3} \ldots . \\ \ldots . - \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-m+2)}{1.2.3\ldots\ldots\ldots(m-1)};$$

expression dont la partie négative n'est autre chose que la somme des m premiers termes du développement de $(1+1)^\mu$.

15. En observant d'ailleurs que, dans ce développement, les termes placés à égale distance des extrêmes, ont la même valeur, on pourra abréger notablement le calcul des coefficiens dont il s'agit.

Comparant, en effet, l'expression ci-dessus de α_m avec le développement de $(1+1)^\mu = 2^\mu$, on trouvera, sans difficulté,

$$\alpha_m = 1 + \frac{\mu}{1} + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2} + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3} \ldots . \\ \ldots . + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots[\mu-(\mu-m-1)]}{1.2.3\ldots\ldots\ldots\ldots(\mu-m)};$$

nouvelle expression qui est la somme des $\mu - m + 1$ derniers termes du développement de $(1+1)^\mu$ pris en allant de la droite vers la gauche. Et, comme le nombre total des coefficiens $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ à calculer est précisément μ, on voit que, pour obtenir la valeur de celui $\alpha_{\mu-m}$, qui occupe le même rang à partir de α_μ en allant vers la gauche, il ne s'agira que de changer $\mu - m$ en $m-1$ dans l'expression de α_m trouvée en dernier lieu; ce qui donne

$$\alpha^{\mu-m} = 1 + \frac{\mu}{1} + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2} + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3} \ldots + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-m-2)}{1.2.3\ldots\ldots(m-1)},$$

et, par suite,

$$\alpha_m + \alpha_{\mu-m} = 2^\mu.$$

Ainsi donc, ayant une fois calculé la première moitié des coefficiens $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha^\mu$, l'autre moitié s'en conclura, sur-le-champ, par une simple soustraction, le terme du milieu, quand μ est impair, ayant précisément pour valeur $\frac{1}{2}2^\mu = 2^{\mu-1}$.

Soit, pour exemple, $\mu = 6$, on aura d'abord, en partant de α_6 ou $m = 0$,

$$\alpha_6 = 1,\ \alpha_5 = 1 + \frac{\mu}{1} = 7,\ \alpha_4 = 1 + \frac{\mu}{1} + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2} = 7 + 15 = 22;$$

puis

$$\alpha_3 = 2^6 - \alpha_4 = 64 - 22 = 42,\ \alpha_2 = 64 - 7 = 57,\ \alpha_1 = 64 - 1 = 63.$$

16. Calculant ainsi successivement les valeurs des coefficiens de la formule (i') ci-dessus, lorsque μ devient 0, 1, 2, 3, etc., on trouvera, pour l'ordre

$$(i')\quad \begin{cases} \mu=0,\ S=s_n, \\ \mu=1,\ S=s_n+\frac{1}{2}a_n, \\ \mu=2,\ S=s_n+\frac{1}{4}(3a_n-a_{n+1}), \\ \mu=3,\ S=s_n+\frac{1}{8}(7a_n-4a_{n+1}+a_{n+2}), \\ \mu=4,\ S=s_n+\frac{1}{16}(15a_n-11a_{n+1}+5a_{n+2}-a_{n+3}), \\ \mu=5,\ S=s_n+\frac{1}{32}(31a_n-26a_{n+1}+16a_{n+2}-6a_{n+3}+a_{n+4}), \\ \mu=6,\ S=s_n+\frac{1}{64}(63a_n-57a_{n+1}+42a_{n+2}-22a_{n+3}+7a_{n+4}-a_{n+5}), \\ \mu=7,\ S=s_n+\frac{1}{128}(127a_n-120a_{n+1}+99a_{n+2}-64a_{n+3}+29a_{n+4}-8a_{n+5}+a_{n+6}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

relations dont la loi de dérivation est manifeste, et qui pourront être poussées aussi loin qu'on le voudra, en remarquant que le coefficient numérique d'un terme quelconque de l'une d'elles, est la somme du coefficient de

même rang dans la précédente, et de celui du terme placé immédiatement avant, pris tous deux abstraction faite du signe; le coefficient du premier terme de chaque parenthèse étant d'ailleurs égal à $2^{\mu} - 1$, et les signes étant réglés d'après ceux des termes correspondans de la série proposée (a). Ainsi, par exemple, pour $\mu = 7$, on trouve

$$127 = 2^7 - 1, \quad 120 = 63 + 57, \quad 99 = 57 + 42, \quad 64 = 42 + 22,$$
$$29 = 22 + 7, \quad 8 = 7 + 1.$$

Remplaçant ensuite n par $n + 1$ dans ces formules, et changeant le signe des parenthèses, on obtiendra les valeurs correspondantes de S relatives à la formule (k'), qui d'ailleurs pécheront par excès, celles qui précèdent péchant par défaut.

17. Quant aux expressions relatives à la formule (m), elles seront les mêmes que les précédentes, à cela près que μ se trouvera augmenté d'une unité. Enfin, si l'on prend la moyenne respective entre ces dernières expressions et celles dont il vient d'être parlé, on obtiendra les formules suivantes que nous désignerons par (l') et qui se rapportent au cas d'indécision, souvent rappelé, pour lequel n et μ ont été choisis de façon que la condition $\Delta^{\mu} a_n = 3^{\mu} \Delta a_{n+1}$ se trouve satisfaite rigoureusement ou approximativement:

$$(l') \quad \begin{cases} \mu=0, & S = s_n + \frac{1}{4} 3a_n, \\ \mu=1, & S = s_n + \frac{1}{8} (7a_n - 3a_{n+1}), \\ \mu=2, & S = s_n + \frac{1}{16} (15a_n - 10a_{n+1} + 3a_{n+2}), \\ \mu=3, & S = s_n + \frac{1}{32} (31a_n - 25a_{n+1} + 13a_{n+2} - 3a_{n+3}), \\ \mu=4, & S = s_n + \frac{1}{64} (63a_n - 56a_{n+1} + 38a_{n+2} - 16a_{n+3} + 3a_{n+4}), \\ \mu=5, & S = s_n + \frac{1}{128} (127a_n - 119a_{n+1} + 94a_{n+2} - 54a_{n+3} + 19a_{n+4} - 3a_{n+5}), \\ \mu=6, & S = s_n + \frac{1}{256} (255a_n - 246a_{n+1} + 213a_{n+2} - 148a_{n+3} + 73a_{n+4} - 22a_{n+5} + 3a_{n+6}), \\ \cdots & \cdots \end{cases}$$

On remarquera, en outre, que ces relations sont soumises aux mêmes lois de dérivation que les précédentes; ce qui permet d'en prolonger le tableau indéfiniment; les signes de terme qui y entrent étant toujours ceux des termes correspondans de la série proposée.

Applications numériques aux séries peu convergentes.

18. Soit, en premier lieu, la série très peu convergente,

$$S = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots \pm \frac{1}{2n+1} \mp \frac{1}{2n+3} \pm \frac{1}{2n+5} \mp \frac{1}{2n+7} \pm \frac{1}{2n+9} \mp \text{etc.},$$

dont il faudrait calculer près de 50000 termes pour en obtenir, à moins de 0,00001, la valeur qui représente, comme on sait, le nombre $\frac{\pi}{4}$ ou 0,785398163..... égal au quart du rapport de la circonférence au diamètre. On trouvera, sans difficulté, en ne prenant (1) que les valeurs absolues des différences,

$$\Delta^0 a_n = \frac{1}{2n+1}, \quad \Delta a_n = \frac{1.2}{(2n+1)(2n+3)}, \quad \Delta^2 a_n = \frac{1.2.4}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)},$$
$$\Delta^3 a_n = \frac{1.2.4.6}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)(2n+7)},$$

et, en général,

$$\Delta^\mu a_n = \frac{1.2.4.\ldots\ldots 2\mu}{(2n+1)(2n+3)(2n+5).\ldots.(2n+2\mu+1)},$$

La loi de ces différences est manifeste : elles vont constamment en décroissant à mesure qu'augmentent,

soit le nombre n qui marque le rang du terme auquel elles se rapportent, soit le nombre μ qui marque l'ordre de chaque différence.

Prenant, pour chacun de ces ordres, le rapport de la différence du terme a_n à celle du terme suivant a_{n+1}, qui s'en déduit en y changeant simplement n en $n+1$, on aura évidemment

$$\frac{\Delta^0 a_n}{\Delta^0 a_{n+1}} = \frac{2n+3}{2n+1}, \quad \frac{\Delta a_n}{\Delta a_{n+1}} = \frac{2n+5}{2n+1}, \quad \frac{\Delta^2 a_n}{\Delta^2 a_{n+1}} = \frac{2n+7}{2n+1}, \ldots \frac{\Delta^\mu a_n}{\Delta^\mu a_{n+1}} = \frac{2n+2\mu+3}{2n+1}.$$

Posant enfin l'équation

$$\zeta = \frac{\Delta^\mu a_n}{\Delta^\mu a_{n+1}} = \frac{2n+2\mu+3}{2n+1} = 3, \quad \text{ou} \quad \mu - 2n = 0,$$

qui représente, sans changement de signe, celle... $\varphi(\mu, n) - 3\psi(\mu, n) = 0$ dont il a été question au n° 12, lorsqu'on y suppose $n = n$, elle fera connaître l'ordre μ auquel on doit arrêter les transformations de la série proposée, pour qu'ayant $\Delta^\mu a_n < 3\Delta^\mu a_{n+1}$ de $\mu = 0$ à $\mu = 2n-1$, on ait, au contraire, $\Delta^\mu a_n > 3\Delta^\mu a_{n+1}$ quand on passe de l'ordre $\mu = 2n$ à l'ordre $\mu = 2n+1$. Il arrive effectivement ici que la fonction $\mu - 2n$ ou $\Delta^\mu a_n - 3\Delta^\mu a_{n+1}$ reste constamment négative pour toutes les valeurs de μ inférieures à $2n$, et devient positive pour toutes celles qui surpassent cette même quantité.

D'ailleurs si l'on remplace (13) n par n dans l'équation $\mu - 2n = 0$, ce qui donne, en général, $\mu - 2n = 0$, il paraîtra évident que, pour tous les ordres μ inférieurs à $2n+1$, on a constamment $\Delta^\mu a_n < 3\Delta^\mu a_{n+1}$ de $n = n$ à $n = \infty$, tandis que, pour cet ordre lui-même, auquel répond l'équation $2n+1-2n = 0$, l'inégalité dont il s'agit, n'est satisfaite

qu'à partir de $n = n + 1$, la valeur $n = n$ donnant, au contraire, $2n + 1 - 2n > 0$ ou $\Delta^{2n+1} a_n > 3\Delta a^{2n+1} a_{n+1}$. On est donc assuré que, pour tous les ordres μ inférieurs à $2n + 1$, les valeurs données par la formule (i) ou (i') sont les plus approchées possibles, eu égard au nombre des termes qui y entrent, tandis que l'on ne peut plus rien affirmer relativement à l'ordre $2n + 1$ lui-même, ainsi qu'à tous les ordres suivans. Ce sera donc le cas de se servir, pour calculer la somme S de la série proposée, de celle des formules (l') du n° 14 ci-dessus, qui se rapporte à l'ordre $\mu - 2n$.

19. Supposant, en particulier, $n = 0$, ce qui revient à prendre

$$s_n = 0, \quad a_n = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1}{3} \ldots, \quad a_{n+2} = \frac{1}{5}, \text{ etc.},$$

l'équation ci-dessus donnera $\mu = 0$, et la première des formules citées

$$S = s_n + \frac{3}{4} a_n = 0{,}75;$$

valeur exacte à moins de $\frac{1}{22}$.

Supposant ensuite

$$n = 1, \text{ ou } s_n = 1, \ a_n = \frac{1}{3}, \ a_{n+1} = \frac{1}{5}, \ a_{n+2} = \frac{1}{7},$$

on trouvera $\mu = 2$, et, par la troisième des formules (l'),

$$S = s_n - \frac{1}{16} (15 a_n - 10 a_{n+1} + 3 a_{n+2}) = 0{,}785714,$$

à moins de 0,00033.

Pour obtenir un pareil degré d'approximation à l'aide du procédé direct, il faudrait calculer au-delà des 3000 premiers termes de la série.

Supposant enfin

$$n=2, \quad \text{ou } s_n=1-\frac{1}{3}, \quad a_n=\frac{1}{5}, \quad a_{n+1}=\frac{1}{7}, \quad a_{n+2}=\frac{1}{9},$$
$$a_{n+3}=\frac{1}{11}, \quad a_{n+4}=\frac{1}{13},$$

il viendra

$$\mu=2n=4 \text{ et } S=s_n+\tfrac{1}{64}(63a_n-56a_{n+1}+38a_{n+2}-16a_{n+3}+3a_{n+4})=0,7853924,$$

valeur exacte jusqu'à la cinquième décimale.

20. En recherchant directement les limites de l'erreur qui se rapporte à ce dernier nombre, on trouvera (10)

$$\frac{1}{2^{\mu+2}}(s_{n+1}-2s'_n)<\frac{1}{2^{\mu+1}}\Delta^\mu a_{n+2}=0,0000366>-\frac{1}{2^{\mu+2}}\Delta^{\mu+1}a_{n+1}=-0,0000261,$$

attendu qu'on a ici rigoureusement $\Delta^\mu a_n = 3\Delta^\mu a_{n+1}$, et d'ailleurs

$$\Delta^\mu a_{n+2}=\Delta^4 a_4=\frac{1.2.4.6.8}{9.11.13.15.17}, \quad \Delta^{\mu+1}a_{n+1}=\Delta^5 a_3=\frac{1.2.4.6.8.10}{7.9.11.13.15.17}.$$

Ces limites surpassent, comme on voit, de beaucoup l'erreur effective dont la valeur absolue est moindre que 0,0000058; mais si l'on en prend la demi-somme algébrique, le résultat, qu'on peut considérer comme l'expression de l'*erreur probable*, bien qu'un peu faible, donnera une valeur très approchée de l'erreur effective, ce qui tient ici à ce que la série

$$\Delta^\mu a_n-3\Delta^\mu a_{n+1}-(\Delta^\mu a_{n+1}-3\Delta^\mu a_{n+2})+(\Delta^\mu a_{n+2}-3\Delta^\mu a_{n+3})$$
$$-(\Delta^\mu a_{n+3}-3\Delta^\mu a_{n+4})+\text{etc.}$$

qui entre (11) dans l'expression de cette erreur, est aussi peu convergente que la proposée, et a, en conséquence (2), pour valeur très approchée, la quantité

$$\Delta^\mu a_n - 3\Delta^\mu a_{n+1} - \tfrac{1}{2}(\Delta^\mu a_{n+1} - 3\Delta^\mu a_{n+2}),$$

qui est précisément (10) la moyenne arithmétique des limites ci-dessus de l'erreur.

En substituant d'ailleurs, aux différences des divers ordres qui entrent dans la série dont il s'agit, les valeurs numériques qui leur appartiennent, on obtiendra, pour l'expression rigoureuse de l'erreur ou du complément de la valeur de S qui nous occupe,

$$\frac{1}{2^{\mu+2}}(\varepsilon_{n+1} - 2\varepsilon'_n) = 24\left(\frac{2}{9.11.13.15.17.19} - \frac{3}{11.13.15.17.19.21} + \frac{4}{13.15.17.19.21.23} - \frac{5}{15.17.19.21.23.25} + \text{etc.}\right);$$

série, en effet, très peu convergente, et qu'on pourrait, à son tour, traiter comme la proposée, mais qu'il nous suffit ici d'avoir signalée.

En appliquant sa méthode au cas qui nous occupe, Euler (*) est parvenu à la transformée indéfinie

$$S = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1.2}{3.5} + \frac{1.2.3}{3.5.7} + \frac{1.2.3.4}{3.5.7.9} + \text{etc.}\right),$$

qui est donnée par la formule (*i*) appliquée au premier terme de la série proposée, et dont il faudrait calculer au moins les quatorze premiers termes pour obtenir un

(*) *Institutiones calculi differentialis*, page 237. —*Traité de Calcul différentiel et intégral* de M. Lacroix, tome III, page 349.

degré d'approximation égal à celui que comporte la valeur 0,785924 trouvée en dernier lieu.

21. On arrive à des résultats analogues en considérant la série

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} \ldots \pm \frac{1}{n+1} \mp \frac{1}{n+2} \pm \frac{1}{n+3} \mp \text{etc.},$$

qui représente le logarithme népérien de 2, et à laquelle Euler a également appliqué sa formule de transformation aux endroits cités. On trouve, en effet,

$$\frac{\Delta^{\mu} a_n}{\Delta^{\mu} a_{n+1}} = \frac{n+\mu+2}{n+1} = 1 + \frac{\mu+1}{n+1},$$

rapport qui converge sans cesse vers l'unité à mesure que n augmente, et qui devient précisément égal à 3 quand on a

$$\mu = 2n + 1.$$

Prenant, par exemple,

$$n=2, \text{ ou } s_n = 1 - \tfrac{1}{2}, \; a_n = \tfrac{1}{3}, \; a_{n+1} = \tfrac{1}{4}, \; a_{n+2} = \tfrac{1}{5}, \; a_{n+3} = \tfrac{1}{6}, \text{ etc.},$$

il viendra $\mu = 5$, et, par la sixième des formules (l') du n° 17,

$$S = s_n + \tfrac{1}{256}(255a_n - 246a_{n+1} + 213a_{n+2} - 148a_{n+3} + 73a_{n+4} - 22a_{n+5} + 3a_{n+6}) = 0{,}69314546,$$

valeur exacte à moins de 0,000002, et qu'on n'obtiendrait, par le procédé direct, qu'en calculant au-delà des 588000 premiers termes de la série proposée.

22. Soit enfin la série

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1.3}{2.4} - \frac{1.3.5}{2.4.6} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} \ldots\ldots \pm \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n} \mp \frac{1.3.5\ldots(2n-1)(2n+1)}{2.4.6\ldots 2n(2n+2)} \pm \text{etc.},$$

qui représente, comme on sait, le développement de $(1+1)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{2}=0{,}7071067$. En posant, pour abréger

$$\frac{1.3.5.\ldots.(2n-1)}{2.4.6.\ldots.2n}=k,$$

on trouvera, sans difficultés,

$$\Delta^{\mu}a_n=k\frac{1.3.5.\ldots.(2\mu-1)}{(2n+2)(2n+4)(2n+6).\ldots.(2n+2\mu)},$$
$$\Delta^{\mu}a_{n+1}=k\frac{1.3.5.\ldots.(2\mu-1)(2\mu+1)}{(2n+2)(2n+4)(2n+6).\ldots.(2n+2\mu)(2n+2\mu+2)},$$

et, par suite (11),

$$\zeta=\frac{\Delta^{\mu}a_n}{\Delta^{\mu}a_{n+1}}=\frac{2n+2\mu+2}{2n+1}.$$

Ce rapport devient égal à 3 (12), quand

$$2n+2\mu+2-3(2n+1)=0, \quad \text{ou} \quad 2\mu-4n-1=0;$$

ce qui ne peut avoir lieu rigoureusement pour aucun des termes ni pour aucune des différences concernant la série proposée.

Supposant, par exemple,

$$n=1, \text{ ou } s_n=1, \quad a_n=\frac{1}{2}, \quad a_{n+1}=\frac{1.3}{2.4}, \quad a_{n+2}=\frac{1.3.5}{2.4.6},\ldots.$$

elle donnera $\mu=2+\frac{1}{2}$. Or, en prenant $\mu=2$, on trouve $2\mu-4n-1<0$, et par conséquent $\Delta^{\mu}a_n<3\Delta^{\mu}a_{n+1}$ de $n=1$ à $n=\infty$, tandis que, si l'on fait $\mu=3$, on obtient $\Delta^{\mu}a_n>3\Delta^{\mu}a_{n+1}$ pour $n=1$, puis $\Delta^{\mu}a_n<3\Delta^{\mu}a_{n+1}$ depuis $n=2$ jusqu'à $n=\infty$; ce qui prouve évidemment (13) qu'on

doit ici s'arrêter aux transformées du troisième ordre, et se servir de celle des formules (l') qui s'y rapporte.

On trouvera ainsi, en se rappelant que $s_n = 1$, $a_n = \frac{1}{2}$, etc.,

$$S = s_n - \tfrac{1}{32}(31a_n - 25a_{n+1} + 13a_{n+2} - 3a_{n+3}) = 0,70728,$$

valeur trop forte, et qui ne diffère pas de 0,0002 de la véritable, comme il serait aisé de le constater, *à priori*, en calculant les limites de l'erreur avec un degré d'approximation convenable.

Ce calcul ne laissant pas que d'être pénible, dans le cas actuel, où la relation $\Delta^\mu a_n = 3\Delta^\mu a_{n+1}$ n'est point exactement satisfaite, il sera préférable de calculer, selon la remarque du n° 11, directement deux premières valeurs approchées de S, par les formules (i') et (k') des n°s 15 et 16, lesquelles deviennent ici, en ayant égard aux signes des termes, et attendu que $\mu = 2$,

$$S = s_n - \tfrac{1}{8}(7a_n - 4a_{n+1} + a_{n+2}) = 0,7109375,$$
$$S = s_n - a_n + \tfrac{1}{3}(7a_{n+1} - 4a_{n+2} + a_{n+3}) = 0,7060547;$$

valeurs dont la première est trop forte et la seconde trop faible, d'après la remarque du n° 16, et si l'on observe qu'ici les signes des termes sont changés.

Prenant la moyenne arithmétique entre ces nombres, laquelle répond à la formule (k), on obtiendra la nouvelle valeur

$$S = 0,7084961,$$

qui serait immédiatement donnée par la formule (m) ou son équivalente m' (n° 17); cette valeur est donc, à son tour, trop forte, et par conséquent la véritable se trouve comprise entre elle et la plus petite des précédentes 0,7060547, dont elle ne diffère que par la troi-

sième décimale. Prenant, en conséquence, la moyenne de ces dernières valeurs, on obtiendra finalement le nombre 0,7072754 qui s'accorde avec celui qui a été obtenu directement ci-dessus, au moyen de la quatrième des formules (l').

D'ailleurs la marche précédente n'est guère plus laborieuse, et elle apprend que le nombre dont il s'agit ne saurait différer du véritable, d'une quantité qui surpasse la moitié 0,00122, de la différence de ceux 0,7084961, 0,7060547 dont il provient.

Transformation des mêmes séries dans le cas où le rapport numérique de chaque terme au suivant, converge vers un nombre plus grand que l'unité.

23. Les séries qui nous ont jusqu'ici occupés sont censées fort peu convergentes, de sorte que leurs termes consécutifs tendent sans cesse vers l'égalité, aussi bien que ceux des suites formées par leurs différences des divers ordres; s'il en était autrement et notamment si la discussion du n° 13 avait appris que, dans un certain ordre μ de différences, on a

$$\Delta^\mu a_n > 3\Delta^\mu a_{n+1}, \quad \text{ou seulement} \quad \Delta^\mu a_n > 2\Delta^\mu a_{n+1},$$

pour toutes les valeurs de n supérieures au nombre n qui marque le rang du terme auquel on veut appliquer la transformation, il faudrait s'arrêter à la formule (i) qui se rapporte à cet ordre, et calculer directement la valeur de la série ς_n (8) qui entre dans l'expression du reste de cette formule, en modifiant le procédé qui précède ainsi qu'il suit.

Sachant, par exemple, que dans la série

$$S = s_n + a_n - a_{n+1} + a_{n+2} - a_{n+3} + a_{n+4} - \text{etc.},$$

chacun des termes qui suivent a_n est au moins i fois le précédent, le nombre i étant égal ou supérieur à 2, on la multipliera par i, ce qui donnera l'expression de iS; ajoutant ensuite cette expression à celle de S, et divisant par $1 + i$, on mettra le résultat sous cette forme

$$S = s_n + \frac{1}{1+i}\, a_n + \frac{1}{1+i}\,[(a_n - ia_{n+1}) - (a_{n+1} - ia_{n+2}) + (a_{n+2} - ia_{n+3}) - \text{etc.})].$$

Le nombre i, qui entre dans cette transformée évidemment identique avec la série proposée, doit être choisi le plus grand qu'il est possible, sans néanmoins qu'aucune des quantités ou différences $a_n - ia_{n+1}$, $a_{n+1} - ia_{n+2}$, $a_{n+2} - ia_{n+3}$, ... puisse devenir négative; condition à laquelle on satisfera évidemment en prenant, pour ce nombre, la plus petite des valeurs du rapport de chacun des termes de la série proposée au suivant, en allant de a_n vers l'infini.

En représentant encore ici les différences, dont il s'agit, par $\Delta_i a_n$, $\Delta_i a_{n+1}$, $\Delta_i a_{n+2}$...., l'indice i, affecté à la caractéristique Δ, servant à rappeler que ce ne sont pas simplement les différences des termes consécutifs de la suite a_n, a_{n+1}, a_{n+2}...., qu'il s'agit de prendre, mais bien celles de chaque terme à i fois le suivant, la relation ci-dessus deviendra

$$S = s_n + \frac{i}{1+i}\, a_n + \frac{1}{1+i}\,(\Delta_i a_n - \Delta_i a_{n+1} + \Delta_i a_{n+2} - \Delta_i a_{n+3} + \text{etc.}).$$

Si les différences qui entrent dans la parenthèse de cette

transformée sont décroissantes, ce qui exige qu'on ait, depuis $n = n$ jusqu'à n infini,

$$\frac{\Delta_i a_n}{\Delta_i a_{n+1}}, \quad \text{c'est-à-dire,} \quad \frac{a_n - i a_{n+1}}{a_{n+1} - i a_{n+2}} > 1,$$

et par conséquent

$$i < \frac{a_n - a_{n+1}}{a_{n+1} - a_{n+2}} = \frac{\Delta a_n}{\Delta a_{n+2}};$$

l'erreur qu'on risquera de commettre, en prenant

$$S = s_n + \frac{i}{1+i} a_n, \quad \text{sera} \quad < \frac{1}{1+i} \Delta_i a_n = \frac{1}{1+i} (a_n - i a_{n+1});$$

mais, pour qu'elle soit moindre que celle qui se rapporte à la valeur $S = s_n + a_n$, il faudra qu'on ait (1), tout au moins,

$$\frac{1}{1+i} \Delta_i a_n < a_{n+1}, \quad \text{ou} \quad a_n < (1+2i) a_{n+1}.$$

Cela étant, on pourra procéder à la recherche d'une valeur plus approchée encore de S, en traitant la série entre parenthèses comme nous l'avons fait de la proposée, et ainsi de suite en débarrassant à chaque fois, s'il y a lieu, cette série des facteurs qui pourraient compliquer inutilement ses termes.

24. Cet exposé suffit pour montrer la marche à suivre dans le cas qui nous occupe, et, au lieu de continuer à raisonner dans l'hypothèse la plus générale, nous considérerons, en particulier, les séries de la forme

$$S = s_n + a_n z^n - a_{n+1} z^{n+1} + a_{n+2} z^{n+2} - a_{n+3} z^{n+3} + a_{n+4} z^{n+4} - \text{etc.},$$

qui sont celles qui se présentent le plus fréquemment dans les applications, et nous supposerons que, la variable z étant inférieure ou tout au plus égale à l'unité, les coefficiens numériques a_n, a_{n+1}, a_{n+2},.... et leurs différences des divers ordres forment des suites naturellement décroissantes, mais d'une manière fort peu rapide; cas qui intéresse spécialement les applications.

On pourra d'ailleurs toujours préparer la série proposée et celles qui dépendent de ces différences, de manière que cela ait lieu dans chaque ordre de transformées.

Supposant, par exemple, les coefficiens a_n, a_{n+1}, a_{n+2},... tels que chacun d'eux soit au moins i fois celui qui le suit immédiatement, on mettrait la série proposée sous cette forme

$$S = s_n + z^n\left(a_n - ia_{n+1}\frac{z}{i} + i^2a_{n+2}\frac{z^2}{i^2} - i^3a_{n+3}\frac{z^3}{i^3} + i^4a_{n+4}\frac{z^4}{i^4} - \text{etc.}\right);$$

ce qui en ramenerait le calcul à celui d'une autre série dont les coefficiens des termes consécutifs tendraient vers l'égalité à mesure qu'on s'éloignerait du premier. Mais, comme l'introduction explicite des facteurs i, dans les séries de différences relatives aux transformées successives, compliquerait beaucoup les résultats, et qu'il serait impossible d'en rien conclure de général, nous admettrons qu'ils surpassent tous, du moins à partir du 1er ordre, assez peu l'unité pour qu'il devienne inutile de les prendre en considération, d'autant plus que, s'ils étaient très grands, les séries qui leur correspondent deviendraient tellement convergentes qu'on serait dispensé de pousser plus loin les transformations.

25. Considérant donc la série

$$\text{(A)}\quad S = s_1 + a_1z - a_2z^2 + a_3z^3 - a_4z^4 + a_5z^5 - \text{etc.},$$

supposée très peu convergente pour le cas de $z = 1$, on prendra $i = \frac{1}{z}$; ce qui donnera la transformée du premier ordre

$$(B)\quad S = s_1 + \frac{z}{1+z}\,a_1 + \frac{z}{1+z}\,(\Delta a_1 z - \Delta a_2 z^2 + \Delta a_3 z^3 - \Delta a_4 z^4 + \text{etc.}),$$

attendu (23) qu'on a, en général,

$$\Delta_i a_n z^n = a_n z^n - \frac{1}{z}\,a_{n+1} z^{n+1} = \Delta a_n z^n.$$

Faisant passer en dehors de la parenthèse, le terme en Δa_1, multipliant tous les termes par $\frac{1}{z}$, ajoutant la nouvelle équation, membre à membre, à la première, et divisant par $1 + \frac{1}{z}$ (*), on aura, pour transformée du second ordre,

$$(C)\quad S = s_1 + \frac{z}{1+z}\,a_1 + \frac{z^2}{(1-z)^2}\,\Delta a_1 + \frac{z^2}{(1+z)^2}\,(\Delta^2 a_1 z - \Delta^2 a_2 z^2 + \Delta^2 a_3 z^3 - \Delta^2 a_4 z^4 + \text{etc.}).$$

Continuant ainsi, de proche en proche, on obtiendra, en général, pour la transformée de l'ordre μ,

$$(D)\quad \begin{cases} S = s_1 + \dfrac{z}{1+z}\,a_1 + \dfrac{z^2}{(1+z)^2}\,\Delta^2 a_1 + \dfrac{z^3}{(1+z)^3}\,\Delta^3 a_1 \ldots \\ \quad \ldots + \dfrac{z^\mu}{(1+z)^\mu}\,\Delta^{\mu-1} a_1 + \dfrac{z^\mu}{(1+z)^\mu}\,(\Delta^\mu a_1 z - \Delta^\mu a_2 z^2 + \Delta^\mu a_3 z^3 - \text{etc.}), \end{cases}$$

dont la loi est manifeste.

Supposant d'ailleurs que la série, entre parenthèses, soit

(*) Ou, ce qui est plus simple et revient au même : multipliant par z, ajoutant, puis divisant le résultat par $1 + z$.

convergente, on aura

$$(E)\quad \begin{cases} S = s_1 + \dfrac{z}{1+z}a_1 + \dfrac{z^2}{(1+z)^2}\Delta a_1 + \dfrac{z^3}{(1+z)^3}\Delta^2 a_1 \ldots \\ \quad \ldots + \dfrac{z^\mu}{(1+z)^\mu}\Delta^{\mu-1}a_1 = S', \text{ à moins de } \dfrac{z^{\mu+1}}{(1+z)^\mu}\Delta^\mu a_1. \end{cases}$$

Cette dernière série S′, poussée à l'infini, est celle qu'Euler a obtenue à la page 7, tome 1, de ses *Institutiones calculi differentialis*, sans faire connaître toutefois l'expression du reste ni la limite de l'erreur commise, quand on l'arrête à un terme quelconque.

26. Si l'on fait passer en dehors de la parenthèse de la transformée ci-dessus, le terme en $\Delta^\mu a_1$, elle deviendra

$$(F)\quad \begin{cases} S = s_1 + \dfrac{z}{1+z}a_1 + \dfrac{z^2}{(1+z)^2}\Delta a_1 \ldots \\ \quad \ldots + \dfrac{z^\mu}{(1+z)^\mu}\Delta^{\mu-1}a_1 + \dfrac{z^{\mu+1}}{(1+z)^\mu}\Delta^\mu a_1 - \dfrac{z^\mu}{(1+z)^\mu}(\Delta^\mu a_2 z^2 - \Delta^\mu a_3 z^3 + \Delta^\mu a_4 z^4 - \text{etc.}); \end{cases}$$

nouvelle relation qui, d'après ce que nous avons vu (4 et 7) pour le cas de $z = 1$, revient précisément à celle qu'on obtiendrait en faisant commencer la transformation au terme suivant $a_2 z^2$ de la série proposée, ce qui donnerait

$$S = s_1 + a_1 z - \frac{z^2}{1+z}a_2 - \frac{z^3}{(1+z)^2}\Delta a_2 \ldots$$
$$\ldots - \frac{z^{\mu+1}}{(1+z)^\mu}\Delta^{\mu-1}a_2 - \frac{z^\mu}{(1+z)^\mu}(\Delta^\mu a_2 z^2 - \Delta^\mu a_3 z^3 + \Delta^\mu a_4 z^4 - \text{etc.}),$$

ou

$$a_1 + a_2 z - \frac{z^2}{1+z}a_2 - \frac{z^3}{(1+z)^2}\Delta a_2 \ldots - \frac{z^{\mu+1}}{(1+z)^\mu}\Delta^{\mu-1}a_2 = S' + \frac{z^{\mu+1}}{(1+z)^\mu}\Delta^\mu a_1.$$

On aura donc aussi, puisque la série entre parenthèses est supposée convergente,

$$(G)\quad S=S'+\frac{z^{\mu+1}}{(1+z)_{\mu}}\Delta^{\mu}a_{1}=S'',\ \text{à moins de}\ \frac{z^{\mu+2}}{(1+z)^{\mu}}\Delta^{\mu}a_{2},$$

degré d'approximation qui est supérieur à celui que comporte S'; mais on voit que, tandis que cette dernière valeur est trop faible, la précédente est trop forte, de sorte que la véritable limite S de la série proposée est comprise entre elles.

Passant maintenant à l'ordre suivant $\mu+1$, ou, ce qui est la même chose, multipliant la seconde (F) des transformées ci-dessus, par $\frac{1}{z}$, l'ajoutant, terme à terme, à la précédente (D), puis divisant le résultat par $1+\frac{1}{z}$, on aura

$$(H)\quad\begin{cases} S=s_{1}+\dfrac{z}{1+z}a_{1}+\dfrac{z^{2}}{(1+z)^{2}}\Delta a_{1}+\ldots. \\ \quad\ldots+\dfrac{z^{\mu}}{(1+z)^{\mu}}\Delta^{\mu-1}a_{1}+\dfrac{z^{\mu+1}}{(1+z)^{\mu+1}}\Delta^{\mu}a_{1}+\dfrac{z^{\mu+1}}{(1+z)^{\mu+1}}\left(\Delta^{\mu+1}a_{1}z-\Delta^{\mu+1}a_{2}z^{2}+\Delta^{\mu+1}a_{3}z^{3}-\text{etc.}\right); \end{cases}$$

et par conséquent, en supposant toujours la série entre parenthèses convergente,

$$(I)\quad S=S'+\frac{z^{\mu+1}}{(1+z)^{\mu+1}}\Delta^{\mu}a_{1}=S'',\quad\text{à moins de}\quad\frac{z^{\mu+2}}{(1+z)^{\mu+1}}\Delta^{\mu+1}a_{1}.$$

27. Cette dernière limite sera généralement plus petite que celle qui se rapporte à S' ou (E); mais, pour qu'elle le soit davantage que la limite de S'' ou (G), et qu'il y ait par conséquent motif de préférer la valeur

de S''' à celle de S'', on devra avoir, tout au moins,

$$\frac{z^{\mu+2}}{(1+z)^{\mu}+1}\Delta^{\mu+1}a_1 < \frac{z^{\mu+2}}{(1+z)^{\mu}}\Delta^{\mu}a_2, \text{ ou } \Delta^{\mu+1}a_1 < (1+z)\Delta^{\mu}a_2,$$

c'est-à-dire,

$$\Delta^{\mu}a_1 < (2+z)a_2,$$

et, tout au plus,

$$\frac{z^{\mu+2}}{(1+z)^{\mu+1}}\Delta^{\mu+1}a_1 < \frac{z^{\mu+2}}{(1+z)^{\mu}}(\Delta^{\mu}a_2 - \Delta^{\mu}a_3 z), \text{ ou } \Delta^{\mu+1}a_1 < (1+z)(\Delta^{\mu}a_2 - \Delta^{\mu}a_3 z).$$

La même condition devra d'ailleurs être satisfaite dans tous les ordres inférieurs à μ, pour pouvoir affirmer, d'une manière absolue, que le résultat a le degré d'approximation que comporte le nombre des termes de la série proposée qui y entrent. On s'arrêtera donc à l'ordre μ pour lequel $\Delta^{\mu}a_1$ égale ou surpasse, le moins qu'il est possible, la quantité $(2+z)\Delta^{\mu}a_2$; et, attendu que les complémens ou erreurs relatives à S'' et S''' sont de signes contraires, et ne peuvent elles-mêmes alors différer que très peu entre elles, on pourra prendre pour nouvelle valeur approchée de la série (A), celle que donne la moyenne arithmétique entre S'' et S''', dont l'erreur, comme nous l'avons vu (9), pour le cas particulier de $z = 1$, devra aussi être très près de zéro.

On aura donc

$$\text{(K)} \quad S = \frac{S'' + S'''}{2} = S' + \Delta^{\mu}a_1 \frac{(2+z)}{2} \frac{z^{\mu+1}}{(1+z)^{\mu+1}} = S^{IV};$$

expression à laquelle correspond l'erreur

$$+\frac{z^{\mu+2}}{2(1+z)^{\mu+1}}[\Delta^{\mu+1}a_1 - \Delta^{\mu+1}a_2 z + \Delta^{\mu+1}a_3 z^2 - \text{etc.} - (1+z)\Delta^{\mu}a_2 + (1+z)z\Delta^{\mu}a_3 - (1+z)z^2\Delta^{\mu}a_4 + \text{etc.}],$$

ou

$$+\frac{z^{\mu+2}}{2(1+z)^{\mu+1}}\{\Delta^\mu a_1-(2+z)\Delta^\mu a_2-[\Delta^\mu a_2-(2+z)\Delta^\mu a_3]z+[\Delta^\mu a_3-(2+z)\Delta^\mu a_4]z^2-[\Delta^\mu a_4-(2+z)\Delta^\mu a_5]z^3+\text{etc.}\}.$$

Par conséquent, si, comme on le suppose, les différences qui entrent dans cette erreur sont décroissantes, et $z \leq 1$, cette même erreur sera (9 et 10)

$$<\frac{z^{\mu+2}}{2(1+z)^{\mu+1}}[\Delta^{\mu+1}a_1-(1+z)(\Delta^\mu a_2-\Delta^\mu a_3 z)]>\frac{z^{\mu+2}}{2(1+z)^{\mu+1}}[\Delta^\mu a_1-(2+z)\Delta^\mu a_2-\Delta^{\mu+1}a_2 z];$$

c'est-à-dire,

$$<\frac{z^{\mu+2}}{2(1+z)^{\mu+1}}[\Delta^\mu a_1-(2+z)\Delta^\mu a_2+(z+z^2)\Delta^\mu a_3]>\frac{z^{\mu+2}}{2(1+z)^{\mu+1}}[\Delta^\mu a_1-(2+z)\Delta^\mu a_2-\Delta^{\mu+1}a_2 z]\ (*).$$

28. Pour découvrir, *à priori*, l'ordre μ auquel on doit arrêter les transformations, on posera l'équation

$$\Delta^\mu a_1=(2+z)\Delta^\mu a_2, \text{ ou, plus généralement, } \Delta^\mu a_n=(2+z)\Delta^\mu a_{n+1},$$

dans laquelle il n'entrera que μ, z, n, et des nombres tout connus, et qu'il faudra discuter, dans chaque cas, de la

---

(*) La moyenne arithmétique de ces erreurs, ou l'erreur probable (19), a pour expression,

$$\frac{z^{\mu+1}}{2(1+z)^{\mu+1}}\left\{\Delta^\mu a_1-(2+z)\Delta^\mu a_2+\frac{1}{2}z[\Delta^\mu a_2-(2+z)\Delta^\mu a_3]\right\};$$

quantité qui exprime une valeur approchée (10 et 19) de l'erreur effective lorsque la série

$$\Delta^\mu a_1-(2+z)\Delta^\mu a_2-[\Delta^\mu a_2-(2+z)\Delta^\mu a_3]z+[\Delta^\mu a_3-(2+z)\Delta^\mu a_4]z^2-\text{etc.},$$

est, du moins à partir de son second terme, de même nature que la proposée et convergente.

même manière que nous l'avons indiqué, en général, aux n^os 12 et 13, et, en particulier, aux n^os 18 et suivans, dans la supposition de $z = 1$.

Considérant, par exemple, la série

$$\text{arc tang } x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \cdots \pm \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \mp \frac{x^{2n+3}}{2n+3} \pm \text{etc.};$$

on la ramenera à la forme de la précédente, en posant

$$\frac{\text{arc tang } x}{x} = S = 1 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{5}x^4 - \frac{1}{7}x^6 \cdots \pm \frac{1}{2n+1}x^{2n} \mp \frac{1}{2n+3}x^{2n+2} \pm \frac{1}{2n+5}x^{2n+4} \mp \text{etc.},$$

et, par suite,

$$z = x^2, \quad s_1 = 1, \quad a_1 = -\frac{1}{3}, \quad a_2 = \frac{1}{5}, \quad a_3 = -\frac{1}{7}, \text{ etc.}$$

Attendu, d'ailleurs, qu'on a ici, en représentant par ζ le rapport de $\Delta^\mu a_n$ à $\Delta^\mu a_{n+1}$ (18),

$$\zeta = \frac{2\mu + 2n + 3}{2n + 1},$$

il en résultera l'équation

$$\frac{2\mu + 2n + 3}{2n + 1} = 2 + x^2,$$

pour déterminer μ quand x et n sont donnés *à priori*.

Supposant d'abord $n = 0$, ce qui revient à opérer la transformation sur le premier terme 1, de la série S, on obtiendra $\mu = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x^2$. Or cette relation prouve que, quel que soit x, pourvu qu'il ne surpasse pas l'unité, on doit se borner à opérer directement sur les termes de la série, sans recourir aux transformées.

Passant donc au second terme, pour lequel $n = 1$, on obtiendra

$$\mu = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}x^2;$$

et par conséquent, $\mu = 2$ quand $x^2 = 1$, $\mu = 1$ quand $x^2 = \frac{1}{3}$; ce qui annonce qu'on devra pousser les transformations jusqu'au second ordre, lorsque x^2 surpassera $\frac{1}{3}$, et jusqu'au premier seulement, lorsque x^2 sera plus petit que $\frac{1}{3}$, ou tout au plus égal à $\frac{1}{3}$.

Si l'on suppose, en effet, successivement $\mu = 0$, $\mu = 1$, $\mu = 2$, $\mu = 3$, dans l'expression de ζ, puis $n = 1$, on s'assurera aisément que

1°. Quand $x^2 < \frac{1}{3}$, on a $\zeta < 2 + x^2$ pour l'ordre $\mu = 0$, et $\zeta > 2 + x^2$ pour tous les ordres suivans;

2°. Quand $x^2 > \frac{1}{3} < 1$, on a $\zeta < 2 + x^2$ pour les ordres $\mu = 0$, $\mu = 1$, et $\zeta > 2 + x^2$ pour tous les suivans.

Et, comme $n = 1$ revient à supposer, abstraction faite des signes, $s_1 = 1$, $a_1 = \frac{1}{3}$, $a_2 = \frac{1}{5}$, $a_3 = \frac{1}{7}$, etc.,
ce qui donne

$$\Delta a_n = \Delta a_1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{3.5},\ \Delta a_2 = \frac{1}{5} - \frac{1}{7} = \frac{2}{5.7} \ldots \Delta^2 a_1 = \frac{2}{3.5} - \frac{2}{5.7} = \frac{2.4}{3.5.7},$$

$$\Delta^2 a_2 = \frac{2.4}{5.7.9} \ldots \Delta^3 a_1 = \frac{2.4.6}{3.5.7.9},\ \Delta^3 a_2 = \frac{2.4.6}{5.7.9.11} \ldots.$$

on aura (25 et 27):
Pour $x^2 < \frac{1}{3}$, en observant que $\mu = 1$, $z = x^2$ et ayant

égard au changement des signes de a_1, a_2, a_3, etc.,

$$S'=1-\frac{1}{3}\frac{x^2}{1+x^2},\quad S^{IV}=S'-\frac{1}{3.5}\frac{(2+x^2)}{(1+x^2)^2}x^4=1-\frac{1}{3}\frac{x^2}{1+x^2}-\frac{1}{3.5}\frac{(2+x^2)}{(1+x^2)^2}x^4;$$

de sorte qu'en prenant $S=S^{IV}$, l'erreur sera (27)

$$<\frac{(3-4x^2+5x^4)}{(1+x^2)^3}\frac{x^6}{5.7.9}>\frac{(3-13x^2)}{(1+x^2)^3}\frac{x^6}{5.7.9}.$$

Pour $x^2>\frac{1}{3}$, on trouvera pareillement, attendu que $\mu=2$,

$$S'=1-\frac{1}{3}\frac{x^2}{1+x^2}-\frac{2}{3.5}\frac{x^4}{(1+x^2)^2},$$

$$S^{IV}=S'-\frac{4}{3.5.7}\frac{(2+x^2)}{(1+x^2)^3}x^6=1-\frac{1}{3}\frac{x^2}{(1+x^2)}-\frac{1}{3.5}\frac{x^4}{(1+x^2)^2}-\frac{4}{3.5.7}\frac{(2+x^2)}{(1+x^2)^3}x^6;$$

l'erreur relative à cette dernière expression étant

$$<\frac{(11-6x^2+5x^4)}{(1+x^2)^3}\frac{4x^8}{5.7.9.11}>\frac{(11-17x^2)}{(1+x^2)^3}\frac{4x^8}{5.7.9.11}.$$

La valeur approchée de S étant ainsi trouvée pour l'étendue des valeurs de x à considérer, il ne s'agira plus que de la multiplier par x pour obtenir celle de arc tang x.

29. En terminant ce qui concerne les séries convergentes dont les termes sont alternativement positifs et négatifs, nous devons présenter quelques remarques essentielles.

1°. Les considérations exposées en dernier lieu, s'appliquent aussi bien aux séries descendantes qu'aux séries ascendantes, et ne supposent pas essentiellement que les puissances de la variable soient rationnelles et entières, mais seulement que leur rapport, en passant d'un terme quelconque au suivant, soit constant; or, c'est ce qui est

évident *à priori*, puisqu'on peut toujours supposer que ce rapport ou la variable z, soit une fonction quelconque d'une autre variable indépendante.

30. 2°. Les mêmes considérations et toutes celles qui précèdent n'exigent pas essentiellement que les coefficiens de la série proposée et leurs différences des divers ordres soient décroissans dans toute l'étendue de cette série, mais seulement que cette même série et celles qui constituent les restes ou complémens des diverses transformées, aient une limite ou soient convergentes ; ce qui exige simplement que leurs termes aillent sans cesse (1) en diminuant, à partir d'un certain d'entre eux; du moins ne doit-on appliquer les conséquences qui se rapportent à la limite des erreurs commises, quand on néglige les restes ou complémens dont il s'agit, qu'à la partie convergente des séries formées par ces restes; ce qui suppose qu'on fasse sortir dans chaque cas, au dehors des parenthèses qui les renferment, tous les termes divergens ou croissans, pour les réunir à la partie qui doit donner la valeur approchée de la somme ou de la limite S, qu'il s'agit d'obtenir.

Soit, pour exemple, la série

$$(1+x)^{-\frac{5}{2}}=1-\frac{5}{2}x+\frac{5.7}{2.4}x^2-\frac{5.7.9}{2.4.6}x^3+\frac{5.7.9.11}{2.4.6.8}x^4-\frac{5.7.9.11.13}{2.4.6.8.10}x^5+\text{etc.},$$

dont les coefficiens numériques vont constamment en augmentant, et qui est convergente tant que x demeure au-dessous de l'unité, mais dont les premiers termes commencent par diverger lorsque x surpasse $\frac{2}{5}$, et ne redeviennent décroissans qu'à partir du terme pour lequel on a $n>\frac{3'x}{2(1-x)}$ ou $x<\frac{2n}{2n+3}$, n désignant le rang de ce

terme, qui en a $n-1$ avant lui, et $\frac{2n}{2n+3}$ exprimant le rapport de ce même terme au suivant. On formera, sans difficultés, ce tableau des différences des coefficiens de la série dont il s'agit, pris toujours dans l'ordre inverse,

Ordre	1er	2e	3e	4e	5e	6e.. termes des différences.
Δ^0..	....1....	$\frac{5}{2}$.....	$\frac{5.7}{2.4}$.....	$\frac{5.7.9}{2.4.6}$.....	$\frac{5.7.9.11}{2.4.6.8}$.....	$\frac{5.7.9.11.13}{2.4.6.8.10}$.....
Δ^1..	$-\frac{3}{2}$,	$-\frac{3.5}{2.4}$,	$-\frac{3\,5.7}{2.4.6}$,	$-\frac{3\,5.7.9}{2.4.6.8}$,	$-\frac{3\,5.7.9.11}{2.4.6.8.10}$, ...	
Δ^2..	$\frac{3.1}{2.4}$,	$\frac{3.1\,5}{2.4.6}$,	$\frac{3.1\,5.7}{2.4.6.8}$,	$\frac{3.1\,5.7.9}{2.4.6.8.10}$, ...		
Δ^3..	$\frac{3.1.1}{2.4.6}$,	$\frac{3.1.1\,5}{2.4.6.8}$,	$\frac{3.1.1\,5.7}{2.4.6.8.10}$, ...			
Δ^4..	$\frac{3.1.1.3}{2.4.6.8}$,	$\frac{3.1.1.3\,5}{2.4.6.8.10}$, ...				
Δ^5..	$\frac{3\,1.1.3.5}{2\,4.6.8.10}$, ...					

La loi de ces différences est facile à saisir, et l'on voit que leurs valeurs absolues sont constamment décroissantes à partir du second ordre, soit qu'il s'agisse des différences, des divers ordres, relatives à un même terme ou qui appartiennent à une même colonne verticale, soit que l'on considère celles qui, rangées sur une même ligne horizontale, appartiennent au même ordre et aux coefficiens successifs.

D'après cela, si l'on suppose, dans la série (A) du n° 25,

$$s_1=1,\ a_1=-\frac{5}{2},\ a_2=-\frac{5.7}{2.4},\ a_3=-\frac{5.7.9}{2.4.6},\ \text{etc.},\ z=x;$$

on trouvera, pour les transformées simples du premier et du second ordre de la série proposée,

$$S=1-\frac{5}{2}\frac{x}{1+x}+\frac{x}{1+x}\left(\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}\frac{5}{4}x^2+\frac{3}{2}\frac{5.7}{4.6}x^3-\frac{3}{2}\frac{5.7.9}{4.6.8}x^4+\frac{3}{2}\frac{5.7.9.11}{4.6.8.10}x^5-\text{etc.}\right),$$

$$S=1-\frac{5}{2}\frac{x}{1+x}+\frac{3}{2}\frac{x^2}{(1+x)^2}-\frac{x^2}{(1+x)^2}\left(\frac{3.1}{2.4}x-\frac{3.1}{2.4}\frac{5}{6}x^2+\frac{3.1}{2.4}\frac{5.7}{6.8}x^3-\frac{3.1}{2.4}\frac{5.7.9}{6.8.10}x^4+\text{etc.}\right).$$

La série entre parenthèses, contenue dans la dernière de ces transformées, ne devenant divergente que lorsque x surpasse l'unité, et restant convergente dans le cas contraire, pour toute l'étendue de ses termes, on aura encore ici (26),

$$S=1-\frac{5}{2}\frac{x}{1+x}+\frac{3}{2}\frac{x^2}{(1+x)^2}, \quad \text{à moins de} \quad \frac{3}{8}\frac{x^3}{(1+x)^2},$$

et sous la seule réserve que x ne surpasse pas l'unité. La même chose ayant lieu pour toutes les transformées des ordres supérieurs au deuxième, on voit que ce qui a été dit aux n^{os} 26 et 27, leur est immédiatement applicable.

Quant à celle du premier ordre, la série, entre parenthèses, qu'elle renferme, étant du même genre que la proposée, c'est-à-dire convergente pour toutes les valeurs de x moindres que l'unité, quoique susceptible de diverger dans ses premiers termes quand x surpasse $\frac{4}{5}$, on devra lui appliquer les remarques qui précèdent relativement à la valeur approchée de S, qu'on en peut déduire.

Supposant, par exemple, $x=0{,}82$, il arrivera que les termes de cette série iront en croissant jusqu'à celui qui contient x^3; on prendra donc approximativement

$$S=1-\frac{5}{2}\frac{x}{(1+x)}+\frac{3}{2}\frac{x^2}{(1+x)}-\frac{3}{2}\frac{5}{4}\frac{x^3}{(1+x)},$$

à moins de

$$\frac{3}{2}\frac{5.7}{4.6}\frac{x^4}{(1+x)},$$

et non par $S=1-\frac{5}{2}\frac{x}{(1+x)}$ censé exact à $\frac{3}{2}\frac{5}{4}\frac{x^3}{(1+x)}$ près, etc.

31. 3°. Enfin, lorsque les valeurs de la variable, suivant les puissances de laquelle procède la série proposée, est donnée *à priori*, soit exactement, soit approximativement ou entre des limites assignées, il n'est point indispensable de recourir à l'expression analytique du terme général des coefficiens de cette série et de ses différences, comme on l'a fait aux n^es^ 18 à 23 et 28, pour établir la discussion (12 et 13) à l'aide de laquelle on peut reconnaître l'ordre auquel on doit arrêter les transformations et le terme dont on doit partir pour obtenir l'approximation la plus avantageuse qu'il est possible, eu égard au nombre des termes qui entrent dans chaque résultat. On peut, tout aussi bien, procéder, de proche en proche, par l'examen de la loi que suivent les premiers coefficiens de la série et leurs premières différences jusqu'à l'ordre auquel on doit s'arrêter, pourvu seulement qu'on soit en état de prononcer, par un moyen quelconque et suffisamment général, sur ce que devient ultérieurement cette loi, quand on suppose la série prolongée à l'infini, et notamment que les séries, qui constituent les restes de chacune des transformées auxquelles on s'arrête, sont convergentes ou constamment décroissantes à partir de leur premier terme.

Nous choisirons, pour exemple particulier, la série

$$S=\frac{1-\omega}{\omega}a_0+\frac{(1-\omega)}{1}a_2z''^2+\frac{(1-\omega^3)}{3}a_4z''^4+\frac{(1-\omega^5)}{5}a_6z''^6+\frac{(1-\omega^7)}{7}a_8z''^8+\text{etc.},$$

qui représente la valeur de l'intégrale elliptique

$$-z''\int_{z'}^{z''}\frac{\sqrt{1+b'^2z^2}}{\sqrt{1+z^2}}\frac{dz}{z^2},$$

et dans laquelle on a $\omega = \frac{z'}{z''} < 1$, $b' = \sin b < 1$; la loi des coefficiens numériques a_0, a_2, a_4...., étant d'ailleurs exprimée par la formule

$$a_{2n} = -\frac{p(p-1)\dots(p-n+1)}{1.2\dots n}(1-b'^{2n}) + \frac{p(p-1)\dots(p-n+2)}{1.2\dots(n-1)}\cdot\frac{p}{1}(1-b'^{2n-2})$$
$$-\frac{p(p-1)\dots(p-n+3)}{1.2\dots(n-3)}\cdot\frac{p(p+1)}{1.2}(1-b'^{2n-4})\dots\dots$$
$$\dots \mp \frac{p(p-1)}{1.2}\cdot\frac{p(p+1)\dots(p+n-3)}{1.2\dots(n-2)}(1-b'^4) \pm \frac{p}{1}\cdot\frac{p(p+1)\dots(p+n-2)}{1.2\dots(n-1)}(1-b'^2),$$

dans laquelle on a remplacé, pour plus de généralité, l'exposant $\frac{1}{2}$, des fonctions radicales ci-dessus, par la lettre p; ce qui fait que la série proposée peut servir à calculer, par approximation, des intégrales qui appartiennent à un ordre plus élevé que les transcendantes elliptiques, dans tous les cas où z'' et b' sont au-dessous de l'unité, z' représentant d'ailleurs la limite supérieure de l'intégrale.

Cette même série est une de celles que nous avons eu à considérer dans des recherches relatives au calcul du frottement dans la vis à filets triangulaires (*Lithographie du cours de mécanique appliquée aux machines de l'école d'artillerie et du génie*, 3e Sect., Note II[e]). Or, on peut démontrer généralement, par des considérations qui ne seraient pas ici à leur place, que, pourvu qu'on ait $p < 1$, $b' < 1$, 1°. les coefficiens a_0, a_2, a_4,... forment une suite dont les termes sont alternativement positifs et négatifs, à partir du premier dont la valeur est $+1$, et qui, pris abstraction faite du signe, vont constamment en diminuant à mesure que n augmente; 2°. la même

chose a lieu à l'égard des suites formées par les différences des divers ordres de ces mêmes coefficiens.

Il en résulte donc que la série dont il s'agit est constamment convergente tant que z'' ne surpasse pas l'unité; mais, comme les coefficiens a_0, a_2, a_4.... y décroissent d'une manière extrêmement lente toutes les fois que p n'est pas très petit, il arrive aussi que cette même série doit, quand z'' est très voisin de l'unité, devenir alors tellement peu convergente, qu'on soit obligé d'en calculer un grand nombre de termes pour obtenir la valeur qu'elle représente avec le degré d'approximation désiré.

Ce cas est précisément celui sur lequel nous sommes tombés, dans la *note* précitée, en supposant

$$p = \tfrac{1}{2}, \quad b'^2 = \tfrac{1}{2}, \quad \omega = \tfrac{1}{3} \text{ et } z'' = 1,$$

valeurs qui donnent

$$a_0 = 1, \quad a_2 = -0{,}25, \quad a_4 = 0{,}21875, \quad a_6 = -0{,}19531,$$
$$a_8 = 0{,}17725, \quad a_{10} = -0{,}162964, \quad a_{12} = 0{,}151565, \text{ etc.},$$

et, par suite,

$$S = 2 - 0{,}166667z''^2 + 0{,}070216z''^4 - 0{,}038901z''^6 + 0{,}025810z''^8 - 0{,}018107z''^{10} + 0{,}013786z''^{12} - \text{etc.};$$

série dans laquelle il faudrait, en outre, faire $z'' = 1$, mais que nous considérerons dans le cas où z'' aurait une valeur quelconque voisine de l'unité.

32. Cela posé, on remarquera que le premier terme, de cette série, surpassant le triple du coefficient 0,166667, il n'y a pas lieu de faire commencer la transformation à ce terme; et, comme on a, au contraire,....

$0,166667 < (2+z''^2)0,70216$, pour les second et troisième termes, dès que z''^2 surpasse 0,374 ou z'', 0,51, il y a avantage à opérer sur les termes en z''^2. Considérant donc les différences des divers ordres de ce terme et des suivans, on dressera ce tableau qu'il serait inutile de pousser plus loin pour l'objet qui nous occupe,

	2e	3e	4e	5e	6e	7e
Δ^0...	0,166667,	0,070216,	0,038901,	0,025310,	0,018107,	0,013779....
Δ^1...	0,070216 / 0,096451	0,038901 / 0,031315	0,025310 / 0,013591	0,018107 / 0,007203	0,013779 / 0,004328	
Δ^2...	0,031315 / 0,065136	0,013591 / 0,017724	0,007203 / 0,006388	0,004328 / 0,002875		
Δ^3...	0,017724 / 0,047412	0,006388 / 0,011336	0,002875 / 0,003513			

En consultant la ligne horizontale qui contient la suite des différences premières des coefficiens de la série proposée, on voit qu'on y a $0,096451 > 3 \times 0,031315$; ce qui prouve (27) que l'on doit arrêter au premier ordre, les transformations relatives au second terme $0,166667 z''^2$ de la série, si mieux on ne préfère passer au terme suivant. On supposera donc, dans les formules des n^os^ 26 et 27,

$$\mu = 1,\ s_1 = 2,\ a_1 = -0,166667,\ \Delta a_1 = -0,096451,\ \Delta a_2 = -0,031315, \ldots$$

et remplaçant, en même temps, z par z''^2, il viendra

$$S = S^{IV} = s_1 + a_1 \frac{z}{1+z} + \Delta a_1 \frac{(2+z)}{2} \frac{z^2}{(1+z)^2} = 2 - 0,166667 \frac{z''^2}{1+z''^2} - 0,096451 \frac{(2+z''^2)}{2} \frac{z''^4}{(1+z''^2)^2};$$

l'erreur absolue qu'on risque de commettre étant

$$< \frac{z''^6}{2(1+z''^2)^2} [0,096451 - 0,031315(2+z''^2) + 0,013591\ (z''^2 + z''^4)]$$

$$> \frac{z''^6}{2(1+z''^2)^2} [0,096451 - 0,031315(2+z''^2) - 0,017724\ z''^2].$$

Supposant, en particulier, $z'' = 1$, on trouvera $S = 1,8805$ avec une erreur absolue

$$< 0,003711 > - 0,003152,$$

c'est-à-dire moindre que 0,003711, si l'erreur vraie est positive; et moindre que 0,003152 si elle est négative; ce qui a lieu dans le cas actuel; mais, en réalité, l'erreur absolue est au-dessous de 0,001.

33. Si l'on veut obtenir une valeur plus approchée encore de S, il faudra passer à la seconde colonne verticale du tableau, qui contient les différences du coefficient 0,070216 du troisième terme de la série proposée, et descendre, dans cette colonne, jusqu'à ce qu'on arrive à une différence qui cesse d'être inférieure à $2+z''^2$ fois celles du même ordre de la colonne suivante, ou du quatrième terme de la série proposée; et cela pour toute l'étendue des valeurs particulières de z'', que l'on veut considérer. Par exemple, on trouvera que cela a lieu pour la différence première, dès qu'on a $0,031315 \gtreqless 0,013591\ (2+z''^2)$, ou $z''^2 \lesseqgtr 0,3041$; pour la différence deuxième, dès qu'on a $0,017724 \gtreqless 0,006388$, ou $z''^2 \lesseqgtr 0,7746$; pour la différence troisième, dès que z''^2 est plus petit que 1,12686; ce qui arrive toujours par hypothèse.

D'après cela on voit, qu'en particulier, si z''^2 doit demeurer compris entre 0,7746 et 1, ou z'' entre 0,88 et l'unité, on devra arrêter au troisième ordre les transformations relatives au terme $+ 0,070216 z''^4$, qui nous occupe. On fera donc (26 et 27)

$$\mu = 3, \quad S_1 = 2 - 0,166667 z''^2, \quad a_1 = 0,070216 z''^2, \quad \Delta a_1 = 0,031315 z''^2, \quad \Delta^2 a_1 = 0,017724 z''^2;$$

et enfin, $z = z''^2$; ce qui donne

$$S' = 2 - 0{,}166667z''^2 + 0{,}070216z''^2 \frac{z''^2}{1+z''^2} + 0{,}031315z''^2 \frac{z''^4}{(1+z''^2)^2} + 0{,}017724z''^2 \frac{z''^6}{(1+z''^2)^3},$$

$$S = S^{IV} = S' + 0{,}011336z''^2 \frac{(2+z''^2)}{2} \frac{z''^8}{(1+z^2)^4},$$

Quant aux limites de l'erreur, comme elles dépendent (27) de différences qui ne se trouvent pas inscrites au tableau, on pourra se dispenser (11) de les apprécier directement, en calculant séparément les valeurs de

$$S'' = S' + 0{,}011336z''^2 \frac{z''^8}{(1+z''^2)^4}, \quad S''' = S' + 0{,}011336z''^2 \frac{z''^8}{(1+z''^2)^4},$$

dont la demi-somme constitue la valeur de S^{IV}, et dont la demi-différence absolue

$$\pm \frac{S'' - S'''}{2} = 0{,}011336 \frac{z''^{12}}{(1+z''^2)^4},$$

est la limite supérieure de l'erreur commise, prise abstraction faite du signe.

Supposant, pour exemple, $z'' = 1$, on trouvera

$$S = S^{IV} = 1{,}879551, \text{ à moins de } \frac{1}{16}\, 0{,}011336 = 0{,}000708;$$

mais, dans la réalité, cette valeur de S est exacte jusqu'au quatrième chiffre décimal.

Transformation des séries dont les termes sont affectés du même signe ; recherche des limites de leurs restes.

34. Les considérations qui précèdent peuvent s'appliquer, avec les modifications convenables, au calcul nu-

mérique et à la transformation générale des séries dont tous les termes, à partir d'un certain d'entre eux, ont le même signe et décroissent indéfiniment (*) en allant vers l'infini, pourvu que le rapport de chaque terme au suivant, dans cette partie décroissante de la série, n'ait pas pour limite précisément l'unité, ou converge vers un nombre >1. Il ne s'agira, en effet, que de changer le signe du nombre i (23 et suiv.) ou des quantités $\frac{1}{z}$, $\frac{1}{x}$, qui le remplacent dans les différentes transformées, de même que ceux des termes ou des différences absolues, qui précédemment étaient affectés du signe —.

Ainsi, par exemple, ces conditions étant satisfaites dans la série

$$\text{(A)} \qquad S = s_1 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 + a_5 z^5 + \text{etc.};$$

elle donnera lieu à la transformée de l'ordre μ,

$$\text{(B)} \qquad S = s_1 + \frac{z}{1-z} a_1 - \frac{z^2}{(1-z)^2} \Delta a_1 + \frac{z^3}{(1-z)^3} \Delta^2 a_1 \ldots$$
$$\ldots \pm \frac{z^\mu}{(1-z)^\mu} \Delta^{\mu-1} a_1 \mp \frac{z^\mu}{(1-z)^\mu} (\Delta^\mu a_1 z + \Delta^\mu a_2 z^2 + \Delta^\mu a_3 z^3 + \text{etc.}),$$

qui, étant poussée à l'infini en négligeant la partie comprise entre parenthèses, conduit à cette nouvelle série

$$\text{(C)} \quad S = s_1 + a_1 \frac{z}{1-z} - \Delta a_1 \frac{z^2}{(1-z)^2} + \Delta^2 a_1 \frac{z^3}{(1-z)^3} - \Delta^3 a_1 \frac{z^4}{(1-z)^4} + \text{etc.},$$

(*) L'indétermination relative (1) au signe du dernier terme a_∞ de la série, n'ayant plus lieu, il serait facile d'en tenir compte dans les transformées successives; mais, comme il ne peut avoir une valeur finie sans qu'un nombre infini de ceux qui le précèdent n'aient, dans nos hypothèses, des valeurs encore plus grandes, il en résulte qu'alors la limite cherchée de la série proposée serait elle-même infinie; ce qui dispense de toute espèce de calculs.

conforme à celle qui a été proposée, par Euler, à la p. 228 de ses *Institutions du Calcul différentiel*, à cela près que les différences des coefficiens sont ici censées prises dans l'ordre inverse. Mais, ainsi que l'a fait observer le savant auteur du *Traité de Calcul différentiel et intégral*, déjà cité (*Voy.* T. III, p. 345 et 346), cette série n'est convergente, par elle-même, que dans un très petit nombre de cas, lorsque les différences Δa_1, $\Delta^2 a_1$,... ne décroissent pas très rapidement, et par conséquent, elle ne peut que rarement être substituée avec avantage à la proposée.

35. Pour montrer la marche par laquelle on peut arriver directement à ces résultats, et en même temps pour apprécier les limites des erreurs auxquelles ils donnent lieu quand on s'arrête à un ordre de différences quelconque, ce qui fera connaître en même temps les conditions sous lesquelles il est avantageux de substituer la transformée à la série proposée, nous considérerons, en général, la série indéfiniment décroissante

$$S = s_n + a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + a_{n+4} + \text{etc.};$$

et, nommant i un nombre plus grand que l'unité, tel que chaque terme soit au moins i fois le suivant pour toute l'étendue de la série qu'on se propose de soumettre à la transformation, on donnera à cette série la forme

$$S = s_n + \left(a'_n + \frac{1}{i} a'_{n+1} + \frac{1}{i^2} a'_{n+2} + \frac{1}{i^3} a'_{n+3} + \frac{1}{i^4} a'_{n+4} + \text{etc.}\right),$$

pour laquelle

$$a'_n = a_n, \quad a'_{n+1} = i a_{n+1}, \quad a'_{n+2} = i^2 a_{n+2}, \text{ etc.}$$

multipliant ensuite tous ses termes par i, on aura

$$Si = is_n + ia'_n + \left(a'_{n+1} + \frac{1}{i}a'_{n+2} + \frac{1}{i^2}a'_{n+3} + \frac{1}{i^3}a'_{n+4} + \text{etc.}\right);$$

retranchant enfin de la précédente, et divisant par $1 - i = -(i-1)$, il viendra la transformée du premier ordre

$$S = s_n + \frac{i}{i-1}a'_n - \frac{1}{i-1}\left(\Delta a'_n + \frac{1}{i}\Delta a'_{n+1} + \frac{1}{i^2}\Delta a'_{n+2} + \frac{1}{i^3}\Delta a'_{n+3} + \text{etc.}\right).$$

Passant en dehors de la parenthèse le terme $\Delta a'_n$, multipliant par i, retranchant ensuite le résultat de la précédente, puis divisant de nouveau par $1 - i$, on obtiendra la transformée du second ordre

$$S = s_n + \frac{1}{i-1}a'_n - \frac{i}{(i-1)^2}\Delta a'_n + \frac{1}{(i-1)^2}\left(\Delta^2 a'_n + \frac{1}{i}\Delta^2 a'_{n+1} + \frac{1}{i^2}\Delta^2 a'_{n+2} + \text{etc.}\right).$$

Continuant le même procédé, on arrivera successivement aux transformées des troisième, quatrième,.... ordres, et finalement, à la transformée de l'ordre général μ,

$$S = s_n + ia'_n\frac{1}{i-1} - i\Delta a'_n\frac{1}{(i-1)^2} + i\Delta^2 a'_n\frac{1}{(i-1)^3}\ldots$$
$$\ldots \pm i\Delta^{\mu-1}a'_n\frac{1}{(i-1)^\mu} \mp \frac{1}{(i-1)^\mu}\left(\Delta^\mu a'_n + \frac{1}{i}\Delta^\mu a'_{n+1} + \frac{1}{i^2}\Delta^\mu a'_{n+2} + \text{etc.}\right),$$

laquelle conduit évidemment au résultat énoncé plus haut, relativement à la série en z, pour laquelle on prendrait

$$i = \frac{1}{z}, \quad s_n = s_1, \quad a'_n = a_1 z, \quad a'_{n+1} = a_2 z, \quad a'_{n+2} = a_3 z \ldots.$$

36. Mais, ce qu'il importe de remarquer, c'est qu'en

mettant la transformée du premier ordre ci-dessus, sous la forme

$$S=s_n+\frac{i}{i-1}a'_n-\frac{1}{i-1}\left(a'_n-a'_{n+1}+\frac{1}{i}a'_{n+1}-\frac{1}{i}a'_{n+2}+\frac{1}{i^2}a'_{n+2}-\frac{1}{i^2}a'_{n+3}+\text{etc.}\right),$$

la série comprise dans la parenthèse, ou son équivalente

$$a_n - ia_{n+1} + a_{n+1} - ia_{n+2} + a_{n+2} - ia_{n+3} + a_{n+3} - \text{etc.},$$

est nécessairement convergente (1), puisque, par hypothèse, $i > 1$ est un nombre qui ne surpasse aucun des rapports $\frac{a_n}{a_{n+1}}, \frac{a_{n+1}}{a_{n+2}}, \frac{a_{1n+2}}{a_{n+3}}, \ldots$ censés eux-mêmes décroissans. Il en résulte, en effet, que la somme de cette série se trouve comprise (1) entre a_n et $a_n - ia_{n+1}$, ou a'_n et $a'_n - a'_{n+1} = \Delta a'_n$, de sorte qu'en prenant $S=s_n+\frac{i}{i-1}a'_n$, l'erreur absolue est $<\frac{1}{i-1}a'_n>\frac{1}{i-1}\Delta a'_n$.

Et comme, en faisant passer en dehors de la parenthèse le terme a'_n, la transformée qui nous occupe devient

$$S=s_n+a'_n+\frac{1}{i-1}\left(a'_{n+1}-\frac{1}{i}a'_{n+1}+\frac{1}{i}a'_{n+1}-\frac{1}{i^2}a'_{n+2}+\frac{1}{i^2}a'_{n+3}-\text{etc.}\right),$$

on voit également qu'en prenant

$$S = s_n + a'_n,$$

l'erreur absolue est

$$<\frac{1}{i-1}a'_{n+1}>\frac{1}{i-1}\left(a'_{n+1}-\frac{1}{i}a'_{n+1}\right)=\frac{1}{i}a'_{n+1},$$

résultat qui démontre, en général, que, dans une série

décroissante

$$S = s_n + a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \text{etc.},$$

et dont i serait la plus petite des valeurs du rapport de chaque terme au suivant, considéré depuis a_n jusqu'à a_∞, on a

$$S = s_n + a_n, \text{ avec une erreur absolue } < \frac{i}{i-1} a_{n+1} > a_{n+1};$$

ce qui démontre qu'une *pareille série aura toujours une somme finie, si ses termes allant constamment en diminuant, de façon à devenir nuls pour* $n = \infty$, *le nombre* i *surpasse l'unité d'une quantité qui soit elle-même finie.*

37. En particulier, si la série proposée est de la forme

$$S = s_1 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 \ldots + a_\mu z^\mu + a_{\mu+1} z^{\mu+1} \text{ etc.},$$

l'erreur commise, lorsqu'on s'arrête, dans le calcul, à un terme quelconque $a_\mu z^\mu$, est

$$< a_{\mu+1} \frac{k z^{\mu+1}}{k - z} > a_{\mu+1} z^{\mu+1},$$

en prenant ici $i = \frac{k}{z}$, et k étant la limite inférieure du rapport du coefficient a_x, d'un terme quelconque de rang x, au coefficient a_{x+1} du terme suivant, considéré depuis $x = \mu$ jusqu'à $x = \infty$.

Nous reviendrons bientôt sur cette expression des limites du reste des séries à termes décroissans et positifs; contentons-nous ici d'en conclure l'indice à l'aide duquel on peut reconnaître si la transformée (B) ou (C) du n° 24, supposée arrêtée à un terme quelconque, est susceptible

de donner un plus grand degré d'approximation que la proposée (A), supposée elle-même arrêtée au terme correspondant ou de même rang.

38. Recherchons, à cet effet, les limites du reste compris entre les grandes parenthèses de la transformée (B), afin de les comparer à celles qui viennent d'être trouvées, en dernier lieu, pour le reste de la série (A).

La série entre parenthèses, dont il s'agit, équivalant à la suivante

$$\Delta^{\mu-1}a_1z-\Delta^{\mu-1}a_2z+\Delta^{\mu-1}a_2z^2-\Delta^{\mu-1}a_3z^2+\Delta^{\mu-1}a_3z^3-\Delta^{\mu-1}a_4z^3+\text{etc.},$$

dont les termes sont nécessairement décroissans dès que les différences qui les multiplient le sont elles-mêmes, ce qui est l'hypothèse admise, et z étant d'ailleurs plus petit que l'unité, ou tout au plus égal à l'unité, la somme de cette série se trouvera, dès lors, comprise entre les quantités $\Delta^{\mu-1}a_1z$ et $\Delta^{\mu-1}a_1z-\Delta^{\mu-1}a_2z$; l'erreur absolue relative à la valeur

$$\text{(D)}\quad S=s_1+\frac{z}{1-z}a_1-\frac{z^2}{(1-z)^2}\Delta a_1+\frac{z^3}{(1-z)^3}\Delta^2a_1\ldots\pm\frac{z}{(1-z)^\mu}\Delta^{\mu-1}a_1,$$

sera, en conséquence,

$$<\frac{z^{\mu+1}}{(1-z)^\mu}\Delta^{\mu-1}a_1>\frac{z^{\mu+1}}{(1-z)^\mu}\Delta^\mu a_2$$

Comparant ces limites à celles qui ont été trouvées ci-dessus (37), dans l'hypothèse où l'on prend

$$\text{(E)}\quad S=s_1+a_1z+a_2z^2+a_3z^3\ldots.+a_\mu z^\mu,$$

on voit que, si l'on a

$$\frac{z^{\mu+1}}{(1-z)^{\mu}}\,\Delta^{\mu-1}a_1 > a_{\mu+1}\frac{kz^{\mu+1}}{k-z} \quad \text{ou} \quad \Delta^{\mu-1}a_1 > a_{\mu+1}\frac{k(1-z)^{\mu}}{k-z},$$

il n'y aura aucun motif de préférer, dans les calculs, à cette dernière expression de S, la précédente (D), qui contient d'ailleurs le même nombre de termes; mais, qu'au contraire, si l'on a

$$\frac{z^{\mu+1}}{(1-z)^{\mu}}\,\Delta^{\mu-1}a_1 < a_{\mu+1}z^{\mu+1}\frac{k}{k-z},$$

ou, *à fortiori*,

$$< a_{\mu+1}z^{\mu+1},$$

c'est-à-dire,

$$\Delta^{\mu-1}a_1 < a_{\mu+1}(1-z)^{\mu};$$

il sera avantageux de substituer la première (D), à la seconde (F) : toutefois, à moins que la valeur de $a_{\mu+1}(1-z)^{\mu}$ ne surpasse notablement celle de la différence $\Delta^{\mu-1}a_1$, on fera bien de s'en tenir à la série proposée, dont le calcul et la forme sont plus simples.

39. Supposant, maintenant, qu'on ne fasse commencer la transformation relative à cette série, qu'au terme dont le rang ou l'indice μ est n, on trouvera, sans difficultés,

$$S = s_1 + a_1 z + a_2 z^2 \ldots + a_{n-1}z^{n-1} + a_n z^n \frac{1}{1-z} - \Delta a_n z^{n+1}\frac{1}{(1-z)^2} + \Delta^2 a_n z^{n+2}\frac{1}{(1-z)^3} \ldots$$

$$\ldots \pm \Delta^{\mu-n}a_n z^{\mu}\frac{1}{(1-z)^{\mu-n+1}} \mp \frac{z^{\mu}}{(1-z)^{\mu-n+1}}\left(\Delta^{\mu-n+1}a_n z + \Delta^{\mu-n+1}a_{n+1}z^2 + \Delta^{\mu-n+1}a_{n+2}z^3 + \text{etc.}\right);$$

de sorte que, si l'on prend

$$(F)\begin{cases} S = s_1 + a_1 z + a_2 z^2 \ldots\ldots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n \dfrac{1}{1-z} - \Delta a_n z^{n+1} \dfrac{1}{(1-z)^2} \\ \qquad + \Delta^2 a_n z^{n+2} \dfrac{1}{(1-z)^3} - \ldots\ldots \pm \Delta^{\mu-n} a_n z^\mu \dfrac{1}{(1-z)^{\mu+n-1}}, \end{cases}$$

l'erreur absolue sera, dans les mêmes hypothèses,

$$< \frac{z^{\mu+1}}{(1-z)^{\mu-n+1}} \Delta^{\mu-n} a_n > \frac{z^{\mu+1}}{(1-z)^{\mu-n+1}} \Delta^{\mu-n+1} a_n,$$

et, par conséquent, pour qu'il fût certain que cette valeur (F) est plus approchée que celle (E), on devrait avoir

$$\frac{z^{\mu+1}}{(1-z)^{\mu-n+1}} \Delta^{\mu-n} a_n < a_{\mu+1} z^{\mu+1},$$

c'est-à-dire $\Delta^{\mu-n} a_n < a_{\mu+1} (1-z)^{\mu-n+1}$.

40. En général, on pourra, à l'aide de considérations analogues à celles qui ont été mises en usage aux n^os^ 7 et suivans, régler la marche à suivre, dans les opérations, de manière à obtenir la plus grande approximation possible de l'emploi des transformées relatives aux divers ordres de différences. Mais, attendu que la transformation qui nous occupe ne sera généralement avantageuse que lorsque les différences des coefficiens, de la série proposée, seront rapidement décroissantes, ou du moins décroîtront plus rapidement que ne croissent elles-mêmes les puissances, de même ordre, de la fonction $1-z$, nous n'insisterons pas davantage, et nous nous bornerons à un seul exemple relatif à la série

$$-\log(1-z) = \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \frac{z^4}{4} \ldots + \frac{z^n}{n} + \frac{z^{n+1}}{n+1} + \text{etc.},$$

qui est peu convergente lorsque z approche de l'unité.

Faisant

$$s_1 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_3 = \frac{1}{3} \ldots \quad a_n = \frac{1}{n},$$

on trouvera

$$\Delta^{\mu} a_n = \frac{1 \cdot 1 \cdot 2 \ldots \mu}{n(n+1)(n+2)\ldots n+\mu}, \quad \Delta^{\mu-n} a_n = \frac{1 \cdot 1 \cdot 2 \ldots (\mu-n)}{n(n+1)(n+2)\ldots [n+(\mu-n)]}.$$

La condition pour que (F) soit plus approché que (E), deviendra donc ici

$$\Delta^{\mu-n} a^n = \frac{1 \cdot 1 \cdot 2 \ldots (\mu-n)}{n(n+1)(n+2)\ldots [(n+(\mu-n)]} < a_{\mu+1}(1-z)^{\mu-n+1} = \frac{(1-z)^{\mu-n+1}}{\mu+1};$$

c'est-à-dire

$$z < 1 - \sqrt[\mu-n+1]{(\mu+1)\frac{1 \cdot 1 \cdot 2 \ldots (\mu-n)}{n(n+1)(n+2)\ldots [n+(\mu-n)]}}$$

$$= 1 - \sqrt[m]{(m+n)\frac{1 \cdot 1 \cdot 2 \ldots m-1}{n(n+1)(n+2)\ldots (n+m-1)}},$$

m représentant l'ordre $\mu - m + 1$ de la transformée relative au terme $a_n = \frac{1}{n}$ de la série proposée.

Supposons, en particulier,

$n = 4$, $m = 4$, on aura $z < 1 - \sqrt[4]{\frac{2}{5.7}} = 1 - 0{,}489 = 0{,}511$,

$n = 9$, $m = 2$, on aura $z < 1 - \sqrt{\frac{11}{9.10}} = 1 - 0{,}346 = 0{,}654$.

Ces résultats suffisent pour montrer qu'il y aura, en général, peu d'avantage à appliquer la transformation qui nous occupe à la série proposée; ce à quoi d'ailleurs on

devait bien s'attendre, d'après la manière peu rapide dont décroissent les différences de ses coefficiens.

En effet, pour le premier des exemples dont il s'agit, où $n=4$ et $m=4$, on aurait (38)

$$S=\frac{z}{1}+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}+\frac{z^4}{4}\frac{1}{1-z}-\frac{z^5}{4.5}\frac{1}{(1-z)^2}+\frac{2.z^6}{4.5.6}\frac{1}{(1-z)^3}+\frac{2.3}{4.5.6.7}\frac{z^7}{(1-z)^4},$$

à moins de

$$\frac{2.3.4}{4.5.6.7.8}\frac{z^8}{(1-z)^4};$$

et, par la série proposée (37),

$$S=\frac{z}{1}+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}+\frac{z^4}{4}+\frac{z^5}{5}+\frac{z^6}{6}+\frac{z^7}{7},$$

à moins de

$$a_{\mu+1}\frac{kz^{\mu+1}}{k-z}=\frac{1}{8}\frac{z^8}{1-z};$$

μ étant ici égal à $m-n+1$ ou 7, et k, limite inférieure du rapport $\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{n+1}{n}$, considéré depuis $n=\mu=7$ jusqu'à $n=\infty$, ayant pour valeur l'unité. Or, en prenant précisément $z=\frac{1}{2}$, la limite de l'erreur relative à la première de ces expressions de S, devient $\frac{1}{5.7.8}\cdot\frac{1}{2^4}$, et celle de l'erreur qui se rapporte à la seconde $\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2^7}$, nombre qui n'est pas le quintuple du précédent.

41. Néanmoins, comme la transformée procède par des signes alternativement positifs et négatifs, toutes les fois que les différences des divers ordres de la proposée sont décroissantes, il est évident qu'il pourra y avoir de l'avantage à la substituer à celle-ci, quelque peu conver-

gente qu'elle soit, puisqu'on pourra lui appliquer les méthodes d'approximation rapportées dans la première partie de ce Mémoire. Or, la condition unique pour qu'elle soit convergente, c'est que ses termes diminuent indéfiniment, et finissent par se réduire à 0, circonstance qui exige : 1°. que l'on ait, pour toutes les valeurs possibles de μ,

$$\frac{z^{\mu+1}}{(1-z)^{\mu+1}}\Delta^{\mu}a_n : \frac{z^{\mu}}{(1-z)^{\mu}}\Delta^{\mu-1}a_n = \frac{z}{(1-z)}\frac{\Delta^{\mu}a_n}{\Delta^{\mu-1}a_n} < 1 \quad \text{ou} \quad \frac{z}{1-z} < \frac{\Delta^{\mu-1}a_n}{\Delta^{\mu}a_n},$$

a_n représentant le terme de la série proposée, auquel on veut appliquer la transformation; 2°. que l'expression

$$\frac{z^{\mu}}{(1-z)^{\mu}}\Delta^{\mu-1}a_n < \left(\frac{\Delta^{\mu-1}a_n}{\Delta^{\mu}a_n}\right)^{\mu}\Delta^{\mu-1}a_n,$$

soit susceptible de devenir nulle quand on y suppose $\mu = \infty$; ce qui ne se présentera que dans quelques cas particuliers et assez rares, comme nous l'avons déjà fait remarquer ci-dessus.

42. D'après cela, il serait inutile de s'étendre davantage sur les formules de transformation qui ont été exposées en dernier lieu, et je ferai seulement observer que les considérations qui y ont conduit, fournissent quelques autres résultats généraux relatifs aux limites des séries, et qui, s'ils ne sont pas entièrement neufs, n'ont pas, ce me semble, attiré l'attention des géomètres, autant que le méritent leur importance et leur utilité.

Soit, par exemple, la série à termes positifs

$$S = s_n + a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + a_{n+4} + \text{etc.};$$

nommons M la plus grande et m la plus petite des valeurs

numériques du rapport $\frac{a_n}{a_{n+1}}$, considéré depuis $n = n$ jusqu'à $n = \infty$. Multipliant, tour à tour, la série proposée par chacun de ces nombres; retranchant cette même série du résultat, et divisant par $\mathrm{M} - 1$ et $m - 1$ respectivement, il viendra les transformées

$$S = s_n + \frac{m}{m-1} a_n - \frac{1}{m-1} (a_n - m a_{n+1} + a_{n+1} - m a_{n+2} + a_{n+2} - m a_{n+3} + \text{etc.}),$$

$$S = s_n + \frac{M}{M-1} a_n - \frac{1}{M-1} (a_n - M a_{n+1} + a_{n+1} - M a_{n+2} + a_{n+2} - M a_{n+3} + \text{etc.}),$$

qui sont identiques avec la proposée, si l'on peut négliger les termes qui répondent à n infini.

Or, la quantité comprise entre les parenthèses de chacune de ces nouvelles expressions de S, est essentiellement positive pour la première, et négative pour la seconde; donc on aura

$$S < s_n + \frac{m}{m-1} a_n \quad \text{et} \quad S > s_n + \frac{M}{M-1} a_n ;$$

de sorte que si ces limites de S, sont très rapprochées l'une de l'autre, ou, ce qui revient au même, si M et m sont très peu différens, on pourra prendre

$$S = s_n + \frac{1}{2} \left(\frac{m}{m-1} + \frac{M}{M-1} \right) a_n ,$$

à moins de

$$\frac{1}{2} \left(\frac{m}{m-1} - \frac{M}{M-1} \right) a_n = \frac{1}{2} \frac{(M-m)}{(m-1)(M-1)} a_n .$$

43. Ces résultats supposent essentiellement, d'une part, que $a_\infty = 0$, d'une autre, que m et M surpassent l'unité,

ou que $m-1$, $\mathrm{M}-1$, soient positifs : mais il est aisé de déterminer des limites de S où l'on ait égard à l'influence du terme a_∞ et du changement de signe de $m-1$ et de $\mathrm{M}-1$. En effet, pour tenir compte de ce terme quand il a une valeur finie, il ne s'agira que d'observer qu'étant placé à la limite de la série, il doit entrer positivement et sans multiplicateur dans les parenthèses des transformées. D'après cela, on trouvera, sans difficultés et en raisonnant comme on le ferait sur une suite finie quelconque, 1°., en vertu de la première transformée,

$$\mathrm{S} < s_n + \frac{m}{m-1}a_n - \frac{a_\infty}{m-1}, \text{ si } m > 1,$$

ou

$$\mathrm{S} > s_n - \frac{m}{1-m}a_n + \frac{a_\infty}{1-m}, \text{ si } m < 1;$$

2°., par la seconde transformée,

$$\mathrm{S} > s_n + \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{M}-1}a_n - \frac{a_\infty}{\mathrm{M}-1}, \text{ si } \mathrm{M} > 1,$$

ou

$$\mathrm{S} < s_n - \frac{\mathrm{M}}{1-\mathrm{M}}a_n + \frac{a_\infty}{1-\mathrm{M}}, \text{ si } \mathrm{M} < 1.$$

En examinant attentivement ces nouvelles expressions des limites, on s'apercevra qu'en dehors du cas où m et M surpassent à la fois l'unité et où $a_\infty = 0$, elles deviennent, en général, illusoires, et n'apprennent plus rien de positif sur la convergence de la série proposée ou l'existence de la valeur numérique de la fonction génératrice qu'elle représente. Ainsi, par exemple, dans le cas des séries à termes tantôt croissans et tantôt décroissans, dont nous nous occuperons plus loin, on aura, à la fois, $m < 1$ et

$M > 1$; valeurs auxquelles ne correspondent que des limites inférieures de la somme S de la série.

44. La somme numérique d'une série indéfiniment décroissante et affectée de signes différens, étant nécessairement moindre que celle de la série qui aurait les mêmes termes pris positivement, il est clair, d'après ce qui précède, qu'il sera souvent possible d'en assigner une limite supérieure quelconque. Mais, pour éviter l'infini qui se présenterait dans certains cas, ou pour obtenir des limites plus approchées, il conviendra de partager la somme R, des termes qui suivent s_n dans la proposée, ou le reste relatif à s_n, en deux parties, dont l'une $+ R_1$, essentiellement positive, et l'autre $- R_2$, essentiellement négative; puis de chercher séparément les limites qui se rapportent à leurs valeurs absolues, afin d'en conclure ensuite les limites mêmes de R. Ayant trouvé, par exemple,

$$R_1 < L' > L'', \quad R_2 < L'_1 > L''_1,$$

on aura, *à fortiori*, R ou

$$R_1 - R_2 < L' - L''_1 > L'' - L'_1, \quad R_2 - R_1 > L''_1 - L' < L'_1 - L'',$$

selon que $L' - L''_1$, $L'' - L'_1$ seront en même temps positifs ou négatifs.

Dans le cas particulier des séries de la forme

$$S = s_n \pm a_n \mp a_{n+1} \pm a_{n+2} \mp a_{n+3} \pm \text{etc.} = s_n \pm \Delta a_n \pm \Delta a_{n+2} \pm \Delta a_{n+4} \pm \text{etc.},$$

on se servira des résultats qui se concluent du n° 23, ou bien on procédera, comme dans le n° 42 ci-dessus, en remplaçant les soustractions par les additions, et pre-

nant pour m et M, la plus petite et la plus grande des valeurs de $\frac{\Delta a_n}{\Delta a_{n+1}}$, depuis n n jusqu'à $n=\infty$. On obtiendra, en effet, dans l'hypothèse de $a_\infty = 0$, $\Delta a_\infty = 0$, $S \gtrless s_n \pm \frac{m}{m+1} a_n \lessgtr s_n \pm \frac{M}{M+1} a_n$, $S = s_n \pm \frac{1}{2}\left(\frac{m}{m+1} + \frac{M}{M+1}\right) a_n$, à moins de

$$\frac{1}{2}\frac{(M-m)a_n}{(M+1)(m+1)};$$

les signes supérieurs et inférieurs se correspondant respectivement.

45. On trouvera pareillement des limites de S, en opérant directement sur la somme des différences qui suit s_n, lorsqu'il arrivera que ces différences sont toutes positives; et, en général, on pourra traiter de cette manière beaucoup de séries dont les signes changent périodiquement suivant une loi connue.

Quant aux séries composées de suites alternativement convergentes ou divergentes, c'est-à-dire croissantes ou décroissantes, il conviendra de les partager en plusieurs parties distinctes, dont l'une infinie et les autres finies, de manière qu'on puisse, sans difficultés, déterminer séparément leurs limites, pour en conclure celles de la série proposée.

Nommant, en effet, a_n l'un des termes de la série dont la valeur est un *maximum* par rapport à ceux qui le précèdent ou le suivent immédiatement, de sorte que, pour ce terme, on ait sensiblement $\frac{a_{n-1}}{a_n} = \frac{a_n}{a_{n+1}} = 1$, on prendra, en-deçà et au-delà de a_n, un certain nombre de termes de la série proposée, pour en composer une suite particulière, ascendante jusqu'à a_n, puis descendante à

partir de a_n, et qui soit telle, que le premier $a_{n-\mu}$ de ses termes, et le dernier $a_{n+\nu}$, soient à peu près égaux entre eux, et fournissent des rapports $\frac{a_{n-\mu-1}}{a_{n-\mu}}$, $\frac{a_{n+\nu-1}}{a_{n+\nu}}$, qui diffèrent sensiblement de l'unité. Cela posé, si $a_{n-\mu}$ est moindre que $a_{n+\nu}$, la somme des termes de la suite finie dont il s'agit, et que nous supposerons positifs, sera moindre que $(\mu+\nu)a_n$ et plus grande que $(\mu+\nu)a_{n-\mu}$. Si, au contraire, a_n était un *minimum*, cette même somme serait $>(\mu+\nu)a_n$ $<(\mu+\nu)a_{n+\nu}$. Enfin, les autres portions finies ou infinies de la série, limitées aux précédentes, étant constamment croissantes ou décroissantes, m et M y seront à la fois plus petits ou plus grands que l'unité, et il sera facile de déterminer les limites finies de leurs sommes, par le procédé du n° 42, sauf le cas a, où le rapport $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ deviendrait rigoureusement l'unité pour n infini.

Nous n'entrerons pas dans de plus grands développemens relativement aux limites des séries; mais, avant de clore ce Mémoire, qui a acquis une extension considérable par suite des applications numériques dont nous l'avons accompagné, nous croyons devoir rapporter quelques considérations particulières relatives à la représentation des séries au moyen de figures géométriques, et qui mettent en évidence plusieurs de leurs propriétés générales.

Considérations géométriques sur les séries, et principalement sur les limites de leurs restes.

46. La manière qui peut sembler la plus naturelle de représenter le cours d'une série, consiste à considérer comme l'ordonnée du sommet d'un certain polygone, la valeur de la somme de ses premiers termes jusqu'à celui dont le rang ou l'indice serait pris pour la valeur correspondante

de l'abscisse. Ainsi, l'on aurait, d'après cette définition géométrique, x et y étant les coordonnées rectangulaires d'un sommet quelconque d'un polygone limité ou illimité, l'équation

$$y = s_0 + a_0 + a_1 + a_2 \ldots + a_x = s_1 + \Sigma^x{}_0 a_x, \quad \text{ou} \quad \Delta y = a_x \Delta x,$$

dans laquelle on peut, pour plus de généralité, et lorsqu'il s'agit de représenter analytiquement un polygone de figure quelconque, supposer à Δx des valeurs variables quand on passe du sommet dont l'abscisse est x au sommet consécutif dont l'abscisse est $x + \Delta x$, mais que, dans le cas le plus ordinaire des séries, on doit regarder comme constante et égale à l'unité. Il est évident, en effet, que l'une ou l'autre des équations qui précèdent sont aptes à redonner tous les sommets, ou, ce qui revient au même, à représenter tout le cours d'un polygone quelconque, dès l'instant où a_x est donné en fonction de x et de constantes, et cela de la même manière que l'on représente le cours entier d'une courbe plane par l'équation $y = f(x)$ ou son équivalente $dy = f'(x)\,dx$.

Nous ne nous étendrons pas sur les conséquences que que l'on pourrait déduire de cet aperçu, attendu que la définition qui précède fait dépendre les propriétés des séries, de celles de polygones dont le tracé dépend lui-même de la sommation des suites au moyen du calcul des différences finies; nous passerons, en conséquence, à un autre mode de représentation géométrique des séries, qui n'a pas cet inconvénient, du moins à certains égards.

47. Supposons, en effet, que l'on considère (fig. 1) les valeurs des termes successifs de la série quelconque

$$x = s_0 + a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots . a_y + a_{y+1} + a_{y+2} + \text{etc.},$$

prolongée indéfiniment, comme les ordonnées des différens sommets d'un polygone $\alpha'_0\alpha'_1\alpha'_2\ldots\alpha_\infty$, ayant respectivement pour abscisses, les sommes des termes de la série supposée arrêtée à chacun de ceux dont il s'agit, en convenant, pour la simplicité des considérations géométriques, d'attribuer le même signe ou la même direction, au-dessus de l'axe des abscisses, aux ordonnées qui peuvent résulter de termes quelconques positifs ou négatifs. On voit qu'il deviendra très facile de suivre, sur la figure, la marche de la série ou la loi de progression de ses termes successifs et des sommes qui leur correspondent; on sera même en état, dans beaucoup de cas, de prévoir, à l'avance, si la somme de la série entière est susceptible d'une limite finie ou infinie; car, par exemple, si le polygone qui représente cette série, finit par conserver une forme toujours *concave* par rapport à l'axe des abscisses, comme cela a lieu notamment dans la figure, à partir du sommet α'_2 ou du côté $\alpha'_2\alpha'_3$, il est certain que la somme x, de la série, aura une valeur finie qui sera toujours surpassée par la valeur de l'abscisse du point d'intersection de l'axe $O\alpha_\infty$, avec le prolongement de l'un quelconque des côtés $\alpha'_2\alpha'_3$, $\alpha'_3\alpha'_4$,.... appartenant à la partie dont il s'agit. Or, rien de plus facile que de s'assurer directement qu'une portion donnée de polygone est constamment concave vers l'axe des x.

En effet, il ne s'agit que de prouver que l'angle d'inclinaison de ses côtés consécutifs, en marchant de la gauche vers la droite, sur l'axe dont il s'agit, va constamment en croissant de manière à conserver une valeur finie pour le côté le plus avancé vers l'infini: bien entendu d'ailleurs que les accroissemens correspondans des abscisses seront positifs et décroissans.

48. La tangente de cet angle, pour le côté quelconque

$\alpha'_n\alpha'_{n+1}$ (fig. 2), est évidemment mesurée par l'expression

$$\text{tang } \omega = \frac{a_n - a_{n+1}}{a_{n+1}} = \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1,$$

en représentant cet angle par ω, et considérant comme positifs les angles aigus formés par le prolongement de chaque côté avec la gauche de l'axe des abscisses. Si donc cette fonction conserve constamment le même signe de a_n à a_∞, en ne considérant que les valeurs absolues de a_n et a_{n+1}; si, de plus, elle croît indéfiniment avec n, il est clair que la portion de polygone qui lui correspond sera concave vers l'axe des abscisses, et que la série proposée sera susceptible d'une limite finie, comprise entre la valeur de l'abscisse $O\alpha_n$ qui répond à l'ordonnée $\alpha'_n\alpha_n$, et celle de l'abscisse du point k, d'intersection de l'axe des x avec le prolongement du côté $\alpha'_n\alpha'_{n+1}$.

Cela posé, on remarquera que le triangle $\alpha'_n k\alpha_n$ donne

$$\alpha_n k = \frac{a_n}{\text{tang } \omega} = \frac{a_n \cdot a_{n+1}}{a_n - a_{n+1}};$$

de sorte que si l'on fait

$$s_n = a_0 + a_1 + a_2 \ldots + a_n, \quad R = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \text{etc.},$$

et qu'on représente, en outre, comme dans tout le cours de ce Mémoire, par S la limite vers laquelle converge la somme entière de la série proposée, on aura, pour le cas particulier qui nous occupe,

$$S < s_n + \frac{a_n \cdot a_{n+1}}{a_n - a_{n+1}} > s_n + a_{n+1}, \quad \text{ou} \quad R < \frac{a_n \cdot a_{n+1}}{a_n - a_{n+1}} > a_{n+1}.$$

Mais il est facile d'obtenir une limite inférieure plus

approchée de S, en considérant qu'attendu que la portion de polygone, qui répond à R, est supposée constamment concave vers l'axe des abscisses ou convexe en dehors, la parallèle $\alpha'_{n+1}k'$ menée, par le sommet α'_{n+1}, au dernier côté qui répond à α_∞ ou à n infini, doit nécessairement rencontrer l'axe Ok en un point k' situé en-deçà de α_∞, et dont la position est déterminée par la relation

$$\alpha_{n+1}k' = \frac{a_{n+1}}{\text{tang } \omega'};$$

ω' représentant l'angle aigu formé par l'axe des abscisses avec le dernier des côtés du polygone, ou tang ω' la valeur de tang ω, quand on y suppose n infini.

On aura donc, pour déterminer les limites du reste R de la série,

$$R < \frac{a_n}{\text{tang } \omega} > \frac{a_{n+1}}{\text{tang } \omega'} + a_{n+1},$$

avec la seule condition que, dans l'étendue de R, tous les termes soient positifs et indéfiniment décroissans en même temps que le rapport de chacun d'eux au précédent.

49. Prenant, pour exemple, la série

$$a^x = 1 + la\frac{x}{1} + la^2\frac{x^2}{1.2} + la^3\frac{x^3}{1.2.3}\cdots\cdots$$
$$\cdots + la^n\frac{x^n}{1.2\ldots n} + la^{n+1}\frac{x^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)} + la^{n+2}\frac{x^{n+2}}{1.2\ldots(n+2)} + \text{etc.},$$

qui satisfait évidemment aux conditions ci-dessus dès que $n+1 > xla$, on trouvera

$$\text{tang } \omega = \frac{n+1}{xla} - 1, \quad \text{tang } \omega' = \infty, \quad R < \frac{la^{n+1}x^{n+1}}{2.3\ldots n(n+1-xla)} > \frac{la^{n+1}x^{n+1}}{2.3\ldots(n+1)}.$$

En appliquant, à ce même exemple, le théorème de Lagrange, concernant le reste de la série de Maclaurin, on trouve

$$R < la^{n+1} \frac{a^x x^{n+1}}{2.3\ldots n(n+1)} > la^{n+1} \frac{x^{n+1}}{2.3\ldots n(n+1)},$$

et il est évident que ces limites, qui ont l'inconvénient de dépendre de la fonction dont il s'agit de calculer le développement, seront, en général, moins approchées que les précédentes, pour des valeurs de n surpassant notablement $xla - 1$. C'est d'ailleurs ce qu'on peut vérifier pour le cas particulier de $x = 1$, $a = e = 2,71828$, ou $la = 1$.

5o. Considérons maintenant le cas où le polygone $a'_n a'_{n+1} \ldots a_\infty$ (fig. 3), appartenant à la portion de la série proposée, comprise depuis a_n jusqu'à a_∞, est constamment convexe du côté de l'axe des abscisses, on aura encore

$$\operatorname{tang} \omega = \frac{a_n - a_{n+1}}{a_{n+1}} = \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1,$$

avec la condition que, de a_n à a_∞, ou de $n = n$ à $n = \infty$, 1° la valeur absolue de $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ reste constamment au-dessus de l'unité; 2° qu'elle aille sans cesse en décroissant au lieu de croître comme dans le cas précédent. Or il est facile de voir que, pour ce cas, les limites ci-dessus du reste R, de la série supposée arrêtée au terme a_n, devront être renversées, c'est-à-dire qu'on aura

$$a_n a_\infty > a_n k < a_n k',$$

ou

$$R > \frac{a_n}{\operatorname{tang} \omega} < \frac{a_{n+1}}{\operatorname{tang} \omega'} + a_{n+1},$$

tang ω' représentant toujours la valeur de tang ω relative à $n = \infty$, et a_∞ étant supposé nul comme dans le cas précédent. Quant au cas où la dernière ordonnée a_∞ du polygone aurait une valeur finie quelconque que surpasseraient toutes les autres, il paraît évident, *à priori*, que $O\alpha_\infty$ serait infini, tang $\omega' = 0$, et $\frac{a_{n+1}}{\text{tang}\,\omega'} = \frac{1}{0}$.

51. Considérons enfin le cas où le polygone $\alpha'_n \alpha'_{n+1} \ldots \alpha_\infty$ (fig. 4), se rapprochant continuellement de l'axe des x, contiendrait néanmoins une ou plusieurs inflexions, telles que celle qui a lieu au sommet α'_{n+3}, par exemple, lequel partage ici le polygone en deux parties, dont l'une est convexe du côté de l'axe des abscisses, et l'autre concave, du même côté, dans toute son étendue, ce qui signifie simplement que le rapport $\frac{a_x}{a_{x+1}}$, toujours > 1, ayant commencé par décroître depuis $x = n$ jusqu'à $x = n + 3$, a fini par recroître, et cela continuellement, à partir de cette dernière valeur; si nous considérons, dis-je, les choses dans cette hypothèse, il faudra supposer le reste R, de la série proposée, ou le polygone $\alpha'_n \alpha'_{n+1} \ldots \alpha_\infty$, qui lui correspond, partagé en autant de portions distinctes qu'il y a de termes pour lesquels le rapport $\frac{a_x}{a_{x+1}}$ atteint une valeur numérique *maximum* ou *minimum;* puis, rechercher séparément les limites des sommes comprises entre les termes dont il s'agit, et ajouter enfin entre elles les limites de même espèce, pour en composer les limites totales.

Dans le cas de la figure 4, par exemple, qui n'a qu'un seul point d'inflexion en α'_{n+2}, répondant au côté $\alpha'_{n+2}\alpha'_{n+3}$, qui forme le plus petit angle avec l'axe Ox, on supposera menée la parallèle $b\alpha'_{n+3}$ à cet axe, et l'on rapportera la portion de polygone $\alpha'_n \alpha'_{n+1} \ldots \alpha_{n+3}$, à cette parallèle comme

nouvel axe des abscisses; ce qui revient à diminuer de $\alpha_{n+3}\alpha'_{n+3}$ ou de a_{n+3}, toutes les ordonnées correspondantes. On aura donc, d'après ce qui précède, en nommant R_1 la valeur de $b\alpha'_{n+3} = \alpha_n\alpha_{n+3}$, et R_2 celle de $\alpha_{n+3}\alpha_\infty$,

$$R_1 < \frac{a_{n+1}-a_{n+3}}{\operatorname{tang}\omega'_1} + a_{n+1} > \frac{a_n-a_{n+3}}{\operatorname{tang}\omega_1}, \quad R_2 + a_{n+3} < \frac{a_{n+3}}{\operatorname{tang}\omega'_1} > \frac{a_{n+3}}{\operatorname{tang}\omega'} + a_{n+3},$$

dans lesquelles $\operatorname{tang}\omega'_1$, $\operatorname{tang}\omega_1$, $\operatorname{tang}\omega'$, sont les valeurs respectives de

$$\operatorname{tang}\omega = \frac{a_x}{a_{x+1}} - 1,$$

correspondantes respectivement à $x = n+2$, $x = n$ et $x = \infty$.

On aura donc aussi

$$R = R_1 + R_2 < \frac{a_{n+1}}{\operatorname{tang}\omega'_1} + a_{n+1} - a_{n+3} > \frac{a_{n+1}-a_{n+3}}{\operatorname{tang}\omega_1} + \frac{a_{n+3}}{\operatorname{tang}\omega'}.$$

52. Mais on peut obtenir des expressions plus simples, quoique moins approchées, des limites du reste R, en considérant que, puisque le côté $\alpha'_{n+2}\alpha'_{n+3}$ est, par hypothèse, celui qui fait le plus petit angle avec l'axe de x, la parallèle qui lui est menée du sommet α'_n, laissera nécessairement en-dessous tout le polygone qui représente R; de sorte qu'on aura nécessairement aussi

$$R < \frac{a_n}{\operatorname{tang}\omega'_1}.$$

Et si d'ailleurs le dernier côté, qui répond à n infini, est celui qui forme le plus grand angle avec le même axe, il est clair que la parallèle qui lui est menée par le som-

met α_n, laissera en dehors ce même polygone; de sorte qu'on aura

$$R > \frac{a_n}{\text{tang } \omega'}.$$

En général, on voit que, quel que soit le nombre des inflexions du polygone, pourvu que ses ordonnées a_x aillent sans cesse en diminuant, on aura

$$R < \frac{a_n}{k-1} > \frac{a_n}{i-1};$$

i étant la plus grande et k la plus petite des valeurs que peut prendre le rapport $\frac{a_x}{a_{x+1}}$, depuis $x = n$ jusqu'à $x=\infty$.

53. Il est aisé de voir, au surplus, l'analogie de cette règle avec celles qui ont été obtenues par la considération des moyennes, au n° 42, et l'on arriverait à des rapprochemens semblables (45) pour les séries à termes positifs, composées de suites alternativement croissantes et décroissantes, qui seraient ici représentées par des polygones ondulés, s'écartant et s'approchant alternativement de l'axe des abscisses.

Quant au cas où les termes de la série proposée sont en partie positifs et en partie négatifs, nous n'ajouterons rien de plus à ce qui a été dit de général au n° 44, et nous ferons seulement remarquer que les séries dont il s'agit donneraient lieu, d'après nos conventions, à des polygones, en zigzag, ayant la forme représentée dans la figure 5, et dont il serait facile d'établir plusieurs des propriétés générales, au moyen de considérations purement géométriques.

54. En terminant ici ce que nous nous proposions de dire touchant le calcul numérique des séries, nous de-

vons insister sur la difficulté que présente la détermination d'une limite finie de leur somme, toutes les fois que leurs derniers termes, vers la droite, se trouvant (50) dans le cas représenté par la figure 3, il arrive que l'élément ou côté du polygone, qui correspond à n infini, se confond avec l'axe des abscisses, de sorte qu'on a, rigoureusement

$$\text{tang}\,\omega' = 0, \quad \text{et, partant,} \quad \alpha_n k' \quad \text{ou} \quad \frac{\alpha_n}{\text{tang}\,\omega'} = \infty .$$

En effet, ce cas est complétement douteux, attendu qu'il peut aussi bien arriver que la valeur représentée par la série proposée, soit finie qu'infinie, selon que la portion de polygone considérée osculera l'axe des abscisses en un point plus ou moins éloigné de l'origine, ou lui sera, en quelque sorte, *asymptote* à distance finie ou infinie.

55. Pour donner un exemple d'une série dont la limite supérieure du reste, se présente sous la forme $\frac{1}{0}$, sans que, pour cela, la valeur qu'elle représente soit elle-même infinie, nous considérerons le développement

$$(1-z)^m = 1 - \frac{m}{1}z + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2}z^2 - \frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}z^3 \ldots$$
$$\ldots \pm \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1\,.\,2\ldots\ldots\ldots n}z^n + \text{etc.},$$

dans la supposition de m, fractionnaire et positif.

Il est évident que les termes de ce développement seront alternativement positifs et négatifs, tant que l'on aura $m > n-1$ ou $n < m+1$, et que, passé le terme pour lequel cette circonstance arrive, ils redeviendront tous de même signe. Supposant donc que le terme en z^n, appar-

tienne à la suite de ceux qui conservent le même signe, on aura, en faisant abstraction de ce signe,

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n+1}{(n-m)z}, \quad \text{tang}\omega = \frac{n+1}{(n-m)z} - 1 = \frac{1}{z} + \frac{1+m}{(n-m)z} - 1;$$

ce qui montre que le rapport de a_n à a_{n+1} sera toujours plus grand que l'unité, et par conséquent la série décroissante, depuis $n > m$ jusqu'à $n = \infty$, si seulement z est lui-même au-dessous de $\frac{n+1}{n-m}$. On voit, de plus, que ce rapport, et par conséquent tang ω, iront sans cesse en diminuant jusqu'à la valeur $n = \infty$, pour laquelle ils se réduiront respectivement aux quantités $\frac{1}{z}$ et $\frac{1}{z} - 1$.

On aura donc ici (50), pour le terme de rang quelconque $n > m$, et en nommant R la somme de tous ceux qui le suivent

$$R < \frac{a_{n+1}(2-z)}{1-z} > \frac{a_n z(n-m)}{n+1-z(n-m)},$$

pourvu qu'on ne prenne que les valeurs absolues de a_n et a_{n+1}.

Lorsque la valeur de z s'approche beaucoup de l'unité, en lui demeurant néanmoins inférieure, la première de ces limites devient très grande, et elle peut s'écarter considérablement de la véritable valeur de R, à moins que sa différence avec la seconde limite ne soit elle-même une petite fraction de chacune d'elles. Mais, dans le cas particulier de $z = 1$, ces limites devenant

$$R < \infty > \frac{(n-m)a_n}{m+1};$$

elles n'apprennent absolument rien sur la convergence ou

la non convergence de la série, bien qu'alors même le reste de cette série, à quelque terme qu'on l'arrête, soit réellement susceptible d'une limite finie. Cet inconvénient, au surplus, a lieu pareillement dans l'application du théorème de Lagrange, aux hypothèses actuelles.

56. Comme exemple d'une série décroissante dont la valeur devient infinie en même temps que sa limite supérieure, nous considérerons la série

$$\log(1-z)=\frac{1}{z}+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}+\frac{z^4}{4}+\frac{z^5}{5}+\ldots+\frac{z^n}{n}+\text{etc.},$$

qui, par l'application des règles du n° 50, conduit aux limites suivantes du reste, R, relatif au cas où l'on s'arrêterait au terme $a_n=\frac{z^n}{n}$.

$$R<\frac{z^{n+1}}{(n+1)(1-z)}>\frac{z^{n+1}}{n(1-z)+1},$$

attendu qu'on a ici $\text{tang}\,\omega'=\frac{1}{z}-1$ et $\text{tang}\,\omega=\frac{n+1}{nz}-1$.

Or, ces deux limites deviennent, par la supposition de $z=1$,

$$R<\frac{1}{0}>1,$$

tandis que

$$\log(1-z)=\frac{1}{0}.$$

Il est sans doute inutile de dire que, dans ce dernier exemple comme dans celui qui précède, la limite supérieure de R devenant négative pour toute valeur de z plus grande que l'unité, c'est un signe certain que la série cesse d'être convergente, et de représenter par con-

séquent les valeurs de la fonction dont elle tire son origine.

Dans l'un et l'autre des cas qui nous occupent, ces valeurs sont imaginaires, en effet; mais il est bien des cas où les mêmes circonstances peuvent se présenter sans que la fonction génératrice cesse d'avoir une valeur réelle et finie, algébriquement parlant : tel est, par exemple, le développement si connu

$$1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + \text{etc.},$$

de la fraction

$$\frac{1}{1-z},$$

laquelle devient infinie pour $z = 1$, et change simplement de signe pour $z > 1$; de sorte que la seule chose qu'on puisse affirmer, dans le cas où la limite supérieure du reste des séries se présente sous la forme $\frac{1}{0}$, c'est que les fonctions génératrices correspondantes éprouvent un changement d'état algébrique quelconque, et qu'elles cessent d'être représentées, même sous le point de vue analytique, par leurs développemens, toutes les fois que la limite dont il s'agit devient négative. On conçoit, en effet, qu'une série à termes positifs ne pouvant changer de signe, ni acquérir explicitement des valeurs imaginaires pour des valeurs réelles et positives des variables qui y entrent, il faut bien que l'absurdité ou la contradiction se manifeste par quelque signe particulier, tel que la valeur infinie ou négative de la limite supérieure de ses restes.

Fig. 1.

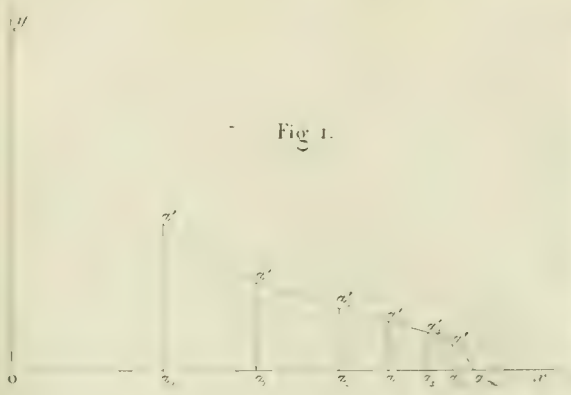


Fig. 2

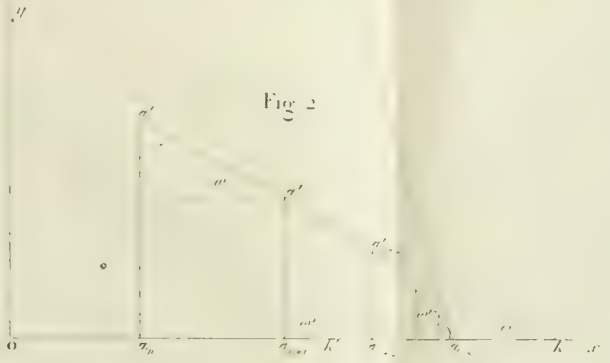


Fig. 3.

Fig. 4.

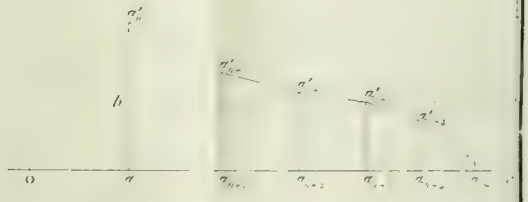
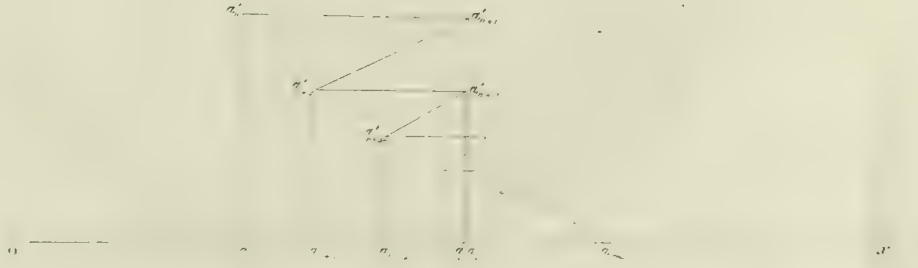


Fig. 5.



MÉMOIRE

SUR LE

CALCUL DES PERTURBATIONS

ET

LE PROCHAIN RETOUR A SON PÉRIHÉLIE

DE LA COMÈTE DE HALLEY.

MÉMOIRE COURONNÉ PAR L'ACADÉMIE DES SCIENCES, EN 1829.

MÉMOIRE

SUR LE

CALCUL DES PERTURBATIONS

ET

LE PROCHAIN RETOUR A SON PÉRIHÉLIE

DE LA COMÈTE DE HALLEY;

PAR G. DE PONTÉCOULANT,

Membre de la Société royale de Londres et de l'Académie des Sciences de Berlin.

Les comètes sont comme les planètes assujetties à des perturbations qui affectent leurs mouvemens elliptiques et altèrent les élémens de leurs orbites. Ces perturbations sont surtout sensibles dans la durée de leurs révolutions. Leur détermination a exercé la sagacité des géomètres qui ont le plus contribué par leurs travaux à perfectionner la théorie du *Système du Monde*. De toutes les méthodes qu'ils ont imaginées, la plus simple est celle qui consiste à regarder l'orbite que décrit la comète comme une ellipse qui varie à chaque instant par l'action des forces perturbatrices; l'altération différentielle de chacun des élémens est alors exprimée sous la forme de quadratures, dont on obtient les valeurs finies par les méthodes d'approximation connues avec toute la précision désirable.

Nous nous proposons d'appliquer ici ces formules au calcul des perturbations que la comète, qui a été observée en 1531, 1607, 1682 et 1759, a subies depuis sa dernière apparition, et de fixer ensuite l'époque de son prochain retour à son périhélie.

Il a fallu d'abord calculer les perturbations que la comète a éprouvées dans l'intervalle de 1682 à 1759 pour déterminer le moyen mouvement diurne au périhélie de 1759. On a trouvé ainsi, pour l'altération de l'anomalie moyenne pendant cette période (*),

Par l'action	de Jupiter	52295″,51
	de Saturne	1163,63
	d'Uranus	1094,60.

D'où l'on a conclu que le moyen mouvement diurne au périhélie de 1682 était de 141″,2265. On a trouvé pour sa variation dans le même intervalle :

Par l'action	de Jupiter	+ 1″,03886
	de Saturne	+ 0,08548
	d'Uranus	+ 0,04344.

Le moyen mouvement diurne était par conséquent de 142″,3943 au périhélie de 1759.

En partant de ce résultat, on a calculé les perturbations qu'éprouvera la comète depuis son passage au périhélie en 1759 jusqu'à son prochain retour, et l'on a trouvé

(*) Pour la commodité du calcul nous avons adopté dans ce Mémoire la division décimale de la circonférence du cercle partagée en 400 parties. Le temps est compté en jours moyens solaires commençant à midi à l'Observatoire de Paris.

pour l'altération de l'anomalie moyenne :

Par l'action	de Jupiter	+ 4053″,95
	de Saturne	+ 6128,82
	d'Uranus	+ 708,33
	de la Terre	+ 1666,16.

D'où l'on a conclu que l'intervalle entre le passage observé en 1759, et le prochain retour de la comète au périhélie sera de 28002,8 jours; ce qui, à partir du 12,6 mars 1759, répond au 12,4 novembre 1835, époque à laquelle par conséquent la comète reviendra à son périhélie.

Formules qui déterminent le mouvement d'une comète autour du Soleil, en ayant égard aux perturbations qu'elle peut éprouver par l'action des planètes.

1. Soient x, y, z, les trois coordonnées rectangulaires de la comète, et r son rayon vecteur, rapportés au centre du Soleil, soient x', y', z' et r' les quantités analogues relatives à la planète perturbatrice m', et rapportées aux mêmes axes et à la même origine, on aura

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2; \quad r'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2,$$

et si l'on fait pour abréger :

$$\rho^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2,$$
$$R = m'\left(\frac{1}{\rho} - \frac{xx' + yy' + zz'}{r'^3}\right);$$

pour déterminer les mouvemens de la comète autour du Soleil, en négligeant sa masse devant celle de cet astre

prise pour unité, on aura les trois équations différentielles suivantes :

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx^2}{dt^2} + \frac{x}{r^3} &= \frac{d\mathrm{R}}{dx}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{y}{r^3} &= \frac{d\mathrm{R}}{dy}, \\ \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{z}{r^3} &= \frac{d\mathrm{R}}{dz}. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Nous intégrerons ces équations par la méthode de la variation des constantes arbitraires. Pour cela on commencera par supposer que leurs seconds membres sont nuls, ce qui les réduit à la forme des équations différentielles du mouvement elliptique; on fera varier ensuite les constantes arbitraires introduites par l'intégration dans les formules de ce mouvement, de manière à satisfaire aux équations complètes, et en s'imposant pour seconde condition que les différentielles du premier ordre soient comme les intégrales finies de même forme dans le cas où l'on a égard aux forces perturbatrices, et dans le cas du mouvement elliptique.

Cela posé, si l'on nomme a le grand axe de l'orbite, e l'excentricité, ω la longitude du périhélie, ε celle de l'époque, et v la longitude de la comète comptée dans le plan de son orbite, par les formules du mouvement dans l'ellipse, on a

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} - \frac{2}{r} + \frac{1}{a} &= 0, \\ \frac{r^2 dv}{dt} &= \sqrt{a(1-e^2)}; \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

équations qui se déduisent d'ailleurs très simplement des formules (1), quand on y suppose $\mathrm{R} = 0$; r^2dv représente le double de l'aire décrite par le rayon vecteur r

pendant l'instant dt sur le plan même de l'orbite : en nommant donc φ l'inclinaison de ce plan sur celui des xy, on aura $xdy - ydx = \cos\varphi r^2 dv$. Si l'on prend donc, comme nous le ferons, pour le plan fixe auquel on rapporte les mouvemens de la comète, celui de son orbite primitive, ce qui donne $\varphi = 0$, on aura

$$\frac{xdy - ydx}{dt} = \sqrt{a(1-e^2)}. \quad (3)$$

Les équations précédentes étant différentielles du premier ordre, doivent avoir lieu également, soit qu'on traite comme constantes les arbitraires qu'elles renferment, soit qu'on les considère comme variables; en différentiant les équations (2) et (3) dans ces deux hypothèses, et en substituant pour $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$ et $\frac{d^2z}{dt^2}$ leurs valeurs données par les équations (1), en observant qu'on peut négliger le terme $\frac{d\mathrm{R}}{dz}\,dz$, qui serait de l'ordre du carré des forces perturbatrices, puique R est une quantité du premier ordre, et que z le devient par le choix que l'on a fait du plan de projection; on aura

$$\left.\begin{aligned} d.\tfrac{1}{a} &= -2\left(\frac{d\mathrm{R}}{dx}\,dx + \frac{d\mathrm{R}}{dy}\,dy\right), \\ d.\sqrt{a(1-e^2)} &= dt\left(x\frac{d\mathrm{R}}{dy} - y\frac{d\mathrm{R}}{dx}\right). \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Ces valeurs suffisent pour déterminer les variations des deux autres élémens ε et ω. En effet, par les formules du mouvement elliptique, on a

$$\begin{aligned} r &= a(1 - e\cos u), \\ \int n dt + \varepsilon - \omega &= u - e\sin u, \\ \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(v - \omega) &= \sqrt{\tfrac{1+e}{1-e}}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}u; \end{aligned}$$

la nouvelle variable u étant ce que les astronomes appellent l'anomalie excentrique, et n une constante qui est liée à la constante a par l'équation $a^3n^2 = 1$, et qui représente le moyen mouvement diurne, en supposant qu'on prend pour unité de temps le jour moyen solaire. Dans l'orbite elliptique, nt est ainsi le moyen mouvement de m correspondant au temps t, $nt + \varepsilon$ sa longitude, et $nt + \varepsilon - \omega$ son anomalie moyennes.

Ces équations, ainsi que leurs différences premières, doivent également convenir à l'ellipse invariable et à l'orbite troublée, ce qui exige que leurs différentielles prises relativement aux constantes qu'elles renferment, et aux quantités qui varient avec elles, soient nulles d'elles-mêmes. En observant qu'on a d'ailleurs

$$\sin(v-\omega) = \frac{\sqrt{1-e^2}\sin u}{1-e\cos u}, \quad \cos(v-\omega) = \frac{\cos u - e}{1-e\cos u},$$

on trouvera ainsi

$$\begin{aligned} &da(1-e\cos u) - ade\cos u + aedu\sin u = 0,\\ &d\varepsilon - d\omega + de\sin u - du(1-e\cos u) = 0,\\ &d\omega\sqrt{1-e^2}(1-e\cos u) + de\sin u + du(1-e^2) = 0. \end{aligned}$$

Ces trois équations suffisent pour déterminer $d\varepsilon$ et $d\omega$ en fonction de da et de de qui se concluront des formules (4). Si, dans les deux dernières équations, on substitue pour du sa valeur tirée de la première, on aura

$$\left.\begin{aligned} &ae\sqrt{1-e^2}\sin u\,d\omega + a(e+\cos u)\,de - (1-e^2)\,da = 0,\\ &ae\sin u\,(d\varepsilon - d\omega) + a(e-\cos u)\,de + (1-e\cos u)^2\,da = 0; \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

ou bien, en ajoutant ces deux équations

$$d\varepsilon - d\omega(1-\sqrt{1-e^2}) = \frac{d.a(1-e^2) - (1-e\cos u)^2\,da}{ae\sin u}. \quad (6)$$

Cette dernière équation peut prendre une forme très simple. En effet, on a

$$d.a(1-e^2) = 2\sqrt{a(1-e^2)}.d.\sqrt{a(1-e^2)}.$$

Si l'on substitue donc pour da et $d.\sqrt{a(1-e^2)}$ leurs valeurs dans l'équation (6), en observant qu'on a $\sqrt{a} = a^2 n$, et que les formules du mouvement elliptique donnent

$$x = a\cos u - ae, \quad y = a\sqrt{1-e^2}\sin u;$$

d'où l'on tire

$$dx = -\frac{andt\sin u}{1-e\cos u}, \quad dy = \frac{andt\sqrt{1-e^2}\cos u}{1-e\cos u};$$

on trouvera après quelques réductions

$$d\varepsilon = d\omega(1-\sqrt{1-e^2}) - 2andt\left(x\frac{d\mathrm{R}}{dx} + y\frac{d\mathrm{R}}{dy}\right).$$

Maintenant, si l'on substitue dans la première des équations (5) pour da et de leurs valeurs tirées des équations (4), on aura la valeur correspondante de $d\omega$, et l'équation précédente donnera celle de $d\varepsilon$ quand la valeur de $d\omega$ sera déterminée.

En faisant, pour abréger,

$$\mathrm{X} = \frac{x'-x}{\rho^3} - \frac{x'}{r'^3}, \quad \mathrm{Y} = \frac{y'-y}{\rho^3} - \frac{y'}{r'^3}, \quad \mathrm{Z} = z'\left(\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{r'^3}\right),$$

ce qui donne,

$$\frac{d\mathrm{R}}{dx} = m'\mathrm{X}, \quad \frac{d\mathrm{R}}{dy} = m'\mathrm{Y}, \quad \frac{d\mathrm{R}}{dz} = m'\mathrm{Z};$$

et en mettant à la place des variables x, y, t, et de leurs différentielles leurs valeurs en fonction de l'anomalie excentrique u, on trouvera ainsi,

$$\left.\begin{aligned} da &= -2m'a^3du\sin u\mathrm{X} + 2m'a^3du\sqrt{(1-e^2)}\cos u\mathrm{Y},\\ de &= m'adu\sqrt{(1-e^2)}\cos u\,(x\mathrm{Y}-y\mathrm{X}) + m'adu\sqrt{(1-e^2)}\,r\mathrm{Y},\\ ed\omega &= m'adu\sin u\,(x\mathrm{Y}-y\mathrm{X}) - m'adu\sqrt{(1-e^2)}\,r\mathrm{X},\\ d\iota &= d\omega\,(1-\sqrt{1-e^2}) - 2m'du\,r(x\mathrm{X}+y\mathrm{Y}). \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

L'équation $n = a^{-\frac{3}{2}}$ donne, en la différentiant,

$$\frac{dn}{n} = -\frac{3}{2}\frac{da}{a}.$$

En substituant donc pour da sa valeur, on aura

$$dn = 3m'a^2ndu\sin u\mathrm{X} - 3m'a^2ndu\sqrt{(1-e^2)}\cos u\mathrm{Y}. \quad (8)$$

Il ne nous reste plus à déterminer que les variations des constantes qui fixent la position de l'orbite. Si l'on nomme φ l'inclinaison de l'orbite variable sur le plan de l'orbite primitive, et θ la longitude de son nœud ascendant comptée sur le même plan, $\sin\varphi\cos\theta$, et $\sin\varphi\sin\theta$ représenteront les cosinus que forment respectivement les plans des xz et des yz avec celui des xy; on aura donc,

$$\begin{aligned} zdx - xdz &= dt\sqrt{a(1-e^2)}\sin\varphi\cos\theta,\\ ydz - zdy &= dt\sqrt{a(1-e^2)}\sin\varphi\sin\theta, \end{aligned}$$

puisque $zdx-xdz$ et $ydz-zdy$ représentent respectivement le double des aires décrites pendant l'instant dt sur les plans des xz et des yz par le rayon vecteur de la comète.

Ces équations ont également lieu dans l'ellipse variable puisqu'elles sont différentielles du premier ordre. Si on les différentie en faisant varier les constantes, qu'on substitue ensuite au lieu de d^2x, d^2y, et d^2z leurs valeurs, que pour abréger l'on fasse

$$\sin\varphi\sin\theta = p, \quad \sin\varphi\cos\theta = q,$$

et qu'on néglige les quantités du second ordre, ce qui permet de supposer $z = 0$ et $\varphi = 0$ dans les termes multipliés par R, en observant qu'on a $ndt = du(1 - e\cos u)$, on trouvera

$$dp = \frac{m'rdu}{\sqrt{1-e^2}}\,\gamma Z, \quad dq = -\frac{m'rdu}{\sqrt{1-e^2}}\,xZ. \quad (9)$$

Ces équations jointes aux formules (7) et (8) déterminent complétement les variations différentielles produites par l'action de la planète m' sur chacun des élémens du mouvement elliptique de la comète.

2. Il ne s'agit plus que d'intégrer les formules précédentes pour en conclure les variations finies de ces mêmes élémens. Cette intégration ne peut s'opérer que par les méthodes d'approximation connues sous le nom de quadratures paraboliques. Celle que l'on emploie ordinairement consiste à diviser la courbe entière décrite par la comète en portions assez petites pour qu'on puisse déterminer pour chacune d'elles les altérations des élémens dues aux actions des planètes perturbatrices au moyen de leurs valeurs différentielles, on en conclut ensuite les altérations totales, avec toute la précision convenable, par la formule suivante qui me paraît la plus simple de celles que l'on a imaginées pour cet usage.

Soit Pdu la variation différentielle de l'un quelconque

des élémens de l'orbite elliptique, on imaginera une courbe parabolique dont l'abscisse soit l'anomalie excentrique u de la comète, et dont P soit l'ordonnée, l'intégrale $\int P du$ représentera l'aire de la courbe comprise entre les limites données. On fera varier u de degré en degré, ou de deux degrés en deux degrés, etc., selon qu'on le jugera convenable; on déterminera les valeurs correspondantes de P qu'on désignera par $P^{(0)}$, $P^{(1)}$, $P^{(2)}$,.... $P^{(n-1)}$, $P^{(n)}$, et l'on aura, pour déterminer $\int P du$ la formule suivante:

$$\left.\begin{aligned}\int P du = {} & \tfrac{1}{2} P^{(0)} + P^{(1)} + P^{(2)} \ldots\ldots + P^{(n-1)} + \tfrac{1}{2} P^{(n)} \\ & - \frac{1}{12} (\Delta P^{(n-1)} - \Delta P^{(0)}) \\ & - \frac{1}{24} (\Delta^2 P^{(n-2)} + \Delta^2 P^{(0)}) \\ & - \frac{19}{720} (\Delta^3 P^{(n-3)} - \Delta^3 P^{(0)}) \\ & - \frac{3}{160} (\Delta^4 P^{(n-4)} + \Delta^4 P^{(0)}) \\ & - \frac{863}{60480} (\Delta^5 P^{(n-5)} - \Delta^5 P^{(0)}) \\ & - \text{etc.}\end{aligned}\right\} (10)$$

La caractéristique Δ est ici celle des différences finies, en sorte qu'on a $P^{(1)} - P^{(0)} = \Delta P^{(0)}$; $P^{(2)} - P^{(1)} = \Delta P^{(1)}$, etc.

Cette formule suppose que l'on prend pour unité la variation du; il faudra donc multiplier les résultats par du, c'est-à-dire par le nombre de degrés, minutes et secondes compris dans l'intervalle qui sépare les variations équidistantes de l'anomalie excentrique.

La formule précédente donnera, avec précision, la valeur de l'altération totale de l'élément de l'orbite que l'on aura considéré, correspondante à la variation supposée dans l'arc de l'anomalie excentrique. Dans les cas ordi-

naires, il suffira de considérer la première différence finie, et l'on n'aura égard aux différences suivantes que vers les points où la distance de la comète à la planète perturbatrice approche de son *minimum*, ce qui rend très considérable la valeur de la fraction $\frac{1}{\rho}$, et par conséquent celle de P. Mais il vaudra mieux encore, dans ce cas, pour plus d'exactitude, et pour que les ordonnées P ne subissent pas de trop grandes variations, diminuer l'intervalle qui les sépare, et faire varier l'anomalie u de demi-degré en demi-degré, ou par parties plus petites encore, selon que les circonstances l'exigeront. Avec ces précautions, on pourra toujours négliger dans la formule précédente les différences secondes et celles qui les suivent, ce qui la rendra d'un usage plus facile.

3. Pour appliquer cette formule à l'intégration des valeurs (7), (8) et (9), il faut supposer que toutes les variables qu'elles renferment ont été exprimées en fonction de l'anomalie excentrique u. Nous avons déjà donné les valeurs des coordonnées x, y, et du rayon vecteur r de la comète sous cette forme; il ne reste donc qu'à exprimer de la même manière les coordonnées x', y', z' de la planète perturbatrice. Pour cela, prenons pour axe des abscisses x le grand axe de l'orbite de la comète; si l'on nomme γ l'inclinaison de l'orbe de la planète sur celui de la comète, λ la longitude de son nœud ascendant comptée sur ce dernier plan, à partir de la ligne des absides, qu'on désigne de plus par v' l'angle que fait le rayon vecteur r' de m' avec la ligne des nœuds, on aura

$$\begin{aligned} x' &= r' \cos v' \cos \lambda - r' \sin v' \sin \lambda \cos \gamma, \\ y' &= r' \cos v' \sin \lambda + r' \sin v' \cos \lambda \cos \gamma, \\ z' &= r' \sin v' \sin \gamma. \end{aligned}$$

Il sera facile, d'après les positions respectives des orbites de la comète et des planètes perturbatrices, de calculer les constantes λ et γ; quant au rayon vecteur r' et à l'angle v', on commencera par déterminer le temps t pour chacune des valeurs supposées à l'anomalie excentrique u, au moyen de l'équation $t = a^{\frac{3}{2}}\ (u - e \sin u)$. Si l'on suppose l'arc u exprimé en parties du rayon, le temps t sera exprimé par cette formule en arcs du moyen mouvement du Soleil, converti en parties du rayon; pour l'exprimer en jours et fractions de jour, il faudra le multiplier par $\frac{365,25638}{2\pi}$, ou par le nombre dont le logarithme est 1,7644179. Les tables astronomiques fourniront ensuite toutes les quantités nécessaires pour déterminer les valeurs de v' et r' correspondantes à cet instant, et par conséquent à la valeur donnée de la variable u.

Lorsque les valeurs des coordonnées x, y, r, x', y', z' et r' auront été calculées par ces formules, on formera celle de la quantité ρ, et l'on calculera sans difficulté les valeurs des trois fonctions X, Y, Z, relatives à une variation quelconque de l'anomalie excentrique de la comète.

4. Le point le plus important de la théorie des perturbations des comètes, est l'altération du temps périodique. On la déterminera très simplement au moyen des formules précédentes. En effet, nommons ζ l'anomalie moyenne de la comète, en sorte que dans l'orbite elliptique on ait

$$\zeta = \int n dt + \varepsilon - \omega. \qquad (11)$$

Si l'on suppose que le temps t est compté de l'instant du passage au périhélie, on aura pour cet instant.....

$\int ndt + \varepsilon - \omega = 0$, puisque l'on doit avoir $\zeta = 0$ en même temps que $t = 0$. On aura donc simplement alors $\zeta = \int ndt$, l'intégrale $\int ndt$ devant être supposée nulle au commencement du temps t.

Cela posé, l'équation (11) doit avoir également lieu dans l'ellipse variable, pourvu qu'on remplace n, ε, ω, par leurs valeurs relatives au mouvement troublé; en la différentiant on aura

$$d^2\zeta = dndt + d.d\varepsilon - d.d\omega.$$

Les différences dn, $d\varepsilon$, $d\omega$, étant déterminées par les formules (7) et (8). On aura donc, en intégrant,

$$\int d\zeta = \int (dt \int dn) + \int d\varepsilon - \int d\omega,$$

et par conséquent,

$$\zeta = \mathrm{N}t + \int d\zeta;$$

N étant une constante qui représente la valeur de n ou le moyen mouvement diurne de la comète au commencement de la période que l'on considère, en sorte qu'on aura, généralement,

$$n = \mathrm{N} + \int dn.$$

Telle sera donc l'expression de l'anomalie moyenne ζ au bout d'un temps quelconque t dans l'orbite troublée. Soit T le temps qui s'écoule entre deux passages consécutifs de la comète à son périhélie; l'anomalie ζ augmente dans cet intervalle de 400°, on aura donc

$$2\pi = \mathrm{NT} + \int d\zeta,$$

π étant la demi-circonférence dont le rayon est l'unité.

On déterminerait immédiatement, par cette équation, l'intervalle T, et par conséquent l'instant du passage de la comète à son périhélie, si la valeur de la constante N était connue. Mais cette valeur ne saurait se déduire directement, comme celle des autres élémens, des observations faites pendant l'apparition de la comète à l'origine de la période que l'on considère, parce qu'elle dépend du temps que la comète emploierait à faire sa révolution anomalistique dans l'orbite invariable, et que cette donnée, telle qu'elle résulte des observations, est affectée des perturbations que la comète a éprouvées durant la période précédente. Il faut donc, pour fixer l'instant du retour futur d'une comète à son périhélie, la considérer dans les deux périodes consécutives qui précèdent ce passage.

Prenons, pour fixer les idées, la comète de 1682, revenue à son périhélie en 1759, et dont il s'agira de déterminer le prochain retour. Supposons que T soit l'intervalle de temps qui sépare les passages de 1682 et de 1759, et que N soit la valeur de n, qui répond à l'origine de cette période, c'est-à-dire le mouvement diurne qu'aurait eu la comète dans son orbite elliptique, si à partir de cette époque les forces perturbatrices étaient venues à cesser leur action. A l'instant du passage au périhélie de 1759, on aura

$$2\pi = \mathrm{NT} + \int d\zeta; \qquad (12)$$

les intégrales devant commencer à l'instant du passage au périhélie de 1682, où nous fixons l'origine du temps t, et s'étendre depuis $t = 0$ jusqu'à $t = \mathrm{T}$, et les valeurs des constantes ε, ω, e se rapportant aux observations du même passage.

Cette équation donnera la valeur de N relative au périhélie de 1682, et l'on en conclura celle de N′ relative au

périhélie de 1759, par l'équation

$$N' = N + \int dn ;$$

l'intégrale étant prise comme les précédentes, depuis $t = 0$ jusqu'à $t = T$.

Soit maintenant T' l'intervalle de temps inconnu qui s'écoulera entre le passage au périhélie de 1759, et le prochain passage qu'il s'agit de déterminer. On aura

$$2\pi = N'T' + \overline{\int d\zeta}, \qquad (13)$$

en supposant

$$\overline{\int d\zeta} = \overline{\int dt \int dn} + \overline{\int d\varepsilon} - \overline{\int d\omega};$$

les intégrales $\overline{\int}$ commençant ici à l'instant du passage au périhélie de 1759, et s'étendant depuis $t = 0$ jusqu'à $t = T'$, et les valeurs des constantes ω, e étant celles qui résultent des observations de la comète faites à la même époque.

L'équation (13) ne renfermant que l'inconnue T', servira à fixer sa valeur.

Quant aux intégrales doubles qui entrent dans les valeurs de $\int d\zeta$ et de $\overline{\int d\zeta}$, on les fera disparaître en observant que l'on a

$$\int dt \int dn = T \int dn - \int t dn$$
$$\overline{\int dt \int dn} = T' \overline{\int dn} - \overline{\int t dn}.$$

On aura, par conséquent, pour déterminer les variations

de l'anomalie moyenne,

$$\int d\zeta = T\int dn - \int tdn + \int d\varepsilon - \int d\omega,$$
$$\int d\overline{\zeta} = T'\int dn - \int tdn + \int d\varepsilon - \int d\omega;$$

et les différentes intégrales qui entrent dans ces équations pourront se calculer par la formule générale (10). La valeur de $\int d\overline{\zeta}$ contient encore l'inconnue T', qui est l'intervalle entre le passage de 1759 et le prochain retour qu'il s'agit de déterminer; mais on évite cette difficulté, en rectifiant dans la seconde période l'orbite de la comète de 20° en 20°, et en employant, pour chaque division, les élémens de l'ellipse qui résulte des calculs précédens.

Application des formules précédentes à la détermination du prochain retour au périhélie de la comète de 1759.

5. Telles sont les formules que nous allons appliquer à la détermination des perturbations et du prochain retour de la comète de Halley. Pour les réduire en nombres, il ne nous reste à connaître que les valeurs numériques des constantes qu'elles renferment. Le calcul des observations faites aux périhélies de 1682 et de 1759, ne donne pas directement la valeur de la constante N, ou du demi-grand axe a qui y répond; il faut préalablement déterminer les perturbations que la comète subit pendant cette période. Mais on peut, dans ce calcul, regarder l'orbite comme une ellipse dont le demi-grand axe répond à la durée de la révolution observée; les erreurs seront de l'ordre du carré des forces perturbatrices.

La durée de la révolution de 1682 à 1759 a été de 27937 jours, on aura donc

$$N = \frac{400^\circ}{27937} = 143'',1792.$$

L'équation $a^3 N^2 = 1$ donne $a^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{N}\left(\frac{400^\circ}{365,25638}\right)$; puisque nous prenons pour unité la moyenne distance de la Terre au Soleil; d'où l'on tire $a = 18,01861$.

Les autres élémens de l'orbite se déduisent directement des observations. Nous avons employé dans nos calculs les valeurs suivantes, résultant d'une discussion faite avec le plus grand soin par Burckhardt, des observations de la comète pendant ses apparitions de 1682 et de 1759.

Elémens du mouvement de la comète, l'orbite étant supposée une ellipse dont le grand axe répond à la durée de la révolution de 1682 à 1759.

Pour 1682.

		Septembre.
Temps du passage au périhélie en 1682.....		14,74002
Rapport de l'excentricité au demi-grand axe..	e...	0,967676
Lieu du périhélie.....	ω...	335°,6250
Inclinaison de l'orbite.....	i...	19°,7778
Lieu du nœud ascendant sur l'écliptique.....	Ω..	56°,9846
Demi grand axe.....	a...	18,01861

Pour 1759.

		Mars.
Temps du passage au périhélie en 1759.....		12,58976
Rapport de l'excentricité au demi-grand axe..	e...	0,967557
Lieu du périhélie.....	ω...	336°,8522
Inclinaison de l'orbite.....	i...	19°,5778
Lieu du nœud ascendant sur l'écliptique de 1759.	Ω..	59°,8182
Demi grand axe.....		18,01861

En partant des élémens de 1682, nous avons déterminé les altérations des élémens et de l'anomalie moyenne dans la première moitié de l'orbite, c'est-à-dire depuis $u = 0$ jusqu'à $u = 200^{\circ}$. En partant ensuite des élémens de 1759, nous avons fixé l'origine des angles u au périhélie de cette époque, et en remontant vers 1682, en faisant u négatif, nous avons déterminé les altérations des élémens dans la seconde moitié de l'ellipse, ou depuis $u = 200^{\circ}$ jusqu'à $u = 400^{\circ}$.

La longitude et le rayon vecteur des planètes perturbatrices, Jupiter, Saturne, et Uranus, ont été calculées par les tables de M. Bouvard, en ayant égard seulement à l'équation du centre et à la variation séculaire; la longitude et le rayon vecteur de la Terre ont été tirées de la même manière des tables de Delambre.

Dans l'application de la formule (10) au calcul des valeurs numériques des altérations des élémens de l'orbite elliptique de la comète, on a fait varier l'anomalie excentrique u de degré en degré pour Jupiter, de deux degrés en deux degrés pour Saturne, de cinq degrés en cinq degrés pour Uranus, et de degré en degré pour la Terre, dont on n'a considéré l'action que dans la partie de l'orbite la plus voisine du périhélie de 1759.

Enfin, en nommant m, la masse de la Terre, m' celle de Jupiter, m'' celle de Saturne, m''' celle d'Uranus, on a supposé à ces masses les valeurs qui suivent :

$$m = \frac{1}{329630}, \quad m' = \frac{1}{1070,5}, \quad m'' = \frac{1}{3512}, \quad m''' = \frac{1}{17918}.$$

A l'aide de ces valeurs et des formules précédentes, on a obtenu les résultats contenus dans les tableaux suivans :

Coordonnées de la comète rapportées au plan et au grand axe de son orbite. Temps écoulé depuis le passage au périhélie de 1682.

	☉				☉		
u	x	y	t	u	x	y	t
0°	+ 0.58	+ 0.00	0j 0	50°	— 4.70	+ 3.21	449j 7
1	0.58	0.07	2.3	51	4.90	3.26	472.2
2	0.57	0.14	4.5	52	5.10	3.31	495.4
3	0.56	0.21	6.8	53	5.31	3.36	519.3
4	0.55	0.29	9.2	54	5.52	3.41	544.1
5	0.53	0.36	11.6	55	5.73	3.46	569.6
6	0.50	0.43	14.1	56	5.95	3.50	596.0
7	0.47	0.50	16.8	57	6.17	3.55	623.2
8	0.44	0.57	19.5	58	6.39	3.59	651.2
9	0.40	0.64	22.3	59	6.62	3.63	689.0
10	0.36	0.71	25.4	60	6.85	3.68	709.7
11	0.31	0.78	28.5	61	7.08	3.72	740.2
12	0.26	0.85	31.9	62	7.31	3.76	771.6
13	0.21	0.92	35.4	63	7.54	3.80	804.0
14	0.15	0.99	39.2	64	7.78	3.84	837.1
15	0.08	1.06	43.2	65	8.02	3.87	871.2
16	+ 0.02	1.13	47.5	66	8.26	3.91	906.2
17	— 0.06	1.20	52.0	67	8.51	3.95	942.1
18	0.13	1.27	56.8	68	8.76	3.98	978.9
19	0.21	1.34	61.9	69	9.00	4.02	1016.7
20	0.30	1.40	67.3	70	9.26	4.05	1055.3
21	0.39	1.47	73.0	71	9.51	4.08	1095.0
22	0.52	1.54	79.0	72	9.76	4.11	1135.0
23	0.58	1.61	85.5	73	10.02	4.14	1177.1
24	0.68	1.67	92.3	74	10.28	4.17	1219.6
25	0.79	1.74	99.5	75	10.54	4.20	1263.1
26	0.90	1.80	107.1	76	10.80	4.23	1307.6
27	1.01	1.87	115.2	77	11.07	4.25	1353.0
28	1.13	1.93	123.6	78	11.33	4.28	1399.5
29	1.26	2.00	132.6	79	11.60	4.30	1446.9
30	1.38	2.06	141.9	80	11.87	4.32	1495.4
31	1.51	2.13	151.8	81	12.14	4.34	1544.9
32	1.68	2.19	162.2	82	12.41	4.36	1595.3
33	1.79	2.25	173.1	83	12.68	4.38	1646.8
34	1.93	2.31	184.5	84	12.96	4.40	1699.4
35	2.07	2.37	196.4	85	13.23	4.42	1752.9
36	2.22	2.43	208.9	86	13.51	4.43	1807.5
37	2.38	2.49	222.0	87	13.78	4.45	1863.1
38	2.53	2.55	235.6	88	14.06	4.46	1919.3
39	2.69	2.61	249.8	89	14.34	4.48	1977.5
40	2.86	2.67	264.7	90	14.62	4.49	2036.2
41	3.03	2.73	280.2	91	14.90	4.50	2096.0
42	3.20	2.79	296.3	92	15.18	4.51	2156.8
43	3.37	2.84	313.1	93	15.46	4.52	2218.8
44	3.55	2.90	330.5	94	15.74	4.52	2281.7
45	3.74	2.95	348.6	95	16.02	4.53	2345.7
46	3.92	3.01	367.4	96	16.30	4.54	2410.8
47	4.11	3.06	386.9	97	16.59	4.54	2476.9
48	4.30	3.11	407.1	98	16.87	4.54	2544.1
49	4.50	3.16	428.1	99	17.15	4.54	2612.3

	x	y	t	u	x	y	t
°	— 17.44	+ 4.54	2681.7	150°	— 30.18	+ 3.21	7434.0
	17.72	4.54	2752.0	151	30.38	3.16	7552.0
	18.00	4.54	2823.5	152	30.57	3.11	7670.7
103	18.28	4.54	2896.0	153	30.76	3.06	7790.2
104	18.57	4.54	2969.5	154	30.95	3.01	7910.4
105	18.85	4.53	3044.1	155	31.14	2.95	8031.3
106	19.13	4.52	3119.8	156	31.32	2.90	8152.9
107	19.41	4.52	3196.5	157	31.50	2.84	8275.1
108	19.69	4.51	3274.3	158	31.67	2.79	8398.0
109	19.98	4.50	3353.2	159	31.85	2.73	8521.6
110	20.25	4.49	3433.1	160	32.01	2.67	8645.8
111	20.53	4.48	3514.0	161	32.18	2.61	8770.6
112	20.81	4.46	3596.0	162	32.34	2.55	8896.1
113	21.09	4.45	3679.0	163	32.50	2.49	9022.1
114	21.37	4.43	3763.1	164	32.65	2.43	9148.7
115	21.64	4.42	3848.2	165	32.80	2.37	9275.9
116	21.92	4.40	3934.3	166	32.95	2.31	9403.7
117	22.19	4.38	4021.5	167	33.09	2.25	9531.9
118	22.46	4.36	4109.7	168	33.19	2.19	9660.8
119	22.73	4.34	4198.9	169	33.36	2.13	9790.1
120	23.00	4.32	4289.1	170	33.49	2.06	9919.9
121	23.27	4.30	4380.3	171	33.62	2.00	10050.2
122	23.54	4.28	4472.6	172	33.74	1.93	10180.9
123	23.81	4.25	4565.8	173	33.86	1.87	10312.2
124	24.07	4.23	4660.0	174	33.97	1.80	10443.8
125	24.32	4.20	4755.2	175	34.08	1.74	10575.9
126	24.59	4.17	4851.4	176	34.19	1.67	10708.4
127	24.85	4.14	4948.6	177	34.29	1.61	10841.3
128	25.11	4.11	5046.7	178	34.35	1.54	10974.5
129	25.36	4.08	5145.8	179	34.48	1.47	11108.1
130	25.62	4.05	5245.9	180	34.57	1.40	11242.1
131	25.87	4.02	5346.9	181	34.66	1.34	11376.4
132	26.12	3.98	5448.8	182	34.74	1.27	11510.9
133	26.36	3.95	5551.7	183	34.82	1.20	11645.8
134	26.61	3.91	5655.5	184	34.89	1.13	11781.0
135	26 85	3.87	5760.2	185	34.96	1.06	11916.4
136	27.09	3.84	5865.8	186	35.02	0.99	12052.1
137	27.33	3.80	5972.3	187	35.08	0.92	12188.0
138	27.56	3.76	6079.7	188	35.14	0.85	12324.2
139	27.80	3.72	6187.9	189	35.19	0.78	12460.5
140	28.03	3.68	6297.1	190	35.23	0.71	12597.0
141	28.25	3.63	6407.1	191	35.27	0.64	12733.7
142	28.48	3.59	6517.9	192	35.31	0.57	12870.5
143	28.70	3 55	6629.6	193	35.35	0.50	13007.5
144	28.92	3.50	6742.1	194	35.37	0.43	13144.5
145	29.14	3.46	6855.4	195	35.40	0.36	13281.7
146	29.35	3.41	6969.6	196	35.42	0.29	13418.9
147	29.56	3.36	7084.5	197	35.43	0.21	13556.3
148	29.77	3.31	7200.2	198	35.45	0.14	13693.7
149	29.98	3.26	7316.7	199	35.45	0.07	13831.1

xe de l'orbite de
fférentielles qui
lie moyenne.

	x	y	t		x	y	t
200°	— 35.45	— 0.00	13968.5	250°	— 30.18	— 3.22	20502.6
201	35.45	0.07	14105.9	251	29.97	3.27	20619.9
202	35.44	0.14	14243.4	252	29.77	3.32	20736.4
203	35.43	0.21	14380.7	253	29.56	3.37	20852.1
204	35.42	0.29	14518.0	254	29.35	3.41	20967.0
205	35.40	0.36	14655.3	255	29.14	3.46	21081.2
206	35.37	0.43	14792.5	256	28.92	3.51	21195.5
207	35.34	0.50	14929.6	257	28.70	3.55	21307.0
208	35.31	0.57	15066.5	258	28.48	3.60	21418.7
209	35.27	0.64	15203.3	259	28.25	3.64	21529.5
210	35.23	0.71	15340.0	260	28.03	3.68	21639.5
211	35.18	0.78	15476.5	261	27.80	3.72	21748.6
212	35.13	0.85	15612.8	262	27.56	3.77	21856.9
213	35.08	0.92	15748.9	263	27.33	3.80	21964.3
214	35.02	0.99	15884.8	264	27.09	3.84	22070.8
215	34.95	1.06	16020.5	265	26.85	3.88	22176.4
216	34.89	1.13	16155.9	266	26.61	3.92	22281.1
217	34.81	1.20	16291.0	267	26.36	3.95	22384.9
218	34.74	1.27	16425.9	268	26.11	3.99	22487.7
219	34.66	1.34	16560.5	269	25.87	4.02	22589.7
220	34.57	1.41	16694.8	270	25.61	4.06	22690.6
221	34.48	1.47	16828.7	271	25.36	4.08	22790.7
222	34.35	1.54	16962.3	272	25.11	4.12	22889.8
223	34.29	1.61	17095.6	273	24.85	4.15	22987.9
224	34.19	1.68	17228.4	274	24.59	4.18	23085.1
225	34.08	1.74	17360.9	275	24.31	4.21	23181.3
226	33.97	1.81	17493.0	276	24.07	4.23	23276.5
227	33.86	1.87	17624.6	277	23.80	4.26	23370.7
228	33.74	1.94	17755.8	278	23.54	4.28	23463.9
229	33.62	2.00	17886.6	279	23.27	4.31	23556.2
230	33.49	2.07	18016.9	280	23.00	4.33	23647.4
231	33.36	2.13	18146.7	281	22.73	4.35	23737.6
232	33.19	2.19	18276.0	282	22.46	4.37	23826.8
233	33.09	2.26	18404.8	283	22.19	4.39	23915.0
234	32.94	2.32	18533.1	284	21.92	4.41	24002.2
235	32.80	2.38	18660.8	285	21.64	4.43	24088.3
236	32.65	2.44	18788.0	286	21.36	4.44	24173.4
237	32.49	2.50	18914.6	287	21.09	4.46	24257.4
238	32.34	2.56	19040.6	288	20.81	4.47	24340.5
239	32.18	2.62	19166.1	289	20.53	4.48	24422.5
240	32.01	2.68	19290.9	290	20.25	4.50	24503.4
241	31.84	2.73	19415.1	291	19.97	4.51	24583.3
242	31.67	2.79	19538.7	292	19.69	4.52	24662.2
243	31.50	2.85	19661.6	293	19.41	4.52	24739.9
244	31.32	2.90	19783.9	294	19.13	4.53	24816.7
245	31.14	2.96	19905.4	295	18.85	4.54	24892.3
246	30.95	3.01	20026.3	296	18.57	4.54	24966.9
247	30.76	3.06	20146.5	297	18.28	4.55	25040.5
248	30.57	3.12	20265.9	298	18.00	4.55	25113.0
249	30.37	3.17	20384.6	299	17.72	4.55	25184.4

			t	u	x	y	t
			55	25254.8	350°	— 4.69	— 3.22	27486.9
			55	25324.1	351	4.50	3.17	27508.6
			55	25392.4	352	4.30	3.12	27529.5
			55	25459.6	353	4.17	3.06	27549.7
			4	25525.7	354	3.92	3.01	27569.2
			4	25590.8	355	3.73	2.96	27588.1
			3	25654.8	356	3.55	2.90	27606.2
			2	25717.8	357	3.37	2.85	27623.6
			2	25779.7	358	3.21	2.79	27640.4
				25840.5	359	3.03	2.73	27656.5
				25900.3	360	2.86	2.68	27672.0
				25959.1	361	2.69	2.62	27686.8
				26016.7	362	2.53	2.56	27701.1
			13.78	4.46	26073.4	363	2.37	2.50	27715.8
314			13.50	4.44	26129.0	364	2.22	2.44	27728.8
315			13.23	4.43	26183.6	365	2.07	2.38	27740.3
316			12.95	4.41	26237.2	366	1.93	2.32	27752.3
317			12.68	4.39	26289.7	367	1.78	2.26	27763.7
318			12.41	4.37	26341.2	368	1.68	2.19	27774.6
319			12.14	4.35	26391.7	369	1.51	2.13	27784.9
320			11.87	4.33	26441.1	370	1.38	2.07	27794.8
321			11.60	4.31	26489.6	371	1.25	2.00	27804.3
322			11.33	4.28	26537.0	372	1.13	1.94	27813.1
323			11.06	4.26	26583.5	373	1.01	1.87	27821.6
324			10.80	4.23	26629.0	374	0.90	1.81	27829.6
325			10.55	4.21	26673.4	375	0.79	1.74	7837.3
326			10.28	4.18	26716.9	376	0.68	1.68	27845.5
327			10.02	4.15	26759.4	377	0.58	1.61	27851.3
328			9.76	4.12	26801.0	378	0.52	1.54	27857.7
329			9.51	4.08	26841.6	379	0.39	1.47	27863.9
330			9.25	4.06	26881.2	380	0.30	1.41	27869.6
331			9.00	4.02	26919.9	381	0.21	1.34	27875.0
332			8.75	3.99	26957.6	382	0.13	1.27	27880.1
333			8.51	3.95	26994.5	383	— 0.05	1.20	27885.9
334			8.26	3.92	27030.4	384	+ 0.02	1.13	27889.4
335			8.02	3.88	27065.3	385	0.09	1.06	27893.6
336			7.78	3.84	27099.4	386	0.15	0.99	27897.7
337			7.54	3.80	27132.6	387	0.21	0.92	27901.4
338			7.31	3.77	27164.9	388	0.27	0.85	27905.0
339			7.07	3.72	27196.3	389	0.32	0.78	27909.4
340			6.84	3.68	27226.9	390	0.36	0.71	27911.6
341			6.62	3.64	27256.6	391	0.40	0.64	27914.6
342			6.39	3.60	27285.4	392	0.44	0.57	27917.4
343			6.17	3.55	27313.4	393	0.48	0.50	27920.2
344			5.95	3.51	27340.6	394	0.50	0.43	27922.7
345			5.73	3.46	27367.0	395	0.53	0.36	27925.3
346			5.52	3.41	27392.5	396	0.55	0.29	27927.8
347			5.31	3.37	27417.3	397	0.56	0.21	27930.1
348			5.10	3.32	27441.3	398	0.58	0.14	27932.4
349			4.90	3.27	27464.5	399	0.58	0.07	27934.7
						400	0.58	0.00	27937.0

rdonnées des Planètes perturbatrices, rapportées au plan et au grand axe de l'orbite de a Comète. Leurs distances à cet astre. Forces perturbatrices. Variations différentielles qui éterminent les altérations des élémens de son orbite, ainsi que celles de l'anomalie moyenne.

♈

	x'	y'	z'	ρ	X	Y	dn	tdn	$d\omega$	$\frac{de}{-d\omega(1-\sqrt{1-e^2})}$
	−5.04	+0.21	+1.61	5.85	+0.0059	−0.0004	+0″.0001926	+ 0″.00	− 0″.15	− 0″.04
	5.04	0.23	1.61	5.85	0.0058	0.0008	0.0005774	0.00	0.15	0.04
	5.04	0.25	1.62	5.84	0.0057	0.0011	0.0009554	0.00	0.16	0.03
	5.04	0.26	1.62	5.83	0.0056	0.0015	0.0013250	0.01	0.17	0.03
	5.04	0.28	1.62	5.82	0.0054	0.0019	0.0016735	0.01	0.18	0.02
	5.04	0.30	1.62	5.80	0.0053	0.0023	0.0020285	0.02	0.19	0.02
	5.04	0.32	1.62	5.77	0.0050	0.0027	0.0023549	0.03	0.20	0.01
	5.04	0.34	1.63	5.75	0.0047	0.0031	0.0026610	0.04	0.21	— 0.00
	5.03	0.36	1.63	5.69	0.0042	0.0035	0.0028920	0.06	0.22	+ 0.00
	5.03	0.38	1.63	5.68	0.0041	0.0040	0.0031962	0.07	0.24	0.01
	5.03	0.40	1.63	5.64	0.0037	0.0044	0.0034270	0.09	0.24	0.02
	5.03	0.42	1.63	5.60	0.0032	0.0049	0.0036698	0.10	0.24	0.04
	5.03	0.44	1.64	5.55	0.0028	0.0053	0.0037712	0.12	0.23	0.06
	5.03	0.47	1.64	5.50	0.0022	0.0059	0.0038727	0.14	0.21	0.09
	5.02	0.50	1.64	5.45	0.0016	0.0064	0.0039259	0.15	0.17	0.11
	5.02	0.53	1.65	5.39	0.0009	0.0069	0.0039179	0.17	0.11	0.14
	5.02	0.56	1.65	5.33	+0.0002	0.0075	0.0038497	0.18	− 0.02	0.18
	5.01	0.59	1.65	5.26	−0.0006	0.0081	0.0037086	0.19	+ 0.09	0.22
	5.01	0.63	1.66	5.19	0.0015	0.0088	0.0034812	0.20	0.23	0.26
	5.01	0.67	1.66	5.12	0.0025	0.0094	0.0031607	0.19	0.42	0.31
	5.00	0.71	1.66	5.04	0.0036	0.0102	0.0027336	0.18	0.66	0.35
	5.00	0.75	1 67	4.95	0.0047	0.0109	0.0022061	0.16	0.95	0.41
	4.99	0.79	1.67	4.83	0.0066	0.0119	0.0012125	0.09	1.43	0.45
	4.98	0.84	1.67	4.77	0.0075	0.0126	+0.0006823	+ 0.05	1.75	0.51
	4.98	0.89	1.68	4.68	0.0100	0.0137	−0.0009821	− 0.09	2.47	0.54
	4.97	0.94	1.68	4.57	0.0112	0.0146	0.0018279	0.18	3.00	0.58
	4.96	0.99	1.69	4.47	0.0128	0.0157	0.0029493	0.32	3.69	0.63
	4.95	1.05	1.69	4.36	0.0149	0.0168	0.0046446	0.53	4.61	0.65
	4.94	1.11	1.69	4.24	0.0172	0.0181	0.0065463	0.81	5.68	0.64
	4.92	1.18	1.70	4.12	0.0199	0.0195	0.0089422	1.18	6.99	0.61
	4.91	1.24	1.70	4.00	0.0229	0.0210	0.0117494	1.67	8.52	0.54
	4.89	1.31	1.70	3.87	0.0262	0.0226	0.0147893	2.24	10.32	0.41
	4.87	1.39	1.71	3.70	0.0308	0.0248	0.0191459	3.10	12.86	+ 0.12
	4.85	1.46	1.71	3.60	0.0341	0.0265	0.0227051	3.93	12.39	− 0.06
	4.83	1.55	1.72	3.46	0.0388	0.0287	0.0276335	5.10	17.95	0.47
	4.80	1.63	1.72	3.31	0.0440	0.0311	0.0333084	6.54	21.44	1.01
	4.78	1.72	1.72	3.16	0.0498	0.0339	0.0397971	8.31	25.51	1.73
	4.74	1.81	1.72	3.01	0.0562	0.0370	0.0471751	10.47	30.28	2.65
	4.71	1.90	1.72	2.85	0.0632	0.0404	0.0554356	13.06	26.80	3.82
	4.68	2.00	1.72	2.70	0.0706	0.0442	0.0644411	16.10	42.01	5.23
	4.64	2.10	1.73	2.54	0.0783	0.0484	0.0739709	19.58	49.05	6.91
	4.59	2.20	1.72	2.39	0.0854	0.0529	0.0831499	23.30	56.33	8.71
	4.54	2.31	1.72	2.24	0.0937	0.0573	0.0941472	27.89	64.81	11.10
	4.49	2.42	1.72	2.09	0.0928	0.0613	0.0939907	29.43	69.13	11.43
	4.43	2.53	1.72	1.96	0.0879	0.0642	0.0891036	29.45	71.14	10.73
	4.37	2.65	1.71	1.85	0.0724	0.0644	0.0709828	24.75	66.43	− 7.12
	4.34	2.77	1.71	1.77	−0.0426	0.0607	−0.0341772	−12.56	51.35	+ 1.42
	4.23	2.89	1.70	1.71	+0.0021	0.0520	+0.0227653	+ 8.81	+23.81	16.06
	4.16	3.01	1.69	1.70	0.0559	0.0392	0.0930102	37.87	−13.65	35.92
	4.07	3.14	1.68	1.73	0.1074	0.0246	0.1620303	69.36	53.64	37.57

Ψ

u	x'	y'	z'	ρ	X	Y	dn	tdn	$d\omega$	$\frac{di}{-d\omega(1-\sqrt{1-e^2})}$
50	− 3.98	+ 3.26	+1.67	1.82	+ 0.1444	− 0.0120	+0″2133236	+ 95″94	− 86″17	+ 76″17
51	3.87	3.40	1.65	1.95	0.1625	− 0.0023	0.2396429	113.15	106.76	88.32
52	3.78	3.52	1.64	2.12	0.1632	+ 0.0001	0.2433930	120.57	112.20	94.61
53	3.67	3.65	1.62	2.33	0.1535	+ 0.0003	0.2322804	120.63	108.93	95.60
54	3.55	3.78	1.60	2.56	0.1387	− 0.0015	0.2133924	116.10	101.15	93.45
55	3.42	3.91	1.58	2.84	0.1226	0.0044	0.1922854	109.53	88.72	89.86
56	3.28	4.04	1.55	3.13	0.1072	0.0076	0.1714900	102.20	76.69	85.72
57	3.14	4.17	1.52	3.45	0.0934	0.0108	0.1526070	95.10	64.09	81.69
58	2.98	4.30	1.49	3.79	0.0813	0.0137	0.1358400	88.45	54.23	77.97
59	2.82	4.42	1.45	4.14	0.0709	0.0164	0.1211649	83.01	44.27	74.62
60	2.65	4.54	1.41	4.51	0.0657	0.0657	0.1141790	81.03	39.02	74.87
61	2.46	4.66	1.37	4.90	0.0545	0.0544	0.0973744	72.08	26.87	69.13
62	2.27	4.77	1.32	5.31	0.0478	0.0478	0.0875072	67.52	19.12	66.78
63	2.07	4.87	1.27	5.72	0.0421	0.0421	0.0788855	63.42	12.02	64.72
64	1.86	4.97	1.22	6.15	0.0370	0.0370	0.0710740	59.50	− 5.31	62.76
65	1.64	5.06	1.16	6.59	0.0324	0.0324	0.0639283	55.69	+ 1.06	60.84
66	1.34	5.16	1.08	7.12	0.0275	0.0275	0.0559293	50.68	8.18	57.88
67	1.17	5.21	1.04	7.52	0.0245	0.0245	0.0511436	48.18	12.77	56.91
68	0.92	5.27	0.97	8.00	0.0211	0.0211	0.0452900	44.33	18.68	54.78
69	0.67	5.32	0.89	8.48	0.0178	0.0178	0.0396836	40.34	24.19	52.45
70	0.40	5.36	0.81	8.99	0.0147	0.0147	0.0342443	36.14	29.79	49.87
71	− 0.13	5.38	0.73	9.50	0.0118	0.0321	0.0289271	31.67	34.84	46.97
72	+ 0.15	5.38	0.64	10.02	0.0089	0.0325	0.0236236	26.83	39.77	43.65
73	0.43	5.37	0.55	10.54	0.0062	0.0328	0.0236168	27.80	45.02	40.65
74	0.72	5.34	0.46	11.07	0.0036	0.0329	0.0134476	16.40	53.34	36.03
75	1.04	5.29	0.36	11.65	+ 0.0007	0.0329	0.0073685	9.31	55.04	30.99
76	1.32	5.22	0.25	12.16	− 0.0017	0.0328	+0.0030387	+ 3.97	59.25	26.08
77	1.61	5.13	0.15	12.70	0.0042	0.0325	−0.0020219	− 2.73	63.57	20.44
78	1.91	5.02	+0.04	13.27	0.0067	0.0321	0.0072476	10.14	67.75	13.92
79	2.22	4.88	−0.07	13.83	0.0092	0.0315	0.0125661	18.18	71.66	+ 6.61
80	2.51	4.72	0.18	14.38	0.0116	0.0308	0.0207440	31.02	75.12	− 1.09
81	2.80	4.53	0.30	14.94	0.0140	0.0299	0.0228203	35.25	78.24	9.65
82	3.08	4.31	0.41	15.49	0.0163	0.0288	0.0279517	44.59	80.93	18.96
83	3.35	4.07	0.53	16.04	0.0186	0.0275	0.0330074	54.36	83.09	29.01
84	3.60	3.81	0.64	16.58	0.0208	0.0260	0.0379754	64.53	84.66	39.79
85	3.85	3.51	0.76	17.12	0.0230	0.0243	0.0428023	75.03	85.56	51.27
86	4.07	3.19	0.87	17.64	0.0250	0.0224	0.0474675	85.80	85.70	63.44
87	4.27	2.84	0.98	18.15	0.0270	0.0202	0.0518902	96.68	85.00	76.17
88	4.45	2.47	1.08	18.65	0.0287	0.0178	0.0560308	107.57	83.38	89.37
89	4.60	2.07	1.18	19.13	0.0304	0.0152	0.0598720	118.40	80.63	103.15
90	4.72	1.66	1.27	19.58	0.0318	0.0125	0.0631662	128.62	77.06	116.60
91	4.81	1.22	1.35	20.02	0.0329	0.0094	0.0660613	138.46	72.07	130.42
92	4.86	0.77	1.43	20.43	0.0339	0.0062	0.0683510	147.42	66.04	143.80
93	4.86	+ 0.29	1.49	20.81	0.0345	− 0.0027	0.0700024	155.32	58.43	156.80
94	4.83	− 0.19	1.54	21.16	0.0348	+ 0.0010	0.0709570	161.90	49.67	168.97
95	4.75	0.68	1.58	21.48	0.0347	0.0047	0.0709691	166.47	39.50	179.58
96	4.63	1.16	1.60	21.76	0.0342	0.0086	0.0701468	169.11	28.09	188.65
97	4.46	1.65	1.61	21.99	0.0333	0.0125	0.0683613	169.32	15.44	195.62
98	4.23	2.12	1.60	22.19	0.0319	0.0164	0.0655522	166.77	+ 1.64	200.04
99	3.96	2.58	1.58	22.34	0.0301	0.0202	0.0616988	161.11	− 13.10	201.45

$\mathfrak{T}$

u	x'	y'	z'	ρ	X	Y	dn	tdn	$d\omega$	$\frac{di}{-d\omega(1-\sqrt{1-e^2})}$
100	+ 3.64	— 3.02	—1.53	22.45	— 0.0277	+ 0.0239	—0″.0569304	—152″.66	— 28″.62	— 199″.38
101	3.27	3.43	1.47	22.50	0.0259	0.0274	0.0528639	145.48	42.97	199.58
102	2.86	3.80	1.39	22.51	0.0217	0.0305	0.0438448	123.79	60.79	183.88
103	2.40	4.13	1.28	22.47	0.0180	0.0326	0.0288806	83.63	74.34	167.85
104	1.91	4.41	1.16	22.38	0.0139	0.0357	0.0273170	81.12	92.30	150.21
105	1.38	4.64	1.03	22.23	0.0096	0.0375	0.0179865	54.75	106.87	126.77
106	0.83	4.80	0.87	22.05	0.0050	0.0387	—0.0082055	— 25.60	120.08	99.11
107	+ 0.25	4.90	0.71	21.82	— 0.0002	0.0393	+0.0018711	+ 5.98	131.64	78.73
108	— 0.33	4.96	0.53	21.57	+ 0.0046	0.0395	0.0119823	39.23	141.88	— 32.64
109	0.92	4.88	0.34	21.24	0.0094	0.0385	0.0179865	60.31	148.27	+ 5.82
110	1.50	4.77	—0.14	20.91	0.0141	0.0371	0.0314472	107.96	152.80	45.94
111	2.07	4.57	+0.06	20.56	0.0185	0.0351	0.0403562	141.81	154.75	87.22
112	2.61	4.31	0.27	20.18	0.0226	0.0325	0.0474607	170.67	153.37	129.02
113	3.12	4.08	0.47	19.90	0.0262	0.0302	0.0557126	204.96	153.27	168.54
114	3.58	3.58	0.67	19.52	0.0295	0.0270	0.0616370	231.94	112.09	207.79
115	4.00	3.09	0.86	19.19	0.0322	0.0219	0.0664346	255.65	135.30	247.64
116	4.35	2.57	1.04	18.93	0.0344	0.0177	0.0704478	277.17	124.72	282.24
117	4.63	2.00	1.20	18.73	0.0359	0.0134	0.0725964	291.95	111.68	311.53
118	4.85	1.70	1.35	18.68	0.0368	0.0110	0.0738780	303.61	105.25	334.60
119	4.99	0.75	1.47	18.52	0.0372	+ 0.0044	0.0734496	308.41	81.27	357.61
120	5.04	— 0.09	1.57	18.56	0.0370	— 0.0001	0.0719221	308.48	64.19	372.48
121	5.02	+ 0.58	1.65	18.71	0.0363	0.0044	0.0694519	304.22	46.34	381.48
122	4.91	1.39	1.70	18.93	0.0350	0.0096	0.0656605	293.67	24.36	386.20
123	4.71	1.89	1.72	19.31	0.0332	0.0126	0.0611914	279.39	— 9.24	380.91
124	4.44	2.13	1.72	19.82	0.0309	0.0139	0.0561374	261.60	+ 0.42	366.36
125	4.08	3.12	1.68	20.33	0.0282	0.0197	0.0495060	235.41	27.45	355.04
126	3.66	3.66	1.62	21.00	0.0252	0.0230	0.0432117	209.64	46.04	333.51
127	3.16	4.15	1.53	21.74	0.0218	0.0258	0.0351818	174.06	63.36	305.51
128	2.61	4.57	1.40	22.55	0.0181	0.0283	0.0273737	138.15	79.78	271.79
129	2.00	4.91	1.26	23.41	0.0142	0.0303	0.0192268	98.94	95.03	232.35
130	1.35	5.16	1.09	24.32	0.0101	0.0319	0.0108623	56.98	108.97	187.47
131	— 0.67	5.32	0.89	25.25	0.0057	0.0330	+0.0023863	+ 12.76	121.24	137.38
132	+ 0.03	5.38	0.68	26.19	+ 0.0013	0.0336	—0.0059670	— 32.51	131.51	83.30
133	0.73	5.34	0.45	27.14	— 0.0033	0.0337	0.0144551	80.25	139.95	+ 23.12
134	1.43	5.19	+0.21	28.07	0.0079	0.0331	0.0225967	127.79	145.89	— 40.00
135	2.11	4.92	—0.03	28.98	0.0125	0.0319	0.0303514	174.83	148.96	107.06
136	2.74	4.57	0.28	29.84	0.0169	0.0301	0.0375763	220.41	149.56	175.51
137	3.27	4.14	0.50	30.61	0.0209	0.0278	0.0436401	260.63	147.26	240.16
138	3.83	3.53	0.75	31.40	0.0252	0.0242	0.0497434	302.43	140.50	314.25
139	4.25	2.88	0.97	32.07	0.0288	0.0202	0.0542417	335.64	130.62	380.35
140	4.57	2.15	1.16	32.66	0.0318	0.0155	0.0574104	361.52	117.37	441.33
141	4.78	1.36	1.33	33.14	0.0342	0.0101	0.0590256	378.19	96.88	494.33
142	4.87	+ 0.53	1.46	33.52	0.0356	— 0.0041	0.0588880	383.83	94.26	537.13
143	4.82	— 0.32	1.55	33.78	0.0361	+ 0.0025	0.0568117	376.64	53.58	564.04
144	4.58	1.17	1.60	33.86	0.0350	0.0091	0.0548283	369.66	+ 25.65	552.12
145	4.30	1.99	1.61	33.92	0.0334	0.0157	0.0467812	320.70	— 2.22	564.07
146	3.83	2.76	1.56	33.79	0.0302	0.0222	0.0387237	269.89	32.38	530.35
147	3.26	3.44	1.47	33.55	0.0258	0.0280	0.0293193	207.71	61.40	476.95
148	2.57	4.02	1.32	33.19	0.0203	0.0329	0.0184371	132.75	89.28	399.64
149	1.79	4.47	1.14	32.72	0.0139	0.0367	0.0072676	53.18	113.36	302.48

$\mathfrak{V}$

u	x'	y'	z'	ρ	X	Y	dn	tdn	$d\omega$	$d\varepsilon$ $-d\omega(1-\sqrt{1-e^2})$
150	+ 0.95	− 4.77	−0.91	32.15	− 0.0069	+ 0.0391	+0″.0043196	+ 32″.11	−133″.34	− 189″.05
151	+ 0.07	4.92	0.65	31.50	+ 0.0004	0.0400	0.0154372	116.58	147.88	− 64.84
152	− 0.82	4.90	0.37	30.81	0.0077	0.0394	0.0255830	196.24	156.68	+ 58.33
153	1.69	4.71	−0.07	30.09	0.0145	0.0373	0.0342494	266.81	159.14	192.46
154	2.51	4.37	+0.18	29.39	0.0207	0.0338	0.0411268	325.33	155.90	316.03
155	3.24	3.87	0.52	28.73	0.0259	0.0293	0.0459572	369.09	147.29	421.19
156	3.87	3.24	0.80	28.13	0.0302	0.0239	0.0488386	398.17	134.26	514.36
157	4.38	2.51	1.06	27.66	0.0332	0.0180	0.0497090	411.35	117.83	587.44
158	4.76	1.69	1.28	27.32	0.0350	0.0117	0.0487486	411.07	98.93	639.96
159	4.98	− 0.81	1.46	27.14	0.0358	+ 0.0054	0.0461671	393.41	78.29	671.18
160	5.04	+ 0.10	1.60	27.14	0.0354	− 0.0008	0.0425391	367.78	56.79	682.50
161	4.95	1.01	1.69	27.32	0.0340	0.0068	0.0371996	326.26	35.39	671.45
162	4.71	1.90	1.72	27.69	0.0318	0.0123	0.0313509	278.90	− 14.32	642.79
163	4.33	2.73	1.71	28.22	0.0288	0.0174	0.0249016	224.66	+ 5.78	596.85
164	3.81	3.48	1.68	28.90	0.0252	0.0218	0.0180880	165.48	24.88	535 25
165	3.18	4.13	1.53	29.71	0.0210	0.0257	0.0110995	100.61	41.80	459.64
166	2.45	4.65	1.37	30.61	0.0163	0.0287	+0.0041684	+ 39.20	56.86	370.72
167	1.57	5.06	1.16	31.66	0 0107	0.0312	−0.0031213	− 29.75	71.40	263.73
168	− 0.78	5.30	0.93	32.57	+ 0.0058	0.0329	0.0091379	88.28	81.87	164.76
169	+ 0.14	5.38	0.66	33.67	− 0.0000	0.0337	0.0153632	150.41	91.82	+ 44.38
170	0.99	5.30	0.29	34.63	0.0055	0.0335	0.0205135	203.49	98 02	− 71.21
171	1.85	5.04	+0.06	35.60	0.0111	0.0325	0.0250738	251.99	101.70	194.85
172	2.65	4.51	−0.24	36.48	0.0167	0.0296	0.0287224	292.42	101.19	319.41
173	3.37	4.18	0.54	37.30	0.0219	0.0281	0.0316743	326.59	103.57	437.47
174	3.88	3.26	0.80	37.89	0.0280	0.0241	0.0341686	356.85	101.10	576.98
175	4.33	2.71	1.01	38.44	0.0300	0.0192	0.0326479	345.28	91.98	573.01
176	4.74	1.58	1.29	38.95	0.0339	0.0115	0.0310395	332.38	79.67	728.57
177	4.86	+ 0.59	1.45	39.20	0.0358	− 0.0044	0.0286171	303.74	66.74	782.72
178	4.77	− 0.67	1.58	39.21	0.0360	+ 0.0051	0.0224918	246.83	47.36	800.51
179	4.54	1.43	1.61	39.17	0.0351	0.0112	0.0178059	197.79	34.32	791.50
180	4.09	2.38	1.59	38.88	0.0322	0.0190	0.0110415	124.13	+ 16.00	737.54
181	3.47	3.22	1.50	38.43	0.0276	0.0262	−0.0037581	− 42.75	− 2.46	643.55
182	2.70	3.93	1.34	37.82	0.0215	0.0322	+0.0036878	+ 42.45	20.20	512.31
183	1.80	4.46	1.14	37.07	0.0142	0.0368	0.0106511	124.01	36.31	350.07
184	+ 0.94	4.80	0.87	36.32	− 0.0070	0.0396	0.0162271	191.17	48.70	− 187.96
185	− 0.19	4.93	0.57	35.28	+ 0.0023	0.0401	0.0212498	253.22	60.77	+ 25.55
186	1.19	4.84	−0.25	34.34	0.0104	0.0388	0.0241913	291.56	67.95	213.44
187	2.05	4.54	+0.10	32.85	0.0218	0.0356	0.0270538	329.73	78.56	479.68
188	3.02	4.14	0.43	32.50	0.0242	0.0317	0.0253714	312.68	74.33	535.82
189	3.77	3.37	0.75	31.70	0.0292	0.0251	0.0230698	287.46	72.28	663.55
190	4.35	2.56	0.83	31.07	0.0328	0.0186	0.0199579	251.41	69.10	751.32
191	4.77	1.65	1.29	30.90	0.0348	0.0116	0.0159759	203.43	64.47	804.37
192	5.00	− 0.68	1.48	30.38	0.0355	+ 0.0047	0.0115116	148.16	59.05	825.49
193	5.04	+ 0.33	1.62	30.35	0.0349	− 0.0022	0.0066938	87.07	52.93	821.59
194	4.89	1.32	1.71	30.55	0.0331	0.0086	+0.0019388	+ 25.49	46.51	776.74
195	4.57	2.27	1.73	31.14	0.0291	0.0145	−0.0028089	− 37.31	38.29	684.46
196	4.07	3.13	1.68	31.52	0.0268	0.0197	0.0067176	90.14	34.04	630.95
197	3.44	3.89	1.58	32.24	0.0225	0.0242	0.0102896	139.49	27.93	530.13
198	2.69	4.51	1.42	32.81	0.0193	0.0279	0.0131372	179.48	24.62	455.54
199	1.85	4.98	1.22	33.47	0.0155	0.0307	0.0153372	212.13	21.20	366.50

$\mathfrak{T}$

u	x'	y'	z'	ρ	X	Y	dn	tdn	$d\omega$	$\frac{d\iota}{-d\omega(1-\sqrt{1-e^2})}$
200	— 0.94	+ 5.27	+0.97	34.92	+ 0.0066	— 0.0326	—0″.0168323	—235″.12	— 10″.33	+ 155″.99
201	— 0.10	5.37	0.75	35.78	0.0014	0.0335	0.0173564	244.83	— 5.42	+ 31.22
202	+ 0.84	5.32	0.45	36.70	— 0.0046	0.0336	0.0170480	242.82	+ 0.66	— 110.73
203	1.76	5.08	+0.14	37.56	0.0106	0.0326	0.0158015	227.23	7.06	253.23
204	2.61	4.66	—0.18	38.35	0.0164	0.0305	0.0136143	197.66	13.85	390.99
205	3.36	4.06	0.49	39.04	0.0220	0.0273	0.0105249	154.24	21.10	520.47
206	3.99	3.32	0.78	39.55	0.0263	0.0229	0.0067095	99.25	27.82	612.57
207	4.47	2.45	1.05	39.93	0.0311	0.0174	—0.0019445	— 29.03	36.89	732.35
208	4.77	1.48	1.27	40.15	0.0342	0.0108	+0.0032115	+ 48.39	45.22	801.47
209	4.87	+ 0.47	1.44	40.19	0.0360	— 0.0035	0.0086064	130.84	53.43	839.16
210	4.78	— 0.58	1.55	40.04	0.0363	+ 0.0045	0.0138808	213.07	61.18	839.68
211	4.48	1.59	1.60	39.71	0.0348	0.0126	0.0186557	288.72	67.92	799.24
212	4.00	2.54	1.57	39.20	0.0316	0.0204	0.0186488	291.16	73.02	716.71
213	3.33	3.37	1.48	38.52	0.0266	0.0275	0.0249568	393.04	75.90	594.65
214	2.52	4.05	1.32	37.69	0.0201	0.0333	0.0257963	409.76	76.00	439.01
215	1.60	4.55	1.10	36.74	0.0125	0.0375	0.0248312	397.81	73.00	259.01
216	+ 0.61	4.84	0.84	35.70	— 0.0042	0.0397	0.0220755	356.65	66.75	— 66.75
217	— 0.41	4.92	0.53	34.61	+ 0.0042	0.0400	0.0177113	288.53	57.36	+ 125.50
218	1.41	4.79	—0.21	33.52	0.0122	0.0383	0.0120611	198.12	45.26	306.02
219	2.34	4.45	+0.12	32.46	0.0193	0.0349	+0.0055943	+ 92.64	31.01	464.53
220	3.18	3.93	0.45	31.50	0.0254	0.0300	—0.0012755	— 21.29	+ 15.31	594.14
221	3.88	3.24	0.76	30.66	0.0300	0.0242	0.0080950	136.22	— 1.12	690.97
222	4.43	2.44	1.04	29.95	0.0333	0.0177	0.0144888	245.76	17.65	753.07
223	4.81	1.54	1.28	29.50	0.0351	0.0109	0.0201540	344.54	33.55	783.82
224	5.02	— 0.59	1.47	39.23	0.0356	+ 0.0041	0.0231695	399.18	48.51	784.60
225	5.04	+ 0.38	1.61	29.16	0.0350	— 0.0025	0.0285538	495.72	62.10	756.70
226	4.89	1.34	1.69	29.30	0.0332	0.0086	0.0310842	543.76	73.98	706.93
227	4.58	2.25	1.71	29.62	0.0305	0.0143	0.0324484	571.89	84.21	638.19
228	4.12	3.08	1.68	30.09	0.0271	0.0193	0.0326565	579.84	92.38	554.32
229	3.52	3.81	1.60	30.69	0.0231	0.0236	0.0317413	567.74	98.43	458.47
230	2.82	4.41	1.46	31.38	0.0185	0.0272	0.0297407	535.84	101.29	353.66
231	2.04	4.88	1.28	32.12	0.0136	0.0301	0.0267097	484.69	103.83	242.61
232	1.19	5.20	1.07	32.85	0.0083	0.0321	0.0227102	415.05	102.83	127.71
233	— 0.32	5.36	1.82	33.65	+ 0.0028	0.0332	0.0178145	327.87	99.50	+ 11.69
234	+ 0.56	5.36	0.55	34.38	— 0.0027	0.0336	0.0121218	224.13	93.41	— 103.56
235	1.43	5.19	+0.26	35.05	0.0083	0.0330	—0.0056481	—105.39	84.54	198.09
236	2.24	4.86	—0.04	35.65	0.0138	0.0315	+0.0014000	+ 26.46	72.80	322.96
237	2.98	4.39	0.33	36.14	0.0191	0.0290	0.0088744	167.85	58.10	421.25
238	3.63	3.79	0.61	36.53	0.0239	0.0256	0.0165794	315.68	40.80	508.49
239	4.16	3.06	0.87	36.79	0.0282	0.0212	0.0242447	464.68	— 20.81	581.29
240	4.55	2.24	1.10	36.91	0.0318	0.0159	0.0315762	609.13	+ 1.42	636.38
241	4.79	1.36	1.30	36.89	0.0344	0.0099	0.0382214	742.07	25.36	656.22
242	4.87	+ 0.43	1.45	36.72	0.0360	— 0.0032	0.0437983	855.76	50.25	681.59
243	4.79	— 0.51	1.55	36.40	0.0362	+ 0.0039	0.0477572	942.01	75.07	666.96
244	4.55	1.42	1.59	35.93	0.0351	0.0112	0.0501184	991.53	98.78	626.27
245	4.15	2.28	1.59	35.33	0.0325	0.0183	0.0503954	1003.14	129.97	559.62
246	3.61	3.06	1.52	34.59	0.0286	0.0249	0.0482915	967.10	137.56	469.80
247	2.95	3.72	1.41	33.75	0.0234	0.0306	0.0438689	883.80	150.33	358.24
248	2.19	4.26	1.25	32.80	0.0172	0.0351	0.0372770	755.45	157.48	238.22
249	1.36	4.64	1.04	31.76	0.0102	0.0383	0.0287826	586.58	158.50	107.90

$\mathfrak{U}$

u	x'	y'	z'	ρ	X	Y	dn	tdn	$d\varpi$	$d\iota$ $-d\varpi(1-\sqrt{1-e^2})$
250	+ 0.48	— 4.86	—0.80	30.71	— 0.0029	+ 0.0400	+0".0187503	+384".43	+153".38	+ 22".79
251	— 0.40	4.92	0.54	29.63	+ 0.0044	0.0401	+0.0079680	+164.30	142.40	147.84
252	1.26	4.82	—0.26	28.55	0.0114	0.0387	—0.0032744	— 67.90	126.36	261.43
253	2.01	4.60	+0.00	27.58	0.0172	0.0363	0.0134341	280.13	108.08	350.89
254	2.83	4.18	0.31	26.53	0.0233	0.0323	0.0247865	519.70	83.05	439.24
255	3.49	3.66	0.58	25.66	0.0280	0.0277	0.0342219	721.43	58.03	499.53
256	4.04	3.04	0.84	24.90	0.0316	0.0229	0.0422621	895.77	33.30	540.65
257	4.47	2.33	1.07	24.28	0.0341	0.0169	0.0489727	1043.46	+ 6.26	561.25
258	4.80	1.59	1.27	23.80	0.0357	0.0114	0.0531460	1138.31	— 18.06	566.84
259	4.99	— 0.80	1.43	23.48	0.0363	0.0057	0.0575738	1239.53	41.20	556.51
260	5.05	+ 3.00	1.56	23.32	0.0359	+ 0.0003	0.0595125	1287.82	62.31	336.66
261	5.00	0.80	1.65	23.40	0.0349	— 0.0050	0.0599666	1304.18	81.19	499.12
262	4.83	1.57	1.70	23.42	0.0332	0.0098	0.0591048	1291.85	97.65	456.78
263	4.55	2.30	1.71	23.64	0.0309	0.0143	0.0569666	1251.23	101.58	407.63
264	4.18	2.98	1.69	23.97	0.0281	0.0184	0.0537205	1185.65	123.00	353.44
265	3.72	3.59	1.63	24.36	0.0250	0.0220	0.0494802	1097.32	131.77	296.62
266	3.19	4.12	1.54	24.80	0.0214	0.0251	0.0443385	987.91	137.82	237.03
267	2.60	4.57	1.42	25.28	0.0176	0.0278	0.0384192	860.01	141.85	176.42
268	1.97	4.91	1.27	26.76	0.0136	0.0299	0.0319100	717.58	143.20	101.67
269	1.31	5.17	1.10	26.23	0.0095	0.0315	0.0292694	661.19	142.14	58.08
270	— 0.62	5.32	0.91	26.71	0.0052	0.0326	0.0171582	389.33	138.79	+ 0.48
271	+ 0.06	5.38	0.70	27.14	+ 0.0009	0.0332	0.0091857	209.35	133.17	— 54.37
272	0.74	5.34	0.49	27.53	— 0.0035	0.0333	—0.0009246	— 21.16	125.34	106.35
273	1.40	5.20	0.27	27.87	0.0078	0.0328	+0.0112266	+258.07	115.42	154.65
274	2.03	4.96	+0.04	28.14	0.0120	0.0318	0.0159907	369.15	103.74	199.36
275	2.62	4.65	—0.18	28.35	0.0160	0.0301	0.0243324	564.06	89.59	238.23
276	3.15	4.25	0.40	28.52	0.0199	0.0280	0.0324845	756.13	74.18	272.59
277	3.63	3.79	0.61	28.59	0.0235	0.0254	0.0402788	941.34	57.15	301.18
278	4.03	3.26	0.81	28.69	0.0267	0.0222	0.0475295	1115.22	38.81	323.50
279	4.36	2.68	0.98	28.52	0.0296	0.0186	0.0541247	1274.97	— 19.61	346.73
280	4.61	2.06	1.15	28.37	0.0319	0.0145	0.0598427	1415.12	+ 0.39	348.84
281	4.78	1.42	1.28	28.14	0.0338	0.0101	0.0645406	1532.04	20.59	351.10
282	4.86	0.75	1.40	27.84	0.0350	0.0054	0.0680705	1621.90	40.68	337.40
283	4.86	+ 0.08	1.49	27.46	0.0356	— 0.0004	0.0702741	1680.60	60.18	334.84
284	4.78	— 0.58	1.55	27.01	0.0356	+ 0.0047	0.0710810	1706.10	78.70	316.77
285	4.62	1.23	1.59	26.50	0.0348	0.0098	0.0703980	1695.76	95.72	292.72
286	4.38	1.85	1.60	25.92	0.0333	0.0148	0.0682254	1649.24	110.86	263.27
287	4.06	2.43	1.58	25.28	0.0311	0.0196	0.0644687	1564.08	123.74	229.23
288	3.69	2.96	1.54	24.61	0.0284	0.0241	0.0593319	1444.16	134.05	191.69
289	3.26	3.44	1.47	23.86	0.0250	0.0282	0.0528467	1290.64	141.54	151.63
290	2.79	3.85	1.38	23.09	0.0211	0.0317	0.0452003	1107.56	146.12	110.19
291	2.28	4.21	1.27	22.29	0.0168	0.0348	0.0374404	920.41	147.74	68.41
292	1.72	4.49	1.13	21.44	0.0121	0.0372	0.0268284	661.65	146.40	— 26.03
293	1.18	4.70	0.99	20.61	0.0074	0.0388	0.0172081	425.73	142.49	+ 12.06
294	0.53	4.84	0.84	19.68	— 0.0018	0.0398	+0.0055958	+138.87	134.92	53.73
295	+ 0.04	4.91	0.67	18.90	+ 0.0025	0.0402	—0.0048606	—120.99	127.37	82.89
296	— 0.52	4.92	0.50	18.05	0.0073	0.0399	0.0136172	339.98	116.90	113.24
297	1.07	4.86	0.32	17.22	0.0120	0.0391	0.0237060	593.61	104.98	139.77
298	1.66	4.72	—0.12	16.34	0.0170	0.0376	0.0342271	859.54	90.43	165.76
299	2.09	4.56	+0.03	15.63	0.0206	0.0361	0.0418511	1053.99	78.29	210.77

☿

u	x'	y'	z'	ρ	X	Y	dn	tdn	$d\omega$	$\frac{ds}{-d\omega(1-\sqrt{1-e^2})}$
300	− 2.56	− 4.34	+0.21	14.88	+ 0.0245	+ 0.0339	−0″0502405	−1268″81	+64″12	+ 195″84
301	2.99	4.07	0.38	14.17	0.0280	0.0315	0.0577270	1461.88	50.01	207.02
302	3.38	3.76	0.54	13.52	0.0312	0.0289	0.0651720	1654.87	36.13	214.81
303	3.74	3.41	0.69	12.92	0.0340	0.0262	0.0701692	1786.48	22.79	219.48
304	4.05	3.04	0.84	12.38	0.0364	0.0233	0.0751802	1919.02	+10.14	221.35
305	4.31	2.64	0.97	11.90	0.0386	0.0204	0.0796647	2038.68	− 1.79	221.49
306	4.54	2.23	1.10	11.49	0.0401	0.0176	0.0825907	2118.85	12.33	217.65
307	4.72	1.81	1.21	11.14	0.0414	0.0148	0.0849751	2185.37	21.98	212.59
308	4.86	1.38	1.31	10.86	0.0422	0.0121	0.0864820	2229.48	30.53	205.71
309	4.96	0.94	1.40	10.65	0.0427	0.0095	0.0871442	2251.85	37.94	197.25
310	5.02	0.51	1.48	10.49	0.0428	0.0069	0.0869774	2252.74	44.34	187.44
311	5.05	− 0.08	1.55	10.39	0.0425	0.0045	0.0861052	2235.21	49.80	176.67
312	5.04	+ 0.34	1.60	10.35	0.0420	+ 0.0020	0.0845364	2199.36	54.39	165.07
313	5.00	0.76	1.64	10.34	0.0412	− 0.0003	0.0824309	2149.25	58.21	153.05
314	4.93	1.16	1.68	10.38	0 0401	0.0026	0.0797525	2083.85	61.31	140.79
315	4.83	1.55	1.70	10.68	0.0384	0.0052	0.0758046	1984.84	63.93	126.41
316	4.71	1.92	1.71	10.53	0.0375	0.0070	0.0735081	1928.64	65.72	116.43
317	4.57	2.27	1.71	10.64	0.0361	0.0091	0.0699576	1839.16	67.11	104.67
318	4.40	2.61	1.71	10.76	0.0345	0.0110	0.0662265	1744.48	68.01	93.38
319	4.22	2.92	1.69	10.89	0.0329	0.0129	0.0623560	1645.68	68.47	82.60
320	4.02	3.22	1.63	11.01	0.0312	0.0147	0.0584184	1544.64	68.49	72.44
321	3.80	3.50	1.64	11.15	0.0295	0.0163	0.0543983	1440.98	68.13	62.85
322	3.58	3.75	1.61	11.28	0.0278	0.0179	0.0503506	1336.15	67.45	53.88
323	3.34	3.99	1.56	11.41	0.0260	0.0193	0.0462857	1230.43	66.43	45.54
324	3.10	4.20	1.52	11.52	0.0243	0.0206	0.0423551	1127.87	65.09	38.01
325	2.85	4.39	1.47	11.64	0.0226	0.0218	0.0383883	1023.94	63.59	31.07
326	2.59	4.57	1.41	11.73	0.0208	0.0229	0.0344025	919.13	61.69	24.49
327	2.34	4.72	1.36	11.81	0.0192	0.0239	0.0306559	820.33	59.69	18.81
328	2.08	4.86	1.30	11.88	0.0175	0.0248	0.0269041	721.05	57.54	13.58
329	1.82	4.98	1.23	11.94	0.0158	0.0256	0.0232452	623.94	55.19	8.88
330	1.57	5.08	1.17	12.00	0.0142	0.0262	0.0196620	528.53	52.76	4.67
331	1.31	5.17	1.10	12.04	0.0125	0.0268	0.0162044	436.22	50.23	+ 0.96
332	1.06	5.24	1.03	12.06	0.0110	0.0272	0.0128517	346.44	47.64	− 2.30
333	0.81	5.29	0.96	12.07	0.0094	0.0276	0.0096280	259.90	45.01	5.13
334	0.56	5.33	0.89	12.07	0.0078	0.0280	0.0064577	174.55	42.33	7.64
335	0.32	5.36	0.82	12.05	0.0064	0.0282	0.0035694	96.60	39.70	9.64
336	− 0.09	5.38	0.75	12.03	0.0050	0.0283	−0.0007380	− 19.99	37.05	11.37
337	+ 0.14	5.38	0.68	12.00	0.0036	0.0284	+0.0019507	+ 52.92	34.45	12.80
338	0.45	5.37	0.58	11.99	0.0017	0.0285	0.0053825	146.21	31.45	14.53
339	0.58	5.35	0.54	11.88	+ 0.0009	0.0284	0.0068929	187.46	29.33	14.78
340	0.78	5.33	0.47	11.82	− 0.0003	0.0282	0.0091223	248.37	26.91	15.42
341	0.99	5.30	0.41	11.74	0.0016	0.0281	0.0112897	307.72	24.51	15.88
342	1.18	5.25	0.34	11.65	0.0027	0.0278	0.0132663	361.97	22.21	16.12
343	1.37	5.21	0.28	11.56	0.0039	0.0276	0.0140610	384.05	20.01	16.20
344	1.47	5.17	0.24	11.42	0.0045	0.0273	0.0160213	438.00	18.34	15.77
345	1.72	5.09	0.15	11.35	0.0060	0.0269	0.0183034	501.18	15.89	15.92
346	1.89	5.03	0.09	11.23	0.0069	0.0265	0.0196981	539.58	14.00	15.60
347	2.04	4.96	+0.04	11.11	0.0079	0.0260	0.0209659	574.83	12.21	15.19
348	2.19	4.89	−0.02	10.98	0.0087	0.0256	0.0220806	605.92	10.52	14.70
349	2.32	4.82	0.07	10.84	0.0095	0.0251	0.0229614	630.62	9.01	14.12

$\mathfrak{T}$

u	x'	y'	z'	ρ	X	Y	dn	tdn	$d\omega$	d_1 $-d\omega(1-\sqrt{1-e^2})$
350	+ 2.47	+ 4.74	—0.13	10.71	— 0.0103	— 0.0245	+0″.0239264	+657″.66	— 7″.48	— 13″.55
351	2.60	4.66	0.18	10.57	0.0111	0.0239	0.0246197	677.25	6.09	12.88
352	2.72	4.58	0.22	10.42	0.0117	0.0234	0.0252441	694.95	4.88	12.23
353	2.84	4.50	0.27	10.31	0.0124	0.0229	0.0257825	710.30	3.93	11.64
354	2.95	4.42	0.32	10.12	0.0129	0.0222	0.0260904	719.29	2.70	10.83
355	3.05	4.34	0.36	9.97	0.0135	0.0215	0.0263364	723.23	1.76	10.12
356	3.15	4.26	0.40	9.81	0.0139	0.0208	0.0264792	730.99	0.91	9.42
357	3.24	4.18	0.44	9.66	0.0143	0.0202	0.0264466	730.55	— 0.19	8.71
358	3.33	4.10	0.48	9.51	0.0148	0.0195	0.0264785	731.84	+ 0.46	8.06
359	3.41	4.02	0.51	9.34	0.0151	0.0189	0.0263124	727.70	1.05	7.39
360	3.49	3.94	0.55	9.18	0.0154	0.0181	0.0260526	720.92	1.56	6.74
361	3.56	3.86	0.58	9.02	0.0156	0.0174	0.0257619	713.26	1.98	6.13
362	3.63	3.79	0.61	8.87	0.0158	0.0166	0.0253387	701.91	2.33	5.55
363	3.69	3.72	0.64	8.71	0.0159	0.0160	0.0248880	689.79	2.59	5.01
364	3.75	3.64	0.67	8.55	0.0160	0.0152	0.0243152	674.23	2.84	4.47
365	3.81	3.58	0.69	8.39	0.0161	0.0144	0.0236323	655.56	3.00	3.98
366	3.89	3.51	0.72	8.24	0.0161	0.0136	0.0229321	636.42	3.12	3.52
367	3.91	3.44	0.74	8.09	0.0161	0.0129	0.0221649	615.38	3.18	3.10
368	3.95	3.38	0.76	7.96	0.0161	0.0122	0.0213753	593.69	3.16	2.75
369	3.99	3.32	0.79	7.78	0.0159	0.0114	0.0204241	567.48	3.19	2.35
370	4.03	3.26	0.81	7.64	0.0158	0.0106	0.0195141	542.39	3.14	2.02
371	4.07	3.20	0.83	7.46	0.0154	0.0096	0.0183185	509.34	3.03	1.70
372	4.10	3.15	0.84	7.35	0.0153	0.0091	0.0175479	488.07	2.94	1.46
373	4.14	3.10	0.86	7.21	0.0151	0.0083	0.0166018	461.88	2.83	1.22
374	4.17	3.05	0.88	7.07	0.0148	0.0076	0.0156745	436.21	2.67	1.02
375	4.19	3.00	0.89	6.93	0.0143	0.0067	0.0144308	401.71	2.51	0.82
376	4.22	2.95	0.90	6.80	0.0139	0.0059	0.0133471	371.65	2.34	0.65
377	4.24	2.91	0.92	6.67	0.0135	0.0052	0.0122338	340.73	2.16	0.51
378	4.27	2.87	0.93	6.58	0.0131	0.0046	0.0112949	314.65	1.97	0.41
379	4.29	2.83	0.94	6.42	0.0125	0.0036	0.0100288	279.44	1.79	0.28
380	4.31	2.79	0.95	6.31	0.0119	0.0029	0.0089279	248.82	1.60	0.20
381	4.32	2.76	0.96	6.19	0.0113	0.0021	0.0078287	218.22	1.42	0.13
382	4.34	2.73	0.97	6.08	0.0106	0.0014	0.0084686	236.11	1.24	0.07
383	4.35	2.69	0.98	5.97	0.0099	— 0.0006	0.0056853	158.54	1.07	— 0.02
384	4.37	2.66	0.99	5.86	0.0092	+ 0.0001	0.0046531	129.77	0.90	+ 0.00
385	4.38	2.64	1.00	5.76	0.0084	0.0007	0.0036434	101.63	0.75	0.03
386	4.40	2.61	1.00	5.66	0.0076	0.0014	0.0026800	74.76	0.62	0.04
387	4.41	2.59	1.01	5.56	0.0068	0.0021	0.0017494	48.81	0 49	0.06
388	4.42	2.55	1.02	5.47	0.0059	0.0027	0.0008893	24.82	0.37	0.06
389	4.43	2.54	1.02	5.39	0.0050	0.0033	+0.0000998	+ 2.78	0.27	0.06
390	4.44	2.52	1.03	5.30	0.0041	0.0038	—0.0006365	— 17.76	0.20	0.06
391	4.45	2.50	1.04	5.22	0.0032	0.0043	0.0013022	36.35	0.11	0.05
392	4.46	2.48	1.04	5.15	0.0022	0.0048	0.0018922	52.82	0.05	0.05
393	4.46	2.46	1.05	5.08	0.0012	0.0052	0.0024427	68.20	+ 0.00	0.04
394	4.47	2.44	1.05	5.01	— 0.0002	0.0055	0.0027971	78.10	— 0.04	0.03
395	4.48	2.43	1.05	4.95	+ 0.0008	0.0058	0.0031084	86.80	0.07	0.01
396	4.49	2.41	1.06	4.89	0.0018	0.0060	0.0033166	92.62	0.09	— 0.00
397	4.49	2.39	1.06	4.83	0.0028	0.0061	0.0034043	95.08	0.11	+ 0.00
398	4.50	2.38	1.07	4.78	0.0038	0.0061	0.0034008	94.99	0.12	0.01
399	4.50	2.36	1.07	4.74	0.0049	0.0061	0.0032896	91.87	0.14	0.02
400	4.51	2.35	1.08	4.70	0.0057	0.0059	0.0030533	85.30	0.15	0.03

$\mathfrak{h}$

u	x'	y'	z'	ρ	X	Y	dn	tdn	$d\omega$	$\frac{ds}{-d\omega(1-\sqrt{1-e^2})}$
0°	− 8.53	+ 1.43	+ 2.89	9.66	+ 0.0012	− 0.0003	+0″.0000963	+ 0″.00	− 0″.02	− 0″.00
2	8.52	1.46	2.89	9.63	0.0011	0.0005	0.0001847	0.00	0.02	0.00
4	8.52	1.48	2.89	9.59	0.0010	0.0006	0.0002631	0.00	0.02	0.00
6	8.51	1.51	2.90	9.53	0.0008	0.0007	0.0003278	0.00	0.02	− 0.00
8	8.51	1.54	2.90	9.46	0.0006	0.0009	0.0003746	0.01	0.02	+ 0.00
10	8.50	1.58	2.90	9.37	0.0004	0.0010	0.0003991	0.01	0.02	0.00
12	8.50	1.62	2.91	9.26	+ 0.0002	0.0012	0.0003968	0.01	− 0.01	0.01
14	8.49	1.66	2.91	9.14	− 0.0001	0.0013	0.0003618	0.01	+ 0.00	0.01
16	8.48	1.71	2.91	9.00	0.0005	0.0015	0.0002874	0.01	0.03	0.02
18	8.47	1.75	2.92	8.85	0.0009	0.0016	+0.0000560	+ 0.00	0.07	0.02
20	8.46	1.81	2.92	8.68	0.0014	0.0018	−0.0000084	− 0.00	0.13	0.03
22	8.44	1.88	2.93	8.45	0.0020	0.0019	0.0002957	0.02	0.22	0.03
24	8.43	1.95	2.94	8.29	0.0026	0.0021	0.0005685	0.05	0.34	0.03
26	8.41	2.04	2.94	8.07	0.0033	0.0022	0.0009976	0.11	0.51	+ 0.02
28	8.39	2.13	2.95	7.84	0.0041	0.0024	0.0015078	0.19	0.73	− 0.00
30	8.36	2.23	2.96	7.58	0.0051	0.0025	0.0021684	0.30	1.01	0.05
32	8.34	2.35	2.97	7.29	0.0064	0.0027	0.0031032	0.50	1.41	0.15
34	8.30	2.47	2.97	7.04	0.0075	0.0028	0.0040057	0.63	1.82	0.27
36	8.27	2.61	2.98	6.89	0.0078	0.0029	0.0044264	0.92	2.13	0.39
38	8.22	2.75	2.99	6.43	0.0107	0.0028	0.0068014	1.60	3.09	0.82
40	8.17	2.91	3.00	6.11	0.0128	0.0027	0.0086771	2.29	3.94	1.30
42	8.11	3.09	3.01	5.77	0.0151	0.0025	0.0094423	2.80	4.97	2.00
44	8.15	3.27	3.02	5.43	0.0178	0.0019	0.0136777	4.52	6.11	3.01
46	7.97	3.47	3.02	5.08	0.0207	− 0.0009	0.0168907	6.20	7.38	4.41
48	7.89	3.68	3.03	4.73	0.0238	+ 0.0007	0.0205184	8.35	8.56	6.33
50	7.79	3.90	3.03	4.39	0.0267	0.0032	0.0242883	10.92	9.37	8.79
52	7.68	4.14	3.03	4.07	0.0286	0.0071	0.0275072	13.62	9.18	11.72
54	7.56	4.39	3.03	3.79	0.0281	0.0126	0.0288872	15.72	6.97	14.61
56	7.42	4.65	3.03	3.56	0.0233	0.0197	0.0263616	15.71	+ 1.41	16.33
58	7.27	4.93	3.02	3.42	− 0.0129	0.0273	0.0180130	11.73	− 8.22	15.09
60	7.10	5.21	3.01	3.39	+ 0.0023	0.0329	−0.0037215	− 2.64	27.22	− 9.29
62	6.90	5.50	3.00	3.49	0.0181	0.0343	+0.0125572	+ 9.69	30.13	+ 0.27
64	6.69	5.81	2.97	3.74	0.0291	0.0305	0.0254991	21.35	38.02	10.80
66	6.45	6.11	2.95	4.10	0.0341	0.0245	0.0327288	29.66	39.00	19.40
68	6.19	6.43	2.91	4.59	0.0341	0.0176	0.0346176	33.89	35.66	25.01
70	5.90	6.74	2.87	5.17	0.0313	0.0114	0.0331912	35.03	30.46	28.03
72	55.9	7.06	2.82	5.84	0.0276	0.0064	0.0303239	34.43	24.73	29.37
74	5.24	7.38	2.76	6.58	0.0239	+ 0.0026	0.0270324	32.97	19.37	29.67
76	4.87	7.69	2.69	7.38	0.0205	− 0.0004	0.0237988	31.12	14.49	29.43
78	4.47	7.99	2.61	8.23	0.0175	0.0026	0.0208111	29.12	10.19	28.88
80	4.03	8.28	2.52	9.13	0.0149	0.0045	0.0181562	27.15	6.12	28.31
82	3.57	8.56	2.41	10.08	0.0127	0.0056	0.0156979	25.04	− 2.98	27.27
84	3.07	8.82	2.30	11.07	0.0107	0.0067	0.0135067	22.95	+ 0.26	26.27
86	2.54	9.05	2.17	12.01	0.0090	0.0075	0.0115103	20.80	2.87	25.12
88	1.98	9.26	2.02	13.15	0.0075	0.0081	0.0096765	18.58	5.40	23.80
90	1.40	9.43	1.87	14.31	0.0060	0.0086	0.0078644	16.01	7.86	22.10
92	0.77	9.57	1.69	15.31	0.0048	0.0089	0.0063207	13.63	9.95	20.43
94	− 0.13	9.66	1.50	16.51	0.0036	0.0092	0.0047567	10.85	11.96	18.36
96	+ 0.53	9.71	1.30	17.67	0.0025	0.0093	0.0032840	7.92	13.79	15.99
98	1.22	9.71	1.09	18.84	0.0014	0.0094	0.0018750	5.77	15.45	13.29

$\mathfrak{h}$

u	x'	y'	z'	ρ	X	Y	dn	tdn	$d\omega$	$dn-d\omega \times (1-\sqrt{1-e^2})$
100°	+ 1.87	+ 9.68	+0.88	19.99	+ 0.0005	— 0.0094	+0″.0000344	+ 0″.00	+ 16″.91	+10″.48
102	2.62	9.53	0.62	21.23	— 0.0005	0.0093	—0.0007699	— 2.17	18.24	6.85
104	3.34	— 9.35	0.37	22.43	0.0015	0.0091	0.0016326	4.84	19.36	+ 3.08
106	4.05	9.10	+0.11	23.63	0.0023	0.0089	0.0031629	9.87	20.24	— 1.03
108	4.75	8.78	—0.16	24.82	0.0032	0.0085	0.0042630	13.96	20.91	5.52
110	5.44	8.39	0.43	25.99	0.0040	0.0082	0.0052883	18.15	21.35	10.34
112	6.10	7.92	0.71	27.15	0.0047	0.0077	0.0062344	22.42	21.55	15.46
114	6.73	7.37	0.99	28.27	0.0054	0.0072	0.0070659	26.59	21.50	20.88
116	7.32	6.76	1.27	29.36	0.0061	0.0066	0.0078521	30.89	21.19	26.52
118	7.84	6.10	1.53	30.39	0.0066	0.0060	0.0084865	34.88	20.65	32.33
120	8.34	5.29	1.81	31.42	0.0072	0.0052	0.0090703	38.90	19.71	38.29
122	8.75	4.46	2.07	32.36	0.0077	0.0044	0.0095073	42.52	18.55	44.27
124	9.08	3.56	2.31	33.24	0.0081	0.0036	0.0098204	45.76	17.11	50.16
126	9.32	2.61	2.53	34.04	0.0084	0.0026	0.0099999	48.51	15.38	55.88
128	9.47	1.61	2.72	34.77	0.0087	0.0017	0.0100429	50.68	13.39	61.43
130	9.50	+ 0.56	2.89	35.41	0.0089	— 0.0007	0.0099384	52.14	11.11	66.24
132	9.42	— 0.50	3.03	36.28	0.0089	+ 0.0004	0.0096951	52.83	8.58	70.66
134	9.22	1.58	3.13	36.39	0.0088	0.0015	0.0092898	52.56	5.82	73.57
136	8.90	2.66	3.19	36.71	0.0087	0.0027	0.0086843	51.86	+ 2.83	76.43
138	8.44	3.72	3.21	36.91	0.0084	0.0039	0.0079384	49.12	— 0.34	77.54
140	7.85	4.74	3.18	36.99	0.0079	0.0050	0.0070308	44.27	3.63	77.11
142	7.12	5.70	3.09	36.93	0.0073	0.0062	0.0059581	38.83	7.02	74.82
144	6.27	6.59	2.96	36.73	0.0065	0.0073	0.0047381	31.95	10.42	69.05
146	5.34	7.34	2.79	36.47	0.0055	0.0083	0.0034279	23.89	13.63	64.10
148	4.23	8.03	2.54	35.93	0.0043	0.0094	0.0020487	14.75	16.96	54.42
150	3.05	8.55	2.25	35.32	0.0030	0.0102	—0.0003539	— 2.63	19.92	42.38
152	1.80	8.90	1.91	34.58	— 0.0015	0.0108	+0.0012307	+ 9.44	22.53	27.56
154	+ 0.49	9.07	1.53	33.72	+ 0.0002	0.0113	0.0031229	24 70	25.08	— 5.94
156	— 0.83	9.04	1.11	32.76	0.0019	0.0115	0.0043328	35.32	26.30	+ 9.99
158	2.15	8.81	0.66	31.72	0.0038	0.0114	0.0057201	48.04	27.28	32.01
160	3.44	8.36	—0.19	30.63	0.0056	0.0109	0.0069225	59.85	27.62	46.18
162	4.66	7.71	+0.29	29.53	0.0074	0.0101	0.0078590	69.91	27.14	79.36
164	5.76	6.85	0.77	28.46	0.0091	0.0090	0.0084962	77.73	26.02	102.77
166	6.73	5.80	1.23	27.47	0.0106	0.0076	0.0087951	82.71	24.07	124.26
168	7.51	4.60	1.66	26.61	0.0118	0.0060	0.0087318	84.36	23.79	142.18
170	8.12	3.25	2.05	26.01	0.0126	0.0053	0.0086540	85.85	18.87	157.54
172	8.50	1.81	2.39	25.63	0.0131	0.0022	0.0076030	77.41	16.41	168.58
174	8.65	— 0.31	2.66	25.55	0.0132	+ 0.0003	0.0066077	69.01	13.39	173.16
176	8.86	+ 1.22	2.86	25.50	0.0133	— 0.0016	0.0056103	60.08	10.82	177.81
178	8.23	2.71	2.99	26.31	0.0121	0.0034	0.0040969	44.96	6.86	165.20
180	7.68	4.14	3.03	27.16	0.0111	0.0051	0.0027401	30.80	4.97	153.72
182	6.93	5.47	2.99	28.29	0.0098	0.0066	0.0014204	16.35	2.71	137.85
184	5.98	6.66	2.88	29.57	0.0083	0.0078	+0.0002041	+ 2.40	— 0.84	118.79
186	4.90	7.69	2.70	30.98	0.0067	0.0088	—0.0008569	—10.33	+ 0.63	97.74
188	3.65	8.51	2.43	32.49	0.0051	0.0095	0.0017405	21.46	1.75	74.63
190	2.33	9.13	2.11	34.03	0.0034	0.0099	0.0024166	30.44	2.54	51.18
192	— 0.94	9.53	1.74	35.56	0.0018	0.0101	0.0028814	37.09	3.05	27.69
194	+ 0.47	9.71	1.32	37.05	+ 0.0002	0.0101	0.0031395	41.26	3.37	+ 4.72
196	1.87	9.66	0.88	38.46	— 0.0013	0.0099	0.0031973	42.91	3.54	—17.10
198	3.23	9.38	0.41	39.76	0.0027	0.0094	0.0030712	42.07	3.65	37.80

$\mathfrak{h}$

u	x'	y'	z'	ρ	X	Y	dn	tdn	$d\omega$	$\frac{ds}{-d\omega(1-\sqrt{1-e^2})}$
200°	+ 4.52	+ 8.89	−0.07	40.94	− 0.0039	− 0.0088	−0″.0027642	− 38″.78	+ 3″.76	− 56″.75
202	5.58	8.29	0.41	41.89	0.0050	0.0082	0.0023639	33.67	3.80	72.21
204	6.66	7.45	0.87	42.79	0.0061	0.0073	0.0018159	26.98	4.05	87.45
206	7.58	6.45	1.31	43.52	0.0070	0.0063	0.0011551	17.09	4.41	100.33
208	8.36	5.30	1.73	44.09	0.0077	0.0052	−0.0004034	− 6.08	4.96	110.08
210	8.94	4.04	2.11	44.47	0.0084	0.0039	+0.0004015	+ 6.16	5.68	119.20
212	9.32	2.69	2.44	44.66	0.0088	0.0026	0.0012387	19.34	6.59	124.75
214	9.51	+ 1.30	2.72	44.67	0.0091	− 0.0013	0.0020783	33.01	6.70	127.47
216	9.48	− 0.12	2.94	44.48	0.0092	+ 0.0001	0.0028928	46.73	8.99	127.40
218	9.25	1.53	3.09	44.10	0.0091	0.0016	0.0036510	59.97	10.40	124.41
220	8.81	2.91	3.17	43.52	0.0088	0.0031	0.0043181	72.09	12.05	118.43
222	8.18	4.21	3.18	42.73	0.0083	0.0045	0.0048600	82.44	13.72	109.34
224	7.37	5.40	3.12	41.85	0.0076	0.0059	0.0052367	90.22	15.39	97.57
226	6.39	6.48	2.99	40.74	0.0067	0.0073	0.0054211	94.83	17.03	82.81
228	5.28	7.39	2.79	39.49	0.0055	0.0085	0.0053715	95.38	18.50	65.43
230	4.04	8.12	2.52	38.10	0.0042	0.0096	0.0050623	91.19	19.67	45.74
232	2.72	8.65	2.20	36.55	0.0026	0.0105	0.0044732	81.75	20.44	24.16
234	+ 1.37	8.97	1.83	34.99	− 0.0009	0.0111	0.0036087	66.88	20.76	− 1.68
236	− 0.04	9.08	1.42	33.30	+ 0.0009	0.0115	0.0024373	45.79	20.42	+ 21.94
238	1.42	8.96	0.98	31.58	0.0029	0.0116	+0.0010181	+ 19.39	19.41	45.06
240	2.76	8.63	0.51	28.88	0.0049	0.0113	−0.0006860	− 13.23	17.72	68.07
242	4.01	8.09	−0.04	28.16	0.0067	0.0107	0.0024364	47.60	14.22	87.55
244	5.16	7.36	+0.42	26.54	0.0085	0.0099	0.0043438	85.94	11.96	105.33
246	6.16	6.47	0.88	25.04	0.0101	0.0087	0.0062668	125.50	8.42	119.94
248	7.02	5.43	1.30	23.69	0.0145	0.0074	0.0081166	164.49	+ 4.33	130.99
250	7.70	4.29	1.69	22.56	0.0126	0.0058	0.0098234	201.40	− 0.09	138.02
252	8.20	3.06	2.04	21.66	0.0134	0.0042	0.0112832	233.97	4.68	140.99
254	8.53	1.73	2.35	21.02	0.0138	0.0025	0.0124588	261.22	8.82	140.03
256	8.66	− 0.48	2.59	20.65	0.0140	+ 0.0009	0.0132436	280.70	12.57	135.35
258	8.62	+ 0.81	2.78	20.53	0.0138	− 0.0006	0.0136760	292.92	15.98	127.47
260	8.42	2.06	2.91	20.64	0.0132	0.0020	0.0137493	297.53	19.13	92.52
262	8.06	3.26	2.99	20.94	0.0125	0.0034	0.0134954	294.97	21.71	105.00
264	7.57	4.38	3.02	21.39	0.0116	0.0047	0.0130010	286.94	23.85	93.00
266	6.97	5.41	2.99	21.95	0.0105	0.0058	0.0121836	271.46	25.40	80.42
268	6.26	6.34	2.93	22.57	0.0093	0.0068	0.0112227	252.37	26.52	65.08
270	5.48	7.16	2.81	23.22	0.0081	0.0076	0.0101131	229.47	28.62	49.96
272	4.63	7.86	2.66	23.87	0.0069	0.0083	0.0088952	203.61	27.36	40.29
274	3.74	8.45	2.48	24.49	0.0057	0.0088	0.0076178	175.86	27.16	29.33
276	2.82	8.92	2.27	25.09	0.0045	0.0092	0.0062966	146.56	26.59	19.42
278	2.14	9.40	2.14	25.49	0.0036	0.0095	0.0052989	124.33	26.29	12.26
280	− 0.95	9.52	1.79	26.10	0.0023	0.0095	0.0036283	85.78	24.55	+ 2.93
282	+ 0.02	9.67	1.52	26.54	0.0012	0.0096	0.0022612	53.88	23.20	− 4.00
284	0.88	9.71	1.26	26.84	+ 0.0003	0.0095	−0.0010540	− 25.30	21.65	9.24
286	1.75	9.65	0.98	27.07	− 0.0007	0.0094	+0.0001574	+ 3.81	20.01	13.83
288	2.59	9.53	0.71	27.28	0.0015	0.0091	0.0013156	32.02	18.22	17.53
290	3.38	9.33	0.43	27.39	0.0023	0.0088	0.0024007	58.82	16.40	20.41
292	4.14	9.06	+0.16	27.43	0.0031	0.0085	0.0034494	85.07	14.52	22.70
294	4.84	8.73	−0.11	27.39	0.0037	0.0081	0.0043050	106.84	12.36	23.15
296	5.49	8.36	0.37	27.29	0.0043	0.0077	0.0051985	129.79	10.89	25.00
298	5.96	8.03	0.57	27.07	0.0047	0.0074	0.0058147	146.62	9.90	24.87

$\mathfrak{b}$

u	x'	y'	z'	ρ	X	Y	dn	tdn	$d\omega$	ds $-da(1-\sqrt{1-e^2})$
300°	+6.63	+ 7.48	−0.86	26.92	− 0.0053	− 0.0068	+0″.0066521	+167″.00	− 7″.42	− 25″.43
302	7.10	7.01	1.08	26.63	0.0057	0.0063	0.0072311	183.61	5.83	25.01
304	7.55	6.50	1.30	26.31	0.0061	0.0058	0.0077637	198.17	4.28	24.39
306	7.93	5.97	1.50	25.94	0.0065	0.0053	0.0081961	210.27	2.86	23.48
308	8.27	5.44	1.69	25.53	0.0068	0.0048	0.0085471	220.34	1.55	22.37
310	8.56	4.91	1.86	25.08	0.0070	0.0043	0.0088178	228.35	− 0.35	21.11
312	8.81	4.37	2.02	24.60	0.0072	0.0037	0.0090070	234.32	+ 0.73	19.74
314	9.01	4.84	2.17	24.08	0.0073	0.0032	0.0091275	238.42	1.67	18 31
316	9.17	3.31	2.30	23.55	0.0074	0.0027	0.0091835	240.95	2.50	16.84
318	9.30	2.79	2.42	22.99	0.0075	0.0022	0.0091653	241.42	3.21	15.36
320	9.40	2.28	2.53	22.41	0.0075	0.0017	0.0090824	240.15	3.80	13.98
322	9.47	1.80	2.63	21.83	0.0075	0.0012	0.0089503	237.51	4.27	12.47
324	9.51	1.31	2.72	21.22	0.0075	0.0007	0.0087390	232.71	4.64	11.06
326	9 52	0.85	2.79	20.62	0.0074	− 0.0003	0.0084861	226.72	4.91	9.74
328	9.52	+ 0.41	2.86	20.01	0.0073	+ 0.0001	0.0081841	219.34	5.75	8.50
330	9.49	− 0.01	2.92	19.40	0.0071	0.0006	0.0078383	210.70	5.15	7.32
332	9.45	0.41	2.97	18.79	0.0069	0.0010	0.0074506	200.85	5.15	6.24
334	9.40	0.79	3.02	17.91	0.0066	0.0014	0.0068767	185.88	5.10	5.13
336	9.33	1.16	3.05	17.59	0.0065	0.0017	0.0065746	178.15	4.93	4.36
338	9.26	1.50	3.08	17.00	0.0063	0.0020	0.0061662	167.51	4.73	3.20
340	9.18	1.82	3.11	16.43	0.0060	0.0023	0.0055896	152.18	4.49	2.86
342	9.09	2.12	3.13	15.86	0.0056	0.0026	0.0050701	138.34	4.20	2.24
344	9.00	2.40	3.15	15.32	0.0053	0.0028	0.0045365	124.02	3.90	1.70
346	8.91	2.66	3.16	14.79	0.0050	0.0031	0.0039940	109.40	3.56	1.24
348	8.81	2.91	3.17	14.28	0.0046	0.0032	0.0034541	94.78	3.18	0.87
350	8.72	3.13	3.18	13.78	0.0042	0.0034	0.0029192	80.14	2.23	0.56
352	8.63	3.35	3.18	13.31	0.0037	0.0035	0.0023535	64.79	2.04	0.30
354	8.54	3.54	3.18	12.72	0.0033	0.0035	0.0018801	51.83	2.10	− 0.13
356	8.45	3.72	3.18	12.44	0.0028	0.0036	0.0013947	38.50	1.76	+ 0.01
358	8.36	3.88	3.18	12.05	0.0024	0.0036	0.0009469	26.16	1.45	0.11
360	8.28	4.03	3.18	11.66	0.0019	0.0035	0.0005186	14.34	1.15	0.17
362	8.20	4.17	3.18	11.31	0.0015	0.0034	+0.0001434	+ 3.97	0.95	0.20
364	8.13	4.30	3.18	10.99	0.0010	0.0033	−0.0001868	− 5.17	0.64	0.21
366	8.06	4.41	3.17	10.69	0.0006	0.0031	0.0004625	12.83	0.44	0.11
368	8.00	4.51	3.17	10.45	− 0.0002	0.0029	0.0006604	18.34	0.29	0.18
370	7.94	4.61	3.17	10.17	+ 0.0002	0.0026	0.0008471	23.54	0.14	0.16
372	7.89	4.69	3.16	9.95	0.0005	0.0023	0.0009529	26.50	+ 0.04	0.13
374	7.84	4.77	3.16	9.75	0.0008	0.0020	0.0010054	27.96	− 0.03	0.10
376	7.79	4.83	3.16	9.58	0.0011	0.0017	0.0010074	28.04	0.08	0.07
378	7.75	4.89	3.16	9.46	0.0012	0.0014	0.0009372	26.10	0.09	0.05
380	7.71	4.94	3.15	9.31	0.0015	0.0010	0.0008748	24.38	0.11	0.03
382	7.68	4.99	3.15	9.21	0.0016	0.0007	0.0007605	21.20	0.11	0.02
384	7.65	5.03	3.15	9.13	0.0016	0.0004	0.0006240	17.40	0.10	+ 0.00
386	7.62	5.07	3.14	9.07	0.0016	−0.0001	0.0004753	13.23	0.08	− 0.00
388	7.60	5.10	3.14	9.04	0.0015	+0.0001	0.0003229	9.00	0.06	0.00
390	7.58	5.13	3.14	9.03	0.0014	0.0003	0.0001751	4.88	0.04	0.01
392	7.56	5.16	3.14	9.03	0.0013	0.0005	−0.0000389	− 1.08	0.03	0.01
394	7.55	5.18	3.14	9.06	0.0011	0.0007	+0.0000769	+ 2.14	0.02	0.01
396	7.53	5.20	3.14	9.10	0.0009	0.0008	0.0001700	4.74	0.01	0.00
398	7.51	5.22	3.13	9.15	0.0007	0.0009	0.0002394	6.68	0.0	0.00
400	7.50	5.24	3.13	9.25	0.0005	0.0009	0.0002780	7.76	0.01	0.00

♅

u	x'	y'	z'	ρ	X	Y	dn	tdn	$d\varpi$	$\frac{ds}{-d\varpi(1-\sqrt{1-e^2})}$
°										
0	+2.65	−19.45	−3.07	19.80	−0.00007	−0.00003	+0″.00000152	+ 0″.0000	+0″.0005	+ 0″.0000
5	2.61	19.46	3.06	20.16	0.00008	+0.00006	−0.00001323	− 0.0002	0.0009	+ 0.0000
10	2.56	19.47	3.05	20.53	0.00007	0.00015	0.00002938	0.0007	0.0016	− 0.0003
15	2.50	19.48	3.03	20.93	0.00005	0.00023	0.00004271	0.0018	+0.0017	0.0014
20	2.41	19.49	3.00	21.28	−0.00003	0.00032	0.00004168	0.0028	−0.0004	0.0036
25	2.29	19.50	2.97	21.67	+0.00001	0.00039	0.00005296	0.0052	0.0066	0.0071
30	2.14	19.52	2.92	22.07	0.00006	0.00048	0.00005139	0.0072	0.0202	0.0128
35	1.94	19.55	2.86	22.47	0.00011	0.00057	0.00004066	0.0079	0.0431	0.0198
40	1.69	19.57	2.79	22.88	0.00016	0.00065	−0.00002187	− 0.0057	0.0782	0 0275
45	1.39	19.60	2.69	23.28	0.00023	0.00073	+0.00000549	+ 0.0019	0.1283	0.0342
50	1.02	19.62	2.58	23.68	0.00030	0.00080	0.00004193	0 0188	0.1958	0.0371
55	0.58	19.64	2.45	24.07	0.00038	0.00087	0.00008821	0.0502	0.2825	0.0317
60	+0.08	19.65	2.29	24.44	0.00046	0.00094	0.00014448	0.1025	0.3892	− 0.0114
65	−0.51	19.65	2.10	24.78	0.00056	0.00099	0.00021134	0.1841	0.5162	+ 0.0309
70	1.18	19.61	1.89	25.07	0.00068	0.00105	0.00029585	0.3122	0.6660	0.1143
75	1.64	19.57	1.74	25.44	0.00076	0.00112	0.00036112	0.4561	0.8298	0.2092
80	2.77	19.43	1.37	25.47	0.00091	0.00111	0.00047851	0.7156	0.9995	0.4258
85	3.68	19.26	1.06	25.55	0.00106	0.00112	0.00058885	1.0322	1.1808	0.7038
90	4.70	19.01	0.71	25.52	0.00122	0.00111	0.00071078	1.4473	1.3606	1.0930
95	5.78	18.67	−0.33	25.36	0.00140	0.00108	0.00084154	1.9740	1.5298	1.6341
100	6.93	18.21	+0.08	25.07	0.00160	0.00096	0.00098001	2.6280	1.6270	2.3722
105	8.13	17.63	0.53	24.62	0.00182	0.00099	0.00112054	3.4189	1.8629	3.2208
110	9.37	16.91	1.00	24.02	0.00208	0.00079	0.00127330	4.3841	1.8620	4.4625
115	10.63	16.02	1.50	23.26	0.00236	0.00061	0.00142347	5.4778	1.8766	5.9583
120	11.89	14.95	2.02	22.34	0.00268	0.00038	0.00157348	6.7488	1.8247	7.8245
125	13.11	13.68	2.55	21.25	0.00305	+0.00010	0.00172511	8.2032	1.7100	10.1500
130	14.26	12.21	3.08	20.07	0.00348	−0.00024	0.00187675	9.8452	1.5493	13.0302
135	15.31	10.53	3.61	18.81	0.00399	0.00061	0.00203105	11.6992	1.3735	16.5894
140	16.22	8.65	4.11	17.56	0.00461	0.00098	0.00218957	13.7879	1.2006	20.9426
145	16.94	6.59	4.57	16.45	0.00531	0.00126	0.00234375	16.0676	1.3233	26.0600
150	17.44	4.34	4.99	15.62	0.00603	0.00131	0.00246265	18.3073	1.6551	31.5230
155	17.67	− 1.95	5.34	15.29	0.00653	0.00107	0.00246128	19.8128	2.2056	36.0338
160	17.61	+ 0.53	5.60	15.60	0.00658	0.00065	0.00228350	19.7426	2.6740	38.0753
165	17.21	3.07	5.77	16.63	0.00614	0.00034	0.00191743	18.1583	2.7403	37.1268
170	16.48	5.61	5.83	18.33	0.00543	0.00033	0.00146029	14.4859	2.3880	34.1559
175	15.39	8.08	5.77	20.57	0.00465	0.00059	0.00100503	10.6291	1.9444	30.4552
180	13.95	10.42	5.59	23.17	0.00394	0.00098	0.00059983	6.7434	1.3294	26.0420
185	12.20	12.55	5.28	26.03	0.00329	0.00140	+0.00025880	+ 3.0840	0.9539	22.7163
190	10.31	13.99	4.86	28.66	0.00274	0.00172	−0.00000026	− 0.0032	0.7878	19.2263
195	7.87	15.98	4.32	31.95	0.00212	0.00212	0.00022371	2.9713	0.6824	14.9980

♅

u	x'	y'	z'	ρ	X	Y	dn	tdn	$d\omega$	$\frac{ds}{-da(1-\sqrt{1-e^2})}$
200	−5.39	+17.17	+3.68	34.82	+0.00158	−0.00236	−0″.00036447	− 5″.0911	−0″.7354	+11″.0940
205	−0.35	17.44	2.29	40.17	0.00061	0.00250	0.00041421	6.0706	0.6451	4.0873
210	+0.46	18.42	2.10	40.54	0.00046	0.00260	0.00044133	6.7701	0.9626	+ 2.8494
215	3.09	18.34	1.27	42.68	+0.00001	0.00258	0.00038943	6.2393	1.1049	− 0.4563
220	5.64	17.87	+0.43	44.59	−0.00040	0.00250	0.00029044	4.8489	1.1932	3.3669
225	8.04	17.05	−0.41	46.16	0.00077	0.00235	−0.00015531	− 2.6963	1.2216	5.7789
230	10.25	15.91	1.23	47.31	0.00109	0.00216	+0.00000477	+ 0.0860	1.1744	7.6622
235	12.24	14.52	2.02	48.14	0.00135	0.00193	0.00017803	3.3222	1.0498	8.9976
240	13.97	12.89	2.75	48.62	0.00157	0.00168	0.00035395	6.8280	0.8555	9.8222
245	15.44	11.11	3.42	48.77	0.00174	0.00142	0.00052365	10.4239	0.6031	10.1805
250	16.63	9.20	4.02	48.59	0.00186	0.00115	0.00067894	13.9202	−0.3099	10.1325
255	17.56	7.23	4.54	48.12	0.00194	0.00087	0.00080394	16.9482	+0.0456	9.8083
260	18.23	5.23	4.99	47.37	0.00198	0.00061	0.00092160	19.9430	0.3229	9.0845
265	18.67	3.26	5.37	46.39	0.00199	0.00035	0.00100692	22.3300	0.6275	8.2849
270	18.89	+ 1.32	5.67	45.19	0.00196	−0.00011	0.00106110	24.0774	0.9028	7.3423
275	18.92	− 0.53	5.91	43.79	0.00191	+0.00011	0.00108604	25.1762	1.1364	6.3385
280	18.79	2.29	6.08	42.29	0.00184	0.00032	0.00108329	25.6173	1.3149	5.3400
285	18.53	3.94	6.20	40.65	0.00174	0.00050	0.00105360	25.3795	1.4470	4.3716
290	18.15	5.46	6.27	38.93	0.00163	0.00067	0.00099978	24.4982	1.5161	3.4715
295	17.70	6.85	6.30	37.16	0.00150	0.00081	0.00092444	23.0115	1.5276	2.6620
300	17.18	8.12	6.29	35.37	0.00136	0.00093	0.00086217	21.7740	1.4866	1.9559
305	16.63	9.26	6.26	33.58	0.00120	0.00103	0.00072165	18.4677	1.3979	1.3606
310	16.06	10.28	6.21	31.83	0.00104	0.00109	0.00060170	15.5845	1.2741	0.8782
315	15.67	10.91	6.16	30.25	0.00089	0.00112	0.00049243	12.8936	1.1113	0.5378
320	14.93	11.96	6.06	28.51	0.00069	0.00115	0.00034715	9.1790	0.9376	− 0.2272
325	14.39	12.64	5.98	27.01	0.00051	0.00152	0.00020033	5.3436	0.9512	+ 0.0616
330	13.89	13.23	5.89	25.29	0.00029	0.00158	0.00004552	1.2235	0.7687	0.2115
335	13.43	13.74	5.81	24.31	0.00017	0.00101	+0.00000551	+ 0.1490	0.4083	0.1287
340	13.01	14.17	5.74	23.17	−0.00001	0.00091	−0.00007618	− 2.0740	0.2649	0.1414
345	12.63	14.53	5.66	22.18	+0.00012	0.00078	0.00013488	3.6913	0.1500	0.1272
350	12.30	14.83	5.60	21.34	0.00023	0.00064	0.00016868	4.6363	0.0660	0.0994
355	12.02	15.07	5.54	20.63	0.00031	0.00049	0.00017917	4.9315	+0.0114	0.0685
360	11.78	15.29	5.49	20.08	0.00035	0.00034	0.00016708	4.6233	−0.0150	0.0413
365	11 58	15.45	5.45	19.67	0.00036	0.00020	0.00011744	3.2578	0.0271	0.0213
370	11.42	15.57	5.42	19.38	0.00034	+0.00007	0.00010518	3.0613	0.0254	0.0087
375	11.30	15.67	5.39	19.22	0.00030	−0.00002	0.00006705	1.8915	0.0155	+ 0.0021
380	11.21	15.74	5.37	19.15	0.00025	0.00009	0.00003368	0.9386	0.0102	− 0.0007
385	11.14	15.80	5.36	19.18	0.00019	0.00013	−0.00000697	− 0.1946	0.0051	0.0009
390	11.08	15.84	5.35	19.30	0.00012	0.00014	+0.00001038	+ 0.2896	0.0003	0.0006
395	11.04	15.87	5.34	19.48	+0.00005	0.00013	0.00001737	0.4849	−0.0001	− 0.0002
400	11.01	15.89	5.33	19.74	−0.00001	0.00010	0.00001473	0.4113	+0.0000	+ 0.0002

Résultats des intégrations par les quadratures paraboliques des différentielles précédentes.

Ce tableau présente les altérations du moyen mouvement de la comète, de la longitude du périhélie, et de l'anomalie moyenne de 1682 à 1759.

	$\int dn$	$t\int dn$	$\int t dn$	$\int dt \int dn$	$\int d\omega$	$\frac{\int d\iota}{-(1-\sqrt{1-e^2})\int d\omega}$	$\int d\iota - \int d\omega$	$\int d\zeta$
♀	+ 1″022769	+ 28573″10	− 16457″89	+ 45030″99	− 827″92	+ 6245″70	+ 6454″76	+ 51485″75
♄	+ 0,085476	+ 2387,98	+ 2280,20	+ 107,78	− 303,72	+ 979,20	+ 1055,85	+ 1163,63
♅	+ 0,043410	+ 1213,56	+ 433,92	+ 779,64	− 34,03	+ 306,38	+ 314,96	+ 1094,60
	+1,151685	+32174,64	− 13743,77	+ 45918,41	− 1165,67	+ 7531,28	+ 7825,57	+ 53743,98

Ces valeurs n'ont été calculées que pour en conclure le moyen mouvement diurne de la comète à l'époque de son passage au périhélie en 1759, ce qui maintenant est facile. En effet l'équation (n° 4)

$$\zeta = Nt + \int d\zeta,$$

lorsque la comète a accompli sa révolution, ce qui suppose $\zeta = 400^\circ$ et $t = 27937^j$ et $\int d\zeta = +53743''98$, donne

$$N = 141'',25548.$$

C'est la valeur du moyen mouvement diurne au périhélie de 1682; si l'on nomme N′ cette quantité à l'instant du passage au périhélie de 1759, on aura

$$N' = N + \int dn = 142'',40717.$$

Au moyen de ces valeurs de N et N′ on déterminera celles des demi-grands axes a et a' de l'orbite de la comète qui répondent aux périhélies de 1682 et de 1759. On trouve ainsi

$$a = 18,181841, \qquad a' = 18,083683.$$

En joignant la valeur de N′ et de a' que nous venons d'obtenir à celles des autres élémens de l'orbite elliptique résultant des

observations relatives au périhélie de 1759, on aura toutes les données nécessaires au calcul des perturbations depuis 1759 jusqu'au prochain retour de la comète. Cependant les valeurs précédentes ne sont pas précisément celles que nous avons employées dans les calculs suivans, parce que la comète s'étant beaucoup approchée de la terre, pendant l'année 1759, en a éprouvé des perturbations sensibles auxquelles il était indispensable d'avoir égard. La plus grande proximité de la comète à la terre ayant eu lieu après le passage au périhélie, les plus considérables de ces perturbations ne se trouvent pas comprises, il est vrai, dans la période de 1682 à 1759, que nous venons d'examiner, mais cependant elles ont altéré, dès le commencement de la période suivante, l'expression du grand axe, d'une manière assez sensible pour qu'il soit nécessaire d'en tenir compte dans les calculs des perturbations relatives à cette période. D'après une première évaluation approximative de ces altérations, nous avons adopté pour le demi-grand axe et le moyen mouvement, relatifs au périhélie de 1759, les valeurs suivantes

$$a' = 18{,}07620, \qquad N' = 142'',4956;$$

et l'on verra que ces valeurs s'accordent avec celles qui résultent de la détermination complète des perturbations causées par l'action de la terre sur la comète que nous présenterons plus loin, avec une exactitude suffisante pour que les différences n'aient eu aucune influence sur les résultats définitifs.

Coordonnées de la Comète rapportées au plan et au grand axe de son orbite. Temps écoulés depuis le passage au périhélie de 1759.

u	x	y	t	u	x	y	t
0°	+ 0.59	+ 0.00	0.0	50°	— 4.71	+ 3.23	452.3
1	0.58	0.07	2.3	51	4.91	3.28	474.8
2	0.58	0.14	4.6	52	5.12	3.33	498.1
3	0.57	0.22	6.9	53	5.32	3.38	522.2
4	0.55	0.29	9.3	54	5.54	3.43	547.1
5	0.53	0.36	11.7	55	5.75	3.47	572.8
6	0.51	0.43	14.3	56	5.97	3.52	599.3
7	0.48	0.50	16.9	57	6.19	3.56	626.6
8	0.44	0.57	19.6	58	6.41	3.61	654.7
9	0.41	0.64	22.5	59	6.64	3.65	683.7
10	0.36	0.71	25.6	60	6.87	3.69	713.5
11	0.32	0.79	28.8	61	7.07	3.74	744.2
12	0.27	0.86	32.1	62	7.33	3.78	775.8
13	0.21	0.93	35.7	63	7.59	3.82	808.3
14	0.15	0.99	39.5	64	7.80	3.86	841.6
15	0.09	1.07	43.5	65	8.05	3.89	875.8
16	+ 0.02	1.14	47.8	66	8.29	3.93	911.0
17	— 0.05	1.21	52.4	67	8.53	3.97	947.1
18	0.13	1.27	57.2	68	8.78	4.00	984.1
19	0.21	1.34	62.3	69	9.03	4.04	1022.0
20	0.30	1.45	67.8	70	9.28	4.07	1060.9
21	0.39	1.48	73.5	71	9.54	4.10	1100.7
22	0.48	1.55	79.6	72	9.79	4.13	1141.5
23	0.58	1.61	86.1	73	10.05	4.16	1183.2
24	0.68	1.68	92.9	74	10.31	4.19	1226.0
25	0.79	1.75	100.2	75	10.59	4.22	1269.7
26	0.90	1.81	107.9	76	10.84	4.25	1314.4
27	1.02	1.88	115.9	77	11.10	4.27	1360.1
28	1.13	1.94	124.5	78	11.37	4.30	1406.7
29	1.26	2.01	133.4	79	11.63	4.32	1454.4
30	1.38	2.07	142.9	80	11.90	4.34	1503.1
31	1.51	2.14	152.8	81	12.17	4.37	1552.8
32	1.65	2.20	163.2	82	12.45	4.39	1603.5
33	1.79	2.26	174.1	83	12.72	4.41	1655.3
34	1.93	2.32	185.6	84	12.99	4.42	1708.0
35	2.07	2.39	197.6	85	13.27	4.44	1761.8
36	2.23	2.45	210.2	86	13.55	4.46	1816.7
37	2.38	2.51	223.3	87	13.82	4.47	1872.6
38	2.54	2.57	237.0	88	14.10	4.49	1929.5
39	2.70	2.63	251.4	89	14.38	4.50	1987.5
40	2.87	2.68	266.3	90	14.66	4.51	2046.5
41	3.03	2.74	281.8	91	14.94	4.52	2106.6
42	3.21	2.80	298.0	92	15.22	4.53	2167.7
43	3.38	2.86	314.9	93	15.51	4.54	2229.9
44	3.56	2.91	332.4	94	15.79	4.55	2293.2
45	3.74	2.97	350.6	95	16.09	4 55	2357.5
46	3.93	3.02	369.5	96	16.35	4.56	2422.8
47	4.12	3.07	389.1	97	16.64	4.56	2489.3
48	4.31	3.13	409.4	98	16.92	4.56	2556.8
49	4.51	3.18	430.5	99	17.21	4.57	2625.4

Élémens employés de 0° à 300° d'anom. exc.

n	142″,4956	ω	336°,8522
a	18 ,07620	Ω	59 ,8182
e	0 ,967557	i	19 ,5778

u	x	y	t	u	x	y	t
100°	— 17.49	+ 4.57	2695j.1	150°	—30.27	+ 3.23	7470j.1
101	17.77	4.57	2765.8	151	30.47	3.18	7588.6
102	18.06	4.56	2837.6	152	30.67	3.13	7707.9
103	18.34	4.56	2910.4	153	30.86	3.07	7827.9
104	18.62	4.56	2984.3	154	31.05	3.02	7948.7
105	18.91	4.55	3059.3	155	31.23	2.97	8070.2
106	19.19	4.55	3135.3	156	31.42	2.91	8192.3
107	19.47	4.54	3212.4	157	31.60	2.86	8315.2
108	19.76	4.53	3290.6	158	31.77	2.80	8438.7
109	20.04	4.52	3369.8	159	31.94	2.74	8562.8
110	20.32	4.51	3450.1	160	32.11	2.68	8687.7
111	20.60	4.50	3531.4	161	32.28	2.63	8813.0
112	20.88	4.49	3613.8	162	32.44	2.57	8939.1
113	21.16	4.47	3697.2	163	32.60	2.51	9065.7
114	21.43	4.46	3781.7	164	32.75	2.45	9192.9
115	21.71	4.44	3867.2	165	32.90	2.39	9320.7
116	21.99	4.42	3953.7	166	33.05	2.32	9449.1
117	22.26	4.41	4041.3	167	33.19	2.26	9578.0
118	22.53	4.39	4129.9	168	33.33	2.20	9707.4
119	22.80	4.37	4219.5	169	33.46	2.14	9837.4
120	23.08	4.34	4310.2	170	33.60	2.07	9967.8
121	23.35	4.32	4401.9	171	33.72	2.01	10098.6
122	23.61	4.30	4494.6	172	33.84	1.94	10230.1
123	23.79	4.27	4588.2	173	33.96	1.88	10361.9
124	24.14	4.25	4682.9	174	34.08	1.81	10494.2
125	24.39	4.22	4778.5	175	34.19	1.75	10626.9
126	24.67	4.19	4875.2	176	34.30	1.68	10760.0
127	24.93	4.16	4972.9	177	34.40	1.61	10893.5
128	25.19	4.13	5071.5	178	34.50	1.55	11027.4
129	25.44	4.10	5171.0	179	34.59	1.48	11161.6
130	25.70	4.07	5271.6	180	34.68	1.41	11296.6
131	25.95	4.04	5373.0	181	34.77	1.34	11431.1
132	26.20	4.00	5475.5	182	34.85	1.27	11566.4
133	26.45	3.97	5578.8	183	34.92	1.21	11701.9
134	26.69	3.93	5683.1	184	34.99	1.14	11837.7
135	26.93	3.89	5788.3	185	35.07	1.07	11973.5
136	27.18	3.86	5894.4	186	35.13	1.00	12110.1
137	27.39	3.82	6001.4	187	35.19	0.93	12246.7
138	27.65	3.78	6109.3	188	35.25	0.86	12383.4
139	27.91	3.74	6218.1	189	35.30	0.79	12520.4
140	28.11	3.69	6327.8	190	35.34	0.71	12657.6
141	28.34	3.65	6438.3	191	35.38	0.64	12794.9
142	28.57	3.61	6549.6	192	35.42	0.57	12932.3
143	28.79	3.56	6661.9	193	35.46	0.50	13069.9
144	29.01	3.52	6774.9	194	35.49	0.43	13207.7
145	29.23	3.47	6888.8	195	35.51	0.36	13345.5
146	29.44	3.43	7003.5	196	35.53	0.29	13483.4
147	29.65	3.38	7119.0	197	35.54	0.22	13621.4
148	29.86	3.33	7235.2	198	35.55	0.14	13759.4
149	30.07	3.28	7352.4	199	35.56	0.07	13897.5

u	x	y	t
200°	— 35.57	— 0.00	14035j.6
201	35.56	0.07	14173.5
202	35.55	0.14	14311.6
203	35.54	0.22	14449.6
204	35.53	0.29	14587.6
205	35.51	0.36	14725.5
206	35.49	0.43	14863.3
207	35.46	0.50	15001.1
208	35.42	0.57	15138.7
209	35.38	0.64	15276.1
210	35.34	0.71	15413.4
211	35.30	0.79	15550.6
212	35.25	0.86	15687.6
213	35.19	0.93	15824.3
214	35.13	1.00	15960.9
215	35.07	1.07	16097.5
216	34.99	1.14	16233.3
217	34.92	1.21	16369.1
218	34.85	1.27	16504.6
219	34.77	1.34	16639.9
220	34.68	1.41	16774.4
221	34.59	1.48	16909.4
222	34.50	1.55	17043.6
223	34.40	1.61	17177.5
224	34.30	1.68	17311.0
225	34.19	1.75	17444.1
226	34.08	1.81	17576.8
227	33.96	1.88	17709.1
228	33.84	1.94	17840.9
229	33.72	2.01	17972.4
230	33.60	2.07	18103.2
231	33.46	2.14	18233.6
232	33.33	2.20	18363.6
233	33.19	2.26	18493.0
234	33.05	2.32	18621.9
235	32.90	2.39	18750.3
236	32.75	2.45	18878.1
237	32.60	2.51	19005.3
238	32.44	2.57	19131.9
239	32.28	2.63	19258.0
240	32.11	2.68	19383.3
241	31.94	2.74	19508.2
242	31.77	2.80	19632.3
243	31.60	2.86	19755.8
244	31.42	2.91	19878.7
245	31.23	2.97	20000.8
246	31.05	3.02	20122.3
247	30.86	3.07	20243.1
248	30.67	3.13	20363.1
249	30.47	3.18	20482.4

u	x	y	t
250°	— 30.27	— 3.23	21600j.9
251	30.07	3.28	20718.6
252	29.86	3.33	20835.8
253	29.65	3.38	20952.0
254	29.44	3.43	21067.5
255	29.23	3.47	21182.2
256	29.01	3.52	21296.1
257	28.79	3.56	21409.1
258	28.57	3.61	21521.4
259	28.34	3.65	21632.7
260	28.11	3.69	21743.2
261	27.91	3.74	21852.9
262	27.65	3.78	21961.7
263	27.39	3.82	22069.6
264	27.18	3.86	22176.6
265	26.93	3.89	22282.7
266	26.69	3.93	22387.9
267	26.45	3.97	22492.2
268	26.20	4.00	22595.5
269	25.95	4.04	22698.0
270	25.70	4.07	22799.4
271	25.44	4.10	22900.0
272	25.19	4.13	22999.5
273	24.93	4.16	23098.1
274	24.67	4.19	23195.8
275	24.39	4.22	23292.5
276	24.14	4.25	23388.1
277	23.79	4.27	23482.8
278	23.61	4.30	23576.4
279	23.35	4.32	23669.1
280	23.08	4.34	23760.8
281	22.80	4.37	23851.5
282	22.53	4.39	23941.1
283	22.26	4.41	24029.7
284	21.99	4.42	24117.3
285	21.71	4.44	24203.8
286	21.43	4.46	24289.3
287	21.16	4.47	24373.8
288	20.88	4.49	24457.2
289	20.60	4.50	24539.6
290	20.32	4.51	24620.9
291	20.04	4.52	24701.2
292	19.76	4.53	24780.4
293	19.47	4.54	24858.6
294	19.19	4.55	24935.7
295	18.91	4.55	25011.7
296	18.62	4.56	25086.7
297	18.34	4.56	25160.6
298	18.06	4.56	25233.4
299	17.77	4.57	25305.2
300	17.49	4.57	15376.1

Coordonnées des planètes perturbatrices rapportées au plan et au grand axe de l'orbite de la comète; leurs distances à cet astre.

♅					♅				
u	x'	y'	z'	ϱ	u	x'	y'	z'	ϱ
0°	+4.51	+2.35	−1.08	4.70	50°	+4.68	−1.01	−1.58	10.42
1	4.52	2.33	1.08	4.66	51	4.63	1.19	1.59	10.65
2	4.52	2.32	1.08	4.63	52	4.58	1.34	1.59	10.88
3	4.53	2.30	1.09	4.60	53	4.51	1.52	1.60	11.11
4	4.54	2.28	1.09	4.59	54	4.44	1.70	1.60	11.33
5	4.54	2.27	1.10	4.58	55	4.36	1.89	1.60	11.55
6	4.55	2.25	1.10	4.57	56	4.26	2.07	1.59	11.77
7	4.55	2.23	1.10	4.56	57	4.16	2.26	1.59	11.98
8	4.56	2.21	1.11	4.57	58	4.05	2.45	1.58	12.19
9	4.57	2.19	1.11	4.58	59	3.93	2.64	1.56	12.39
10	4.58	2.17	1.12	4.60	60	3.79	2.83	1.55	12.59
11	4.58	2.15	1.12	4.62	61	3.64	3.02	1.53	12.75
12	4.59	2.13	1.13	4.64	62	3.48	3.21	1.50	12.96
13	4.60	2.10	1.14	4.68	63	3.31	3.39	1.48	13.15
14	4.61	2.07	1.14	4.73	64	3.12	3.53	1.41	13.26
15	4.62	2.05	1.15	4.78	65	2.92	3.75	1.40	13.44
16	4.63	2.02	1.16	4.83	66	2.71	3.91	1.36	13.58
17	4.64	1.98	1.16	4.90	67	2.47	4.08	1.31	13.70
18	4.65	1.95	1.17	4.97	68	2.23	4.23	1.26	13.81
19	4.66	1.91	1.18	5.05	69	1.98	4.37	1.20	13.90
20	4.67	1.87	1.19	5.13	70	1.70	4.50	1.13	13.98
21	4.68	1.83	1.20	5.22	71	1.42	4.62	1.06	14.04
22	4.70	1.79	1.21	5.32	72	1.20	4.69	1.00	14.13
23	4.71	1.74	1.22	5.43	73	0.81	4.80	0.89	14.11
24	4.72	1.70	1.23	5.54	74	0.50	4.86	0.81	14.12
25	4.73	1.64	1.24	5.66	75	+0.16	4.90	0.71	14.12
26	4.75	1.59	1.25	5.79	76	−0.17	4.91	0.59	14.07
27	4.76	1.53	1.26	5.92	77	0.51	4.92	0.50	14.03
28	4.77	1.47	1.27	6.06	78	0.86	4.88	0.38	13.95
29	4.78	1.40	1.29	6.21	79	1.22	4.83	0.27	13.87
30	4.80	1.33	1.30	6.36	80	1.57	4.75	0.15	13.77
31	4.81	1.26	1.31	6.52	81	1.92	4.63	−0.03	13.64
32	4.82	1.18	1.33	6.68	82	2.26	4.49	+0.10	13.51
33	4.83	1.10	1.34	6.86	83	2.60	4.31	0.22	13.36
34	4.84	1.01	1.36	7.03	84	2.94	4.10	0.36	13.18
35	4.85	0.92	1.37	7.20	85	3.25	3.87	0.48	13.03
36	4.86	0.84	1.39	7.40	86	3.55	3.60	0.61	12.86
37	4.87	0.73	1.40	7.59	87	3.83	3.31	0.74	12.69
38	4.87	0.63	1.42	7.79	88	4.09	2.98	0.86	12.52
39	4.87	0.52	1.43	7.99	89	4.33	2.63	0.98	12.36
40	4.88	0.40	1.45	8.20	90	4.53	2.25	1.10	12.23
41	4.88	0.30	1.46	8.41	91	4.71	1.84	1.20	12.11
42	4.87	0.16	1.48	8.62	92	4.85	1.42	1.30	12.03
43	4.86	+0.03	1.49	8.79	93	4.96	0.97	1.40	11.99
44	4.85	−0.10	1.51	9.06	94	5.02	0.51	1.48	11.99
45	4.83	0.24	1.52	9.28	95	5.05	−0.04	1.55	12.04
46	4.82	0.30	1.53	9.49	96	5.04	+0.44	1.61	12.15
47	4.79	0.53	1.55	9.74	97	4.98	0.92	1.66	12.33
48	4.76	0.69	1.56	9.96	98	4.87	1.40	1.69	12.57
49	4.72	0.85	1.57	10.19	99	4.72	1.88	1.71	12.88

℧				
u	x'	y'	z'	ϱ
100°	−4.53	+2.35	+1.71	13.26
101	4.29	2.80	1.70	13.70
102	4.00	3.24	1.67	14.22
103	3.68	3.64	1.62	14.79
104	3.30	4.02	1.56	15.41
105	2.89	4.36	1.48	16.08
106	2.45	4.66	1.38	16.82
107	1.97	4.92	1.27	17.55
108	1.46	5.12	1.14	18.34
109	0.93	5.27	0.99	19.14
110	−0.38	5.35	0.84	19.97
111	+0.18	5.38	0.67	20.80
112	0.74	5.34	0.49	21.64
113	1.31	5.22	0.30	22.48
114	1.86	5.04	+0.10	23.30
115	2.39	4.79	−0.09	24.10
116	2.90	4.46	0.29	24.88
117	3.37	4.06	0.49	25.63
118	3.79	3.60	0.68	26.34
119	4.15	3.07	0.87	27.00
120	4.45	2.48	1.04	27.61
121	4.68	1.85	1.19	28.16
122	4.82	1.17	1.33	28.64
123	4.87	+0.47	1.44	28.95
124	4.83	−0.25	1.52	29.36
125	4.69	0.98	1.58	29.59
126	4.45	1.68	1.60	29.75
127	4.10	2.37	1.58	29.80
128	3.66	3.00	1.53	29.75
129	3.08	3.61	1.43	29.58
130	2.51	4.06	1.32	29.38
131	1.83	4.45	1.16	29.07
132	1.09	4.73	0.97	28.67
133	+0.32	4.89	0.76	28.21
134	−0.46	4.92	0.52	27.69
135	1.27	4.82	0.26	27.11
136	1.99	4.60	−0.00	26.57
137	2.70	4.25	+0.26	25.98
138	3.34	3.79	0.52	25.46
139	3.90	3.22	0.77	25.01
140	4.40	2.50	1.02	24.53
141	4.71	1.84	1.21	24.29
142	4.94	1.05	1.38	24.12
143	5.05	−0.24	1.52	24.10
144	5.02	+0.59	1.63	24.22
145	4.87	1.41	1.69	24.50
146	4.60	2.20	1.71	24.94
147	4.20	2.94	1.69	25.51
148	3.70	3.61	1.63	26.21
149	3.11	4.20	1.52	27.00

℧				
u	x'	y'	z'	ϱ
150°	−2.42	+4.68	+1.38	27.92
151	1.68	5.04	1.19	28.88
152	0.88	5.28	0.98	29.88
153	−0.06	5.38	0.74	30.89
154	+0.77	5.33	0.48	31.94
155	1.59	4.14	+0.20	32.85
156	2.36	4.80	−0.08	33.83
157	3.07	4.33	0.36	34.70
158	3.69	3.72	0.64	35.48
159	4.20	2.99	0.89	36.16
160	4.58	2.16	1.12	36.71
161	4.81	1.26	1.31	37.14
162	4.87	+0.31	1.46	37.41
163	4.77	−0.65	1.56	37.53
164	4.49	1.59	1.60	37.49
165	4.03	2.48	1.58	37.29
166	3.42	3.28	1.49	36.93
167	2.67	3.95	1.35	36.33
168	1.80	4.46	1.15	35.78
169	+0.86	4.79	0.91	35.03
170	−0.11	4.92	0.63	34.21
171	1.09	4.86	−0.32	33.35
172	2.03	4.60	+0.01	32.48
173	2.89	4.14	0.33	31.66
174	3.63	3.52	0.65	30.92
175	4.24	2.76	0.94	30.30
176	4.68	1.89	1.19	29.85
177	4.96	−0.96	1.40	29.58
178	5.05	+0.02	1.56	29.53
179	4.96	1.00	1.66	29.68
180	4.63	2.11	1.71	30.11
181	4.27	2.83	1.70	30.58
182	3.70	3.62	1.63	31.28
183	3.00	4.28	1.50	31.96
184	2.20	4.80	1.32	33.03
185	1.32	5.17	1.10	34.01
186	−0.39	5.35	0.84	35.02
187	+0.55	5.36	0.55	36.02
188	1.47	5.18	+0.24	36.97
189	2.34	4.81	−0.08	37.85
190	3.13	4.27	0.39	38.64
191	3.80	3.58	0.69	39.30
192	4.33	2.71	0.97	39.83
193	4.69	1.80	1.20	40.19
194	4.86	+0.78	1.39	40.38
195	4.83	−0.26	1.52	40.37
196	4.59	1.30	1.59	40.18
197	4.15	2.28	1.59	39.80
198	3.52	3.16	1.51	39.25
199	2.74	3.89	1.37	38.53

♅					♅				
u	x'	y'	z'	ϱ	u	x'	y'	z'	ϱ
200°	+1.46	−4.60	−1.07	37.33	250°	−1.54	+5.09	+1.16	29.93
201	+0.82	4.80	0.90	36.70	251	−0.75	5.30	0.94	30.56
202	−0.22	4.92	0.59	35.67	252	+0.05	5.38	0.71	31.13
203	1.17	4.84	−0.29	34.68	253	0.85	5.32	0.45	31.73
204	2.21	4.51	+0.08	33.58	254	1.62	5.13	+0.19	32.22
205	3.09	4.00	0.41	32.63	255	2.35	4.81	−0.08	32.65
206	3.83	3.31	0.73	31.80	256	3.01	4.37	0.34	33.00
207	4.41	2.49	1.02	31.13	257	3.59	3.83	0.59	33.22
208	4.81	1.56	1.27	30.66	258	4.08	3.18	0.83	33.35
209	5.02	−0.58	1.47	30.40	259	4.45	2.48	1.04	33.38
210	5.04	+0.42	1.61	30.37	260	4.70	1.79	1.21	33.29
211	4.87	1.42	1.69	30.55	261	4.85	0.90	1.37	33.12
212	4.53	2.36	1.71	30.93	262	4.86	+0.08	1.49	32.78
213	4.02	3.21	1.67	31.48	263	4.75	−0.74	1.56	32.32
214	3.38	3.95	1.57	32.19	264	4.51	1.54	1.60	31.81
215	2.63	4.55	1.42	32.95	265	4.15	2.28	1.59	31.17
216	1.78	4.99	1.22	33.80	266	3.69	2.96	1.53	30.43
217	−0.88	5.28	0.98	34.67	267	3.13	3.56	1.44	29.62
218	+0.05	5.38	0.71	35.53	268	2.50	4.06	1.32	28.73
219	0.98	5.30	0.41	36.36	269	1.80	4.45	1.16	27.78
220	1.87	5.04	+0.10	37.11	270	1.08	4.73	0.97	26.81
221	2.69	4.65	−0.17	37.78	271	+0.39	4.88	0.78	25.86
222	3.42	4.01	0.52	38.32	272	−0.42	4.92	0.53	24.79
223	4.02	3.28	0.80	38.74	273	1.15	4.84	0.30	23.79
224	4.48	2.42	1.06	39.01	274	1.86	4.65	−0.05	22.82
225	4.77	1.49	1.27	39.11	275	2.50	4.37	+0.18	21.89
226	4.87	+0.49	1.44	39.05	276	3.09	3.99	0.42	21.06
227	4.79	−0.52	1.55	38.81	277	3.62	3.53	0.64	20.20
228	4.52	1.50	1.59	38.40	278	4.06	3.01	0.85	19.61
229	4.08	2.42	1.58	37.84	279	4.47	2.53	1.04	18.99
230	3.45	3.24	1.50	37.10	280	4.71	1.83	1.21	18.57
231	2.70	3.92	1.36	36.23	281	4.91	1.20	1.35	18.23
232	1.84	4.44	1.16	35.26	282	5.02	−0.55	1.47	17.99
233	+0.90	4.78	0.92	34.20	283	5.05	+0.10	1.57	17.86
234	−0.06	4.92	0.64	33.09	284	5.01	0.74	1.64	17.82
235	1.03	4.87	0.34	31.97	285	4.88	1.36	1.69	17.88
236	1.94	4.62	−0.02	30.89	286	4.70	1.96	1.71	18.01
237	2.78	4.21	+0.29	29.87	287	4.45	2.52	1.71	18.19
238	3.51	3.64	0.59	29.01	288	4.14	3.04	1.68	18.43
239	4.12	2.94	0.87	28.18	289	3.79	3.51	1.64	18.70
240	4.58	2.15	1.12	27.57	290	3.39	3.94	1.57	18.99
241	4.89	1.29	1.33	27.13	291	2.96	4.32	1.49	19.29
242	5.04	−0.39	1.50	26.89	292	2.50	4.63	1.39	19.59
243	5.03	+0.52	1.62	26.83	293	2.01	4.90	1.28	19.89
244	4.87	1.40	1.69	26.94	294	1.51	5.10	1.15	20.17
245	4.58	2.24	1.71	27.21	295	1.01	5.25	1.02	20.44
246	4.16	3.01	1.69	27.61	296	−0.50	5.34	0.87	20.67
247	3.62	3.70	1.61	28.13	297	+0.01	5.38	0.72	20.89
248	3.00	4.28	1.50	28.68	298	0.52	5.36	0.56	21.07
249	2.28	4.76	1.34	29.32	299	1.00	5.29	0.40	21.21
					300	1.48	5.17	0.24	21.33

♄					♄				
u	x'	y'	z'	ϱ	u	x'	y'	z'	ϱ
0°	+7.50	−5.24	−3.13	9.22	100°	−5.59	−7.01	+0.61	16.62
2	7.48	5.26	3.13	9.31	102	6.08	6.56	0.83	16.37
4	7.47	5.28	3.13	9.41	104	6.71	5.85	1.14	15.86
6	7.45	5.30	3.13	9.53	106	7.24	5.11	1.42	15.43
8	7.43	5.33	3.13	9.67	108	7.64	4.40	1.66	15.14
10	7.41	5.35	3.12	9.81	110	8.02	3.57	1.90	14.84
12	7.39	5.38	3.12	9.97	112	8.31	2.69	2.13	14.62
14	7.37	5.41	3.12	10.14	114	8.53	1.75	2.35	14.51
16	7.34	5.45	3.12	10.33	116	8.64	−0.77	2.54	14.54
18	7.30	5.49	3.11	10.52	118	8.66	+0.19	2.69	14.74
20	7.27	5.53	3.11	10.73	120	8.56	1.27	2.83	15.10
22	7.23	5.58	3.10	10.95	122	8.35	2.31	2.93	15.66
24	7.15	5.70	3.10	11.20	124	8.03	3.35	3.00	16.42
26	7.12	5.71	3.09	11.43	126	8.59	4.35	3.02	17.35
28	7.07	5.77	3.08	11.68	128	7.03	5.32	3.00	18.44
30	7.00	5.85	3.08	11.94	130	6.36	6.23	2.94	19.68
32	6.93	5.93	3.07	12.21	132	5.58	7.06	2.83	21.04
34	6.85	6.02	3.05	12.49	134	4.71	7.81	2.68	22.48
36	6.75	6.12	3.04	12.78	136	3.74	8.45	2.48	24.01
38	6.65	6.22	3.03	13.07	138	2.71	8.97	2.25	25.57
40	6.54	6.34	3.01	13.37	140	1.53	9.51	1.97	27.28
42	6.41	6.46	2.99	13.68	142	−0.48	9.60	1.66	28.77
44	6.28	6.59	2.97	13.99	144	+0.68	9.70	1.32	30.36
46	6.12	6.72	2.94	14.31	146	1.81	9.65	0.97	31.88
48	5.96	6.86	2.91	14.62	148	3.00	9.44	0.56	33.44
50	5.78	7.01	2.88	14.94	150	4.12	9.06	+0.16	34.89
52	5.58	7.17	2.85	15.25	152	5.19	8.54	−0.25	36.26
54	5.36	7.33	2.80	15.56	154	6.18	7.86	0.66	37.55
56	5.12	7.49	2.76	15.87	156	7.08	7.04	1.07	38.73
58	4.87	7.66	2.71	16.17	158	7.86	6.08	1.46	39.80
60	4.59	7.82	2.65	16.46	160	8.51	5.01	1.83	40.73
62	4.29	7.99	2.58	16.74	162	9.01	3.84	2.17	41.53
64	3.97	8.15	2.51	17.00	164	9.35	2.58	2.47	42.17
66	3.63	8.31	2.43	17.26	166	9.51	+1.24	2.73	42.66
68	3.23	8.48	2.33	17.47	168	9.48	−0.09	2.93	42.98
70	2.85	8.61	2.24	17.69	170	9.27	1.46	3.08	43.12
72	2.43	8.74	2.13	17.88	172	8.86	2.78	3.16	43.08
74	1.98	8.85	2.01	18.04	174	8.25	4.09	3.18	42.85
76	1.51	9.94	1.87	18.16	176	7.46	5.29	3.13	42.45
78	1.00	9.02	1.73	18.26	178	6.48	6.39	3.00	41.85
80	+0.48	9.07	1.58	18.32	180	5.35	7.34	2.80	41.07
82	−0.07	9.08	1.41	18.34	182	4.08	8.10	2.53	40.12
84	0.65	9.05	1.23	18.32	184	2.70	8.66	2.20	39.01
86	1.24	8.99	1.04	18.26	186	+1.24	8.99	1.80	37.76
88	1.85	8.88	0.83	18.16	188	−0.25	9.07	1.35	36.40
90	2.47	8.72	0.61	18.00	190	1.75	8.90	0.87	34.95
92	3.10	8.50	0.39	17.81	192	3.19	8.47	−0.35	33.48
94	3.74	8.23	−0.15	17.57	194	4.55	7.78	+0.17	32.01
96	4.37	7.89	+0.10	17.28	196	5.77	6.86	0.69	30.62
98	4.99	7.48	0.35	16.97	198	6.81	5.72	1.19	29.37

♄

u	x'	y'	z'	ϱ
200°	−7.64	−4.40	+1.66	28.32
202	8.24	2.96	2.07	27.54
204	8.58	−1.42	2.41	27.08
206	8.66	+0.16	2.69	26.97
208	8.48	1.74	2.88	27.19
210	8.06	3.26	2.99	27.73
212	7.41	4.68	3.02	28.54
214	6.56	5.97	2.96	29.56
216	5.54	7.10	2.82	30.72
218	4.38	8.04	2.61	31.97
220	3.11	8.78	2.34	33.26
222	1.77	9.31	2.01	34.54
224	−0.59	9.72	1.72	35.61
226	+0.97	9.70	1.23	36.91
228	2.31	9.58	0.80	37.96
230	3.59	9.26	+0.36	38.88
232	4.79	8.76	−0.09	39.67
234	5.89	8.08	0.54	40.31
236	6.87	7.25	0.97	40.80
238	7.70	6.30	1.38	41.13
240	8.39	5.24	1.75	41.31
242	8.92	4.09	2.10	41.32
244	9.28	2.88	2.40	41.18
246	9.48	1.63	2.66	40.88
248	9.51	+0.38	2.87	40.44
250	9.39	−0.87	3.02	39.84
252	9.09	2.09	3.13	39.11
254	8.65	3.30	3.18	38.23
256	8.10	4.35	3.18	37.26
258	7.41	5.35	3.12	36.16
260	6.60	6.27	3.02	34.94
262	5.71	7.07	2.87	33.64
264	4.74	7.74	2.68	32.26
266	3.70	8.28	2.45	30.80
268	2.64	8.68	2.18	29.30
270	1.55	8.94	1.89	27.75
272	+0.46	9.07	1.57	26.16
274	−0.62	9.06	1.24	24.57
276	1.66	8.92	0.90	22.98
278	2.66	8.66	0.55	21.41
280	3.61	8.29	−0.20	19.86
282	4.53	7.79	+0.16	18.32
284	5.29	7.26	0.48	16.94
286	5.99	6.64	0.80	15.61
288	6.64	5.94	1.11	14.36
290	7.18	5.19	1.39	13.23
292	7.64	4.42	1.65	12.23
294	8.00	3.62	1.89	11.39
296	8.28	2.80	2.11	10.70
298	8.66	1.90	2.36	10.05
300	8.61	1.16	2.47	9.83

♆

u	x'	y'	z'	ϱ
0°	+11.02	−15.80	−5.33	19.74
5	10.98	15.92	5.32	20.06
10	10.93	15.95	5.31	20.44
15	10.88	15.99	5.30	20.87
20	10.81	16.04	5.28	21.35
25	10.71	16.12	5.26	21.89
30	10.58	16.21	5.23	22.47
35	10.42	16.32	5.20	23.09
40	10.21	16.47	5.15	23.75
45	9.95	16.64	5.09	24.45
50	9.63	16.84	5.02	25.16
55	9.25	17.07	4.93	25.92
60	8.80	17.33	4.82	26.66
65	8.27	17.61	4.69	27.40
70	7.66	17.91	4.54	28.12
75	6.96	18.22	4.36	28.49
80	6.16	18.53	4.15	29.45
85	5.26	18.84	3.91	30.01
90	4.26	19.12	3.64	30.49
95	3.15	19.35	3.32	30.86
100	1.93	19.53	2.97	31.09
105	+ 0.60	19.63	2.57	31.18
110	— 0.82	19.62	2.13	31.09
115	2.30	19.49	1.66	30.64
120	3.93	19.20	1.12	30.37
125	5.58	18.73	−0.55	29.68
130	7.26	18.07	+0.05	28.81
135	8.95	17.18	0.68	27.71
140	10.61	16.05	1.33	26.42
145	12.19	14.68	1.98	24.97
150	13.67	13.04	2.64	23.41
155	14.98	11.16	3.27	21.78
160	16.09	9.04	3.87	20.23
165	16.94	6.71	4.41	18.90
170	17.49	4.21	4.89	17.96
175	17.71	— 1.57	5.28	17.62
180	17.57	+ 1.14	5.56	17.99
185	17.05	3.86	5.73	19.11
190	16.14	6.52	5.77	20.90
195	14.86	9.04	5.69	23.11
200	12.89	11.22	5.34	25.86
205	11.31	13.42	5.12	28.31
210	9.13	15.16	4.66	30.99
215	6.75	16.56	4.09	33.60
220	4.25	17.57	3.45	36.03
225	— 1.70	18.12	2.73	38.18
230	+ 0.89	18 43	1.96	40.17
235	3.38	18.30	1.18	41.79
240	5.76	17.84	+0.39	43.08
245	7.99	17.07	−0.39	44.05
250	10.01	16.01	1.15	44.66
255	11.85	14.82	1.86	45.01
260	13.44	13.44	2.52	45.02
265	14.80	11.93	3.12	44.75
270	15.95	10.36	3.67	44.22
275	16.87	8.74	4.15	43.45
280	17.62	7.13	4.58	42.53
285	18.14	5.56	4.93	41.38
290	18.53	4.03	5.23	40.35
295	18.77	2.58	5.48	38.74
300	18.90	1.20	5.69	37.28

Forces perturbatrices. Variations différentielles qui déterminent les altérations des élémens de l'orbite de la comète et de l'anomalie moyenne.

Ψ

u	X	Y	Z	dn	tdn	de	$d\omega$	$\frac{di-d\omega\times}{(1-\sqrt{1-e^2})}$	dp	dq
0°	+0.0057	+0.0059	— 0.0027	—0″.003o707	— 0″.00	+ 0.000030	— 0″.15	— 0″.04	—0.000000	—0.000003
1	0.0066	0.0057	0.0029	0.0027305	0.01	26	0.16	0.05	4	4
2	0.0074	0.0053	0.0032	0.0022844	0.01	22	0.18	0.06	1	4
3	0.0083	0.0050	0.0034	0.0017737	0.01	17	0.21	0.06	2	4
4	0.0089	0.0044	0.0035	0.0011134	0.01	11	0.24	0.07	2	4
5	0.0093	0.0037	0.0036	—0.0003984	— 0.00	+ 4	0.28	0.07	3	4
6	0.0099	0.0030	0.0037	+0.0003535	+ 0.00	— 3	0.33	0.08	4	4
7	0 0103	0.0022	0.0037	0.0011662	0.02	11	0.39	0.08	5	5
8	0.0105	0.0014	0.0037	0.0020054	0.04	19	0.45	0.07	6	4
9	0.0106	+0.0004	0.0036	0.0028514	0.06	27	0.52	0.06	6	4
10	0.0106	—0.0006	0.0035	0.0036834	0.09	35	0.59	0.05	7	4
11	0.0104	0.0016	0.0034	0.0044770	0.13	42	0.65	0.03	8	3
12	0.0103	0.0025	0.0032	0.0052355	0.17	49	0.71	— 0.01	9	3
13	0.0097	0.0037	0.0029	0.0058736	0 21	55	0.75	+ 0.02	9	2
14	0.0091	0.0047	0.0026	0.0064373	0.25	61	0.77	0.06	10	1
15	0.0084	0.0058	0.0023	0.0069326	0.30	66	0.79	0.11	10	1
16	0.0075	0.0067	0.0019	0.0071887	0.34	68	0.75	0.16	9	—0.000000
17	0.0065	0.0077	0.0015	0.0073544	0.48	70	0.69	0.22	8	+0.000000
18	0.0054	0.0086	0.0011	0.0073660	0 42	71	0.59	0.28	7	1
19	0.0043	0.0091	0.0007	0.0072154	0.45	70	0.45	0.34	4	1
20	0.0030	0.0101	— 0 0002	0.0068925	0.47	67	0.26	0.41	— 1	+0.000090
21	0.0017	0.0108	+ 0.0003	0.0064073	0.47	64	— 0.02	0.47	+ 2	—0.000000
22	+0.0003	0.0114	0.0007	0.0057599	0.46	58	+ 0.27	0.54	7	2
23	—0.0011	0.0118	0.0012	0.0049413	0.42	52	0.62	0.59	12	4
24	0.0025	0.0122	0.0017	0.0039747	0.37	44	1.01	0.64	19	8
25	0.0040	0.0125	0.0022	0.0028454	0.28	36	1.47	0.67	27	12
26	0.0055	0.0127	0.0027	0.0016003	0.17	26	1.97	0.69	36	18
27	0.0069	0.0128	0.0031	+0.0002232	+ 0.03	16	2.52	0.68	46	25
28	0.0084	0.0129	0.0036	—0.0012757	— 0.16	— 4	3.13	0 65	58	34
29	0.0108	0.0128	0.0040	0.0037824	0.50	+ 15	4.03	0.54	71	44
30	0.0112	0.0127	0.0045	0.0045644	0.65	20	4.46	0.50	86	57
31	0.0126	0.0124	0.0049	0.0063491	0.97	33	5.18	0.37	102	72
32	0.0139	0.0121	0.0053	0.0082097	1.34	47	5.93	+ 0.19	119	90
33	0.0152	0.0117	0.0058	0.0101138	1.76	60	6.71	— 0.03	139	110
34	0.0164	0.0113	0.0061	0.0119546	2.22	74	7.50	0.30	160	133
35	0.0175	0.0108	0.0065	0.0140152	2.77	88	8.29	0.62	182	158
36	0.0187	0.0102	0.0069	0.0160585	3.38	102	9.13	1.03	206	188
37	0.0198	0.0095	0.0073	0.0181310	4.05	117	9.93	1.50	233	221
38	0.0208	0.0088	0.0076	0.0201970	4.79	132	10.73	2.08	261	258
39	0.0218	0.0080	0.0079	0.0222509	5.59	146	11.52	2.65	291	299
40	0.0227	0.0072	0.0082	0.0243014	6.47	161	12.28	3.35	323	344
41	0.0235	0.0063	0.0086	0.0263433	7.42	175	13.03	4.13	356	394
42	0.0243	0.0053	0.0089	0.0283456	8.44	190	13.67	5.01	392	449
43	0.0248	0.0044	0.0092	0.0300831	9.48	263	14.24	5.90	429	507
44	0.0257	0.0033	0.0095	0.0322608	10.72	220	14.83	7.04	469	574
45	0.0263	0.0022	0.0098	0.0341428	11.97	235	15.30	8.21	511	645
46	0.0268	0.0016	0.0099	0.0357288	13.20	246	15.91	9.32	551	717
47	0.0273	+0.0002	0.0103	0.0377122	14.67	266	16.03	10.85	599	804
48	0.0277	0.0015	0.0105	0.0393756	16.12	283	16.83	12.33	646	891
49	0.0280	0.0028	0.0107	0.0409480	17.63	299	17.61	13.91	695	986

Les valeurs de *de*, *dp* et *dq* doivent être multipliées par sin 1°, ou par le nombre dont le logarithme est 8,1961199.

$\mathfrak{T}$

u	X	Y	Z	dn	tdn	de	$d\omega$	$d\varepsilon - d\omega \times (1-\sqrt{1-e^2})$	dp	dq
50°	−0.0287	+0.0041	+ 0.0109	−0″.0424187	−19″.18	+ 0.000317	+ 15″.96	− 15″.60	+0.000744	−0.001086
51	0.0284	0.0056	0.0112	0.0437760	20.78	336	15.57	17.40	796	1192
52	0.0285	0.0069	0.0113	0.0449767	22.40	353	15.21	19.23	847	1302
53	0.0284	0.0085	0.0114	0.0460518	24.05	374	14.49	21.20	900	1419
54	0.0283	0.0100	0.0116	0.0468603	25.64	395	13.61	23.20	953	1540
55	0.0281	0.0115	0.0117	0.0476963	27.32	417	12.47	25.31	1006	1666
56	0.0278	0.0122	0.0118	0.0479268	28.72	429	11.81	27.04	1061	1799
57	0.0274	0.0147	0.0118	0.0486252	30.47	465	9.58	29.61	1110	1928
58	0.0268	0.0164	0.0118	0.0486442	31.85	493	7.57	31.76	1161	2062
59	0.0261	0.0180	0.0118	0.0470410	33.18	513	4.72	33.12	1211	2201
60	0.0254	0.0197	0.0118	0.0480885	34.31	551	2.89	35.98	1254	2331
61	0.0245	0.0213	0 0117	0.0473610	35.25	583	+ 0.17	37.76	1293	2447
62	0.0234	0.0230	0.0116	0.0465025	36.08	626	− 3.00	39.82	1333	2587
63	0.0223	0.0246	0.0114	0.0451366	36.48	651	6.50	41.61	1366	2715
64	0.0209	0.0258	0.0110	0.0433648	36.49	683	9.79	42.75	1360	2752
65	0.0195	0 0277	0.0109	0.0413545	34.74	728	14.17	44.17	1410	2914
66	0.0179	0.0291	0.0107	0.0392914	35.79	768	18.42	45.07	1422	2999
67	0.0161	0.0305	0.0103	0.0365304	34.60	810	23.13	45.49	1422	3060
68	0.0142	0.0318	0.0099	0.0335114	32.98	853	28.00	45.52	1413	3101
69	0.0122	0.0330	0.0094	0.0301811	30.84	897	33.03	45.07	1395	3120
70	0.0100	0.0374	0.0089	0.0271346	28.79	1024	43.17	46.49	1361	3104
71	0.0077	0.0374	0.0082	0.0227842	25.08	1047	47.40	44 10	1284	2985
72	0.0060	0.0375	0.0079	0.0194246	22.17	1079	51.28	42.48	1284	3043
73	0.0028	0.0370	0.0071	0.0131806	15.60	1086	55.98	37.12	1182	2854
74	−0.0003	0.0365	0.0064	0.0069993	8.58	1098	60.01	31.25	1096	2695
75	+0.0025	0.0337	0.0056	−0.0019844	− 2.52	1037	60.46	24.66	988	2479
76	0.0052	0.0345	0.0046	+0.0034433	+ 4.53	1090	66.93	19.47	848	2164
77	0.0080	0.0349	0.0039	0.0089155	15.26	1134	72.93	13.42	736	1911
78	0.0108	0.0355	0.0031	0.0146844	20.63	1186	79.67	− 6.66	599	1584
79	0.0137	0.0357	0.0021	0.0205548	29.89	1235	85.88	+ 1.14	417	1124
80	0.0165	0.0345	0.0012	0.0266426	40.05	1228	89.19	11.06	238	654
81	0.0193	0.0332	+ 0.0002	0.0326617	50.72	1220	92.46	21.61	+ 49	− 132
82	0 0220	0.0317	− 0.0007	0.0386249	61.93	1201	95 07	33.08	− 152	+ 432
83	0.0245	0.0300	0.0016	0.0444245	73.53	1171	96.99	45 29	361	1042
84	0 0271	0.0279	0.0026	0.0502319	85.80	1124	98.08	58.66	584	1717
85	0.0294	0.0259	0.0035	0.0554253	97.67	1072	98.48	71.91	796	2378
86	0.0316	0.0235	0.0043	0.0604741	109.86	1001	97.95	86.03	1018	3093
87	0.0336	0.0209	0.0051	0.0651445	121.99	918	96.61	99.90	1235	3818
88	0.0353	0.0182	0.0059	0.0691003	133.91	819	94.33	115.22	1455	4573
89	0.0369	0.0155	0.0066	0.0731744	145.43	709	91 30	129.93	1666	5327
90	0.0382	0.0125	0.0073	0.0764050	156.36	591	87.22	144.53	1869	6075
91	0.0393	0.0095	0.0079	0.0790610	166.55	443	82 40	158.72	2062	6815
92	0.0401	0.0066	0.0084	0.0810822	175 76	294	76 79	172.28	2244	7539
93	0.0406	0.0036	0 0089	0.0824223	183.79	+ 133	70.41	184.96	2412	8239
94	0.0407	+0.0006	0.0093	0.0830518	190.45	− 37	63.26	196.51	2566	8911
95	0.0405	−0.0023	0.0096	0.0829228	195.50	216	55.42	206.64	2706	9551
96	0.0400	0.0052	0.0099	0.0820318	198.75	404	46.87	214.67	2829	10151
97	0.0392	0.0080	0.0101	0.0803632	200.05	586	37.64	221.79	2931	10689
98	0.0380	0.0108	0.0102	0.0779377	199.27	804	27.77	226.43	3021	11209
99	0.0364	0.0134	0.0103	0.0747811	196.33	1016	17.29	228.92	3086	11612

π

t	X	Y	Z	dn	tdn	de	dω	$\frac{ds}{-d\omega(1-\sqrt{1-e^2})}$	dp	dq
0	+0.0346	−0.0160	−0.0102	+0″.0709452	+191″.20	−0.001235	+ 6″.28	+ 229″.16	−0.003128	+0.011977
1	0.0325	0.0185	0.0101	0.0664811	183.87	1461	5.17	227.09	3133	12195
2	0.0302	0.0209	0.0099	0.0614425	174.34	1691	16.98	222.67	3128	12373
3	0.0276	0.0231	0.0097	0.0559035	162.70	1924	29.05	215.88	3082	12393
4	0.0248	0.0252	0.0093	0.0499033	148.92	2159	41.17	206.62	3004	12273
5	0.0218	0.0271	0.0088	0.0435128	133.11	2391	53.28	194.92	2890	12003
6	0.0187	0.0289	0.0083	0.0367454	112.58	2620	65.21	180.73	2744	11583
7	0.0154	0.0303	0.0076	0.0296874	95.37	2828	76.61	163.54	2556	10963
8	0.0120	0.0316	0.0069	0.0224178	73.77	3039	87.97	144.29	2333	10171
9	0.0085	0.0326	0.0060	0.0149015	50.32	3226	98.50	121.75	2073	9207
10	0.0049	0.0333	0.0051	+0.0072106	+ 24.88	3392	108.27	97.02	1757	7915
11	+0.0012	0.0336	0.0041	−0.0005669	− 2.00	3529	117.24	70.81	1443	6607
12	−0.0026	0.0336	0.0030	0.0084085	30.39	3625	124.73	17.72	1074	5000
13	0.0064	0.0332	0.0019	0.0163564	60.47	3700	131.21	+ 5.28	673	3183
14	0.0101	0.0324	−0.0007	0.0239539	90.59	3720	135.94	− 29.67	− 238	+ 1146
15	0.0139	0.0312	+0.0006	0.0314541	121.64	3688	139.04	67.43	+ 222	− 1111
16	0.0176	0.0295	0.0019	0.0386686	152.88	3596	140.22	107.96	707	3508
17	0.0211	0.0273	0.0033	0.0454841	183.81	3435	139.20	148.24	1213	6132
18	0.0245	0.0247	0.0046	0.0516993	213.51	3218	135.82	189.98	1728	3878
19	0.0275	0.0214	0.0060	0.0572212	241.44	2888	129.82	231.86	2248	11744
20	0.0303	0.0177	0.0073	0.0618640	266.64	2487	120.04	272.80	2761	14669
21	0.0326	0.0135	0.0086	0.0654438	288.08	1996	109.35	311.52	3255	17586
22	0.0343	0.0088	0.0097	0.0677746	304.62	1413	94.67	346.71	3715	20414
23	0.0355	−0.0037	0.0108	0.0686778	315.11	− 840	77.02	376.72	4125	23058
24	0.0359	+0.0018	0.0116	0.0680070	318.47	+ 13	56.55	400.07	4469	25412
25	0.0354	0.0074	0.0122	0.0656347	313.64	836	33.65	414.51	4727	27329
26	0.0341	0.0131	0.0126	0.0615200	299.92	1701	+ 8.87	419.31	4883	28736
27	0.0318	0.0188	0.0126	0.0554717	275.85	2611	− 17.83	411.60	4918	29454
28	0.0287	0.0241	0.0124	0.0478271	242.55	3532	45.05	391.65	4832	29446
29	0.0242	0.0293	0.0117	0.0378498	195.72	4438	73.88	354.26	4580	28415
30	0.0196	0.0331	0.0108	0.0280170	147.69	5173	97.51	310.46	4238	26765
31	0.0140	0.0364	0.0096	0.0165279	88.81	5843	112.17	249.68	3735	24009
32	0.0079	0.0397	0.0080	−0.0106564	− 23.23	6554	144.87	180.67	3130	20493
33	−0.0015	0.0398	0.0062	+0.0075727	+ 42.25	6745	156.73	98.28	2424	16159
34	+0.0050	0.0397	0.0042	0.0192560	109.43	6906	167.89	− 11.46	1647	11183
35	0.0115	0.0383	0.0021	0.0304202	176.08	6839	173.77	+ 81.52	813	5623
36	0.0171	0.0360	+0.0000	0.0396251	233.57	6604	174.64	167.43	+ 11	− 76
37	0.0224	0.0326	−0.0020	0.0477101	286.33	6150	170.38	253.60	− 790	+ 5673
38	0.0270	0.0284	0.0039	0.0539820	329.79	5516	161.38	332.65	1538	11256
39	0.0306	0.0236	0.0051	0.0583978	363.12	4826	147.19	403.73	1980	14775
40	0.0336	0.0177	0.0074	0.0610710	386.44	3708	129.98	466.01	2852	21699
41	0.0352	0.0127	0.0085	0.0616507	396.92	2798	112.51	507.99	3282	25471
42	0.0361	0.0070	0.0095	0.0606495	397.23	1723	91.33	540.90	3658	28959
43	0.0361	+0.0013	000103	0.0581002	387.06	+ 612	68.94	560.04	3925	31707
44	0.0352	−0.0042	0.0107	0.0541798	367.06	− 509	45.75	565.19	4084	33668
45	0.0335	0.0094	0.0110	0.0490983	338.22	1614	+ 22.59	556.82	4138	34833
46	0.0312	0.0142	0.0109	0.0430500	301.50	2682	− 0.16	535.32	4096	35200
47	0.0282	0.0187	0.0106	0.0362380	257.97	3695	22.09	501.38	3960	34764
48	0.0247	0.0226	0.0101	0.0288514	208.74	4642	42.85	456.08	3740	33552
49	0.0207	0.0261	0.0094	0.0210674	154.89	5690	62.11	399.94	3568	33627

$\mathfrak{T}$

u	X	Y	Z	dn	tdn	de	$d\omega$	$\frac{ds}{-d\omega(1-\sqrt{1-e^2})}$	dp	dq
150°	+0.0163	−0.0289	−0.0085	+0″.0131032	+ 97″.86	−0.006151	+ 34″.10	+ 333″.85	−0.003075	+0.028820
151	0.0116	0.0311	0.0073	+0.0049382	+ 37.47	6865	95.14	258.64	2644	25352
152	0.0066	0.0327	0.0061	−0.0030910	− 23.83	7356	108.39	175.37	2158	21164
153	+0.0014	0.0336	0.0046	0.0108992	85.32	7682	119.16	+ 85.04	1623	16295
154	−0.0039	0.0336	0.0030	0.0183443	145.81	7855	127.24	− 11.29	1048	10775
155	0.0092	0.0329	−0.0013	0.0252475	203.75	7765	132.33	111.92	− 443	+ 4664
156	0.0145	0.0313	+0.0005	0.0314283	257.47	7582	134.12	214.84	+ 180	− 1936
157	0.0196	0.0288	0.0024	0.0367902	305.92	7105	132.93	318.17	813	8971
158	0.0243	0.0253	0.0043	0.0409067	345.21	6381	127.46	418.35	1429	16222
159	0.0286	0.0209	0.0062	0.0437811	374.89	5396	118.43	511.96	2021	23536
160	0.0321	0.0155	0.0080	0.0451298	392.07	4149	105.33	592.50	2562	30647
161	0.0346	0.0093	0.0096	0.0447788	394.64	2655	88.78	661.82	3028	37223
162	0.0361	−0.0024	0.0110	0.0426019	380.81	− 939	68.55	707.79	3396	42913
163	0.0362	+0.0050	0.0120	0.0385465	349.45	+ 1013	+ 45.31	727.69	3641	47334
164	0.0348	0.0125	0.0126	0.0327029	300.64	4388	− 1.50	717.30	3742	50079
165	0.0318	0.0190	0.0127	0.0252200	235.07	4905	6.60	672.45	3685	50812
166	0.0272	0.0265	0.0122	0.0165298	156.19	6657	32.62	594.31	3466	49271
167	0.0212	0.0324	0.0111	−0.0069875	− 66.93	8403	57.66	483.51	3093	45374
168	0.0141	0.0367	0.0095	+0.0026935	+ 26.15	9685	79.32	344.30	2587	39152
169	−0.0063	0.0393	0.0075	0.0119223	117.28	10536	96.10	185.44	1982	31035
170	+0.0018	0.0401	0.0051	0.0201368	200.71	11005	109.59	− 14.83	1316	21331
171	0.0097	0.0390	+0.0025	0.0268542	271.19	10659	116.82	+ 156.69	+ 636	+ 10679
172	0.0170	0.0362	−0.0001	0.0317982	325.30	9983	118.43	308.09	− 18	− 311
173	0.0233	0.0318	0.0026	0.0346846	359.40	8836	115.73	465.33	609	11011
174	0.0284	0.0264	0.0049	0.0356755	374.38	7375	108.63	587.39	1113	20914
175	0.0322	0.0201	0.0068	0.0348635	370.49	5858	98.21	681.87	1515	29620
176	0.0346	0.0134	0.0085	0.0325275	350.00	4013	85.56	746.10	1804	36805
177	0.0356	+0.0065	0.0097	0.0289374	315.15	2086	71.42	780.52	1988	42362
178	0.0353	−0.0002	0.0105	0.0233210	269.29	+ 161	56.59	785.32	2072	46161
179	0.0339	0.0068	0.0109	0.0192148	214.47	− 1743	45.77	765.96	2066	48321
180	0.0324	0.0137	0.0110	0.0138203	156.12	3756	26.58	741.90	1992	48949
181	0.0282	0.0179	0.0107	0.0081484	93.15	5043	13.30	653.68	1853	47981
182	0.0242	0.0220	0.0101	+0.0026143	+ 30.24	6465	− 0.41	568.75	1667	45587
183	0.0196	0.0265	0.0093	−0.0026312	− 30.79	7669	+ 11.32	468.47	1445	41877
184	0.0145	0.0297	0.0082	0.0074781	88.54	8651	23.37	354.21	1199	36935
185	0.0090	0.0319	0.0068	0.0113830	136.29	9380	31.23	229.94	939	30897
186	+0.0033	0.0333	0.0052	0.0153644	186.06	9844	39.34	+ 96.79	675	23813
187	−0.0027	0.0337	0.0035	0.0181895	222.76	10016	46.19	− 41.76	417	15834
188	0.0087	0.0330	−0.0015	0.0201316	249.30	9878	49.02	182.73	− 172	+ 7096
189	0.0146	0.0313	+0.0005	0.0211195	264.42	9408	56.24	323.89	+ 50	− 2263
190	0.0202	0.0285	0.0026	0.0210313	266.21	8588	59.35	458.30	243	12012
191	0.0254	0.0244	0.0047	0.0198495	253.97	7407	61.25	583.33	398	21928
192	0.0299	0.0193	0.0068	0.0175702	227.23	5875	61.83	692.63	509	31502
193	0.0334	0.0130	0.0087	0.0142060	185.67	3998	61.21	779.50	572	40482
194	0.0356	−0.0058	0.0104	0.0098848	130.56	− 1830	59.34	836.77	585	48280
195	0.0364	+0.0020	0.0117	−0.0048155	− 64.27	+ 552	56.30	858.05	548	54357
196	0.0354	0.0102	0.0125	+0.0007109	+ 9.59	3047	51.67	837.98	470	58191
197	0.0327	0.0183	0.0127	0.0062961	85.76	5508	45.92	773.83	359	59326
198	0.0281	0.0257	0.0123	0.0115426	199.94	7782	39.02	665.72	232	57456
199	0.0219	0.0320	0.0112	0.0158689	220.54	9706	31.17	518.12	106	52514

☿

	X	Y	Z	dn	tdn	de	$d\omega$	$\frac{de}{-d\omega(1-\sqrt{1-e^2})}$	dp	dq
°										
0	—0.0114	+0.0379	+0.0088	+0″0196654	+276″01	+0.011562	+17″82	— 268″65	— 0.000000	— 0.041182
1	—0.0060	0.0395	0.0074	0.0206305	291.74	11978	13.30	— 140.69	70	34521
2	+0.0025	0.0401	0.0048	0.0206047	294.89	12170	+ 3.83	+ 63.84	91	22653
3	0.0102	0.0389	+0.0023	0.0191081	276.11	11767	— 4.71	247.18	— 66	— 10856
4	0.0183	0.0354	—0.0006	0.0159568	232.77	10710	14.97	438.96	+ 23	+ 2812
5	0.0247	0.0306	0.0032	0.0118454	174.45	9229	23.86	588.49	149	14820
6	0.0296	0.0247	0.0055	0.0070164	104.29	7405	31.83	703.87	309	25498
7	0.0331	0.0180	0.0074	+0.0018358	+ 27.53	5364	39.78	782.75	487	34473
8	0.0350	0.0110	0.0089	—0.0033533	— 50.76	2878	46.64	825.34	671	41510
9	0.0356	+0.0040	0.0100	0.0082375	12.58	+ 970	52.59	833.56	846	46508
0	0.0348	—0.0028	0.0107	0.0125780	193.87	— 935	57.61	811.17	1000	49510
1	0.0336	0.0092	0.0110	0.0165281	257.02	2864	62.80	774.35	1128	50712
2	0.0301	0.0150	0.0109	0.0193558	303.65	4581	64.86	689.42	1218	50161
3	0.0264	0.0201	0.0105	0.0211741	335.07	6081	66.90	598.77	1265	48078
4	0.0221	0.0245	0.0098	0.0222423	355.01	7346	67.78	492.93	1265	44602
5	0.0172	0.0280	0.0088	0.0279191	356.99	8353	67.45	376.34	1214	39926
6	0.0119	0.0308	0.0075	0.0215095	349.17	9109	65.73	249.60	1107	34111
7	0.0063	0.0326	0.0061	0.0196947	322.38	9585	62.51	+ 117.54	944	27364
8	+0.0005	0.0335	0.0044	0.0169439	279.66	9778	57.65	— 17.17	725	19823
9	—0.0054	0.0335	0.0026	0.0132787	220.95	9679	50.69	152.19	448	11608
0	0.0113	0.0324	—0.0007	0.0087683	147.08	9278	42.33	284.02	+ 118	+ 2899
1	0.0170	0.0305	+0.0013	—0.0036472	— 61.67	8667	32.26	410.16	— 239	— 5586
2	0.0224	0.0269	0.0040	+0.0024136	+ 41.14	7549	18.73	524.07	784	17454
3	0.0271	0.0226	0.0063	0.0087381	149.75	6236	— 3.95	624.17	1295	27603
4	0.0312	0.0172	0.0085	0.0152653	264.26	4762	12.77	704.55	1808	36885
5	0.0342	0.0108	0.0103	0.0216557	377.77	2798	30.95	759.94	2289	44779
6	0.0360	—0.0037	0.0108	0.0275406	484.08	— 766	50.04	785.90	2465	46313
7	0.0363	+0.0040	0.0119	0.0324896	575.37	+ 1373	68.96	778.47	2813	50828
8	0.0350	0.0118	0.0126	0.0360919	643.91	3522	87.15	735.81	3061	53287
9	0.0321	0.0195	0.0127	0.0380287	683.48	5576	103.28	658.95	3189	53528
0	0.0275	0.0264	0.0122	0.0377500	683.40	7383	115.59	545.93	3225	52257
1	0.0215	0.0323	0.0112	0.0353727	644.98	8865	123.74	407.08	2959	46337
2	0.0144	0.0367	0.0096	0.0308589	566.69	9910	126.53	248.75	2606	39437
3	—0.0066	000394	0.0076	0.0244012	451.26	10482	122.88	— 80.70	2106	30891
4	+0.0014	0.0402	0.0052	0.0164292	305.94	10547	115.63	+ 86.99	1490	21176
5	0.0093	0.0392	0.0027	+0.0073955	+138.67	10132	102.16	245.49	789	10880
6	0.0164	0.0366	+0.0002	—0.0020448	— 38.60	9302	84.54	385.22	— 54	— 717
7	0.0227	0.0326	—0.0023	0.0114260	217.16	8133	63.66	501.77	+ 683	+ 8880
8	0.0278	0.0275	0.0045	0.0202348	387.13	6869	40.71	591.18	1383	17476
9	0.0317	0.0217	0.0064	0.0281151	541.45	5158	+16.79	652.92	2017	24797
0	0.0342	0.0155	0.0080	0.0347655	673.88	3530	— 7.06	687.18	2566	30693
1	0.0356	0.0091	0.0093	0.0400465	781.24	1895	30.10	712.06	3016	35137
2	0.0358	+0.0028	0.0102	0.0438362	860.61	+ 338	51.61	682.48	3360	38139
3	0.0350	—0.0033	0.0107	0.0462496	913.71	— 1119	71.17	649.54	3596	39795
4	0.0333	0.0089	0.0110	0.0470134	934.58	2447	88.31	600.46	3728	40232
5	0.0308	0.0141	0.0109	0.0465094	930.23	3622	102.95	538.53	3758	39574
6	0.0276	0.0188	0.0106	0.0447238	899.96	4637	114.97	466.45	3693	37964
7	0.0239	0.0229	0.0100	0.0417581	845.32	5484	124.23	387.96	3538	35518
8	0.0198	0.0263	0.0093	0.0376606	766.89	6163	130.72	302.47	3299	32356
9	0.0152	0.0292	0.0083	0.0325911	667.55	6681	133.92	212.86	2974	28511

Ψ

u	X	Y	Z	dn	tdn	de	$d\omega$	$\frac{ds}{-d\omega(1-\sqrt{1-e^2})}$	dp	dq
250°	+0.0106	−0.0312	−0.0071	−0″.0268164	−552″.45	−0.007012	−135″.16	+ 125″.35	+0.002593	+0.0243
251	0.0057	0.0327	0.0058	0.0201505	417.49	7186	133.02	+ 36.17	2139	196
252	+0.0006	0.0334	0.0045	0.0127782	266.25	7199	128.00	− 51.55	1662	149
253	−0.0044	0.0334	0.0028	−0.0049161	−103.00	7052	123.03	136.22	1060	93
254	0.0095	0.0326	−0.0012	+0.0034026	+ 71.68	6874	109.14	215.77	+ 451	+ 38
255	0.0144	0.0311	+0.0005	0.0119780	253.72	6290	95.39	290.94	− 191	− 16
256	0.0191	0.0288	0.0023	0.0206305	439.37	5682	85.37	357.16	856	70
257	0.0235	0.0258	0.0040	0.0291645	624.39	4219	62.03	415.97	1529	123
258	0.0274	0.0219	0.0057	0.0373991	804.87	4052	37.86	463.35	2196	173
259	0.0307	0.0174	0.0073	0.0449234	971.82	3058	− 14.65	498.85	2771	215
260	0.0331	0.0128	0.0087	0.0510232	1109.42	2149	+ 7.78	518.50	3374	256
261	0.0352	0.0066	0.0102	0.0569906	1245.42	− 920	36.11	528.22	3955	295
262	0.0360	−0.0005	0.0113	0.0609334	1338.21	+ 234	61.99	520.39	4391	321
263	0.0359	+0.0058	0.0121	0.0630802	1392.16	1702	87.03	496.78	4715	338
264	0.0346	0.0122	0.0125	0.0632746	1403.22	2481	110.41	458.12	4907	345
265	0.0323	0.0184	0.0127	0.0613686	1367.47	3801	131.05	405.59	4966	343
266	0.0289	0.0241	0.0124	0.0573244	1283.38	4422	140.70	340.64	4870	330
267	0.0246	0.0292	0.0118	0.0512176	1152.01	5177	160.96	266.46	4624	308
268	0.0194	0.0335	0.0108	0.0432668	977.65	5754	168.88	185.69	4239	277
269	0.0136	0.0368	0.0095	0.0335940	762.52	6127	171.54	100.27	3718	239
270	9.0075	0.0390	0.0079	0.0229579	523.43	6332	169.34	− 17.11	3112	196
271	−0.0017	0.0401	0.0063	+0.0122763	+281.13	6424	161.30	+ 58.14	2473	153
272	+0.0050	0.0401	0.0043	−0.0004753	−109.31	6158	150.45	139.24	1679	102
273	0.0110	0.0390	0.0024	0.0123055	284.24	5829	134.98	206.51	919	55
274	0.0167	0.0369	+0.0004	0.0237785	551.56	5370	116.38	264.76	− 160	− 9
275	0.0217	0.0342	−0.0014	0.0342477	797.72	4821	95.91	311.20	+ 551	+ 31
276	0.0266	0.0307	0.0032	0.0448356	1048.63	4199	73.23	353.87	1220	69
277	0.0298	0.0268	0.0048	0.0521396	1224.39	3479	51.31	373.81	1823	101
278	0.0327	0.0225	0.0062	6.0590945	1393.24	2866	30.04	389.41	2352	129
279	0.0352	0.0186	0.0074	0.0648228	1534.31	2276	+ 9.79	400.18	2801	151
280	0.0364	0.0134	0.0084	0.0688618	1636.22	1546	− 12.51	397.52	3170	168
281	0.0373	0.0089	0.0092	0.0716555	1709.10	930	31.49	385.50	3459	180
282	0.0375	0.0044	0.0099	0.0731297	1350.81	+ 356	48.79	370.50	3673	188
283	0.0371	+0.0001	0.0103	0.0733292	1762.09	− 170	64.23	350.32	3817	192
284	0.0362	−0.0040	0.0106	0.0708418	1708.52	647	77.81	326.58	3895	193
285	0.0349	0.0079	0.0108	0.0705769	1708.24	1073	89.59	299.43	3917	191
286	0.0332	0.0116	0.0108	0.0677746	1646.21	1447	92.87	278.03	3884	186
287	0.0312	0.0149	0.0106	0.0641760	1564.22	1800	107.59	239.60	3804	179
288	0.0289	0.0180	0.0104	0.0599116	1465.28	2040	113.97	206.12	3682	171
289	0.0264	0.0209	0.0100	0.0550674	1351.34	2277	118.72	176.88	3523	161
290	0.0236	0.0234	0.0096	0.0497382	1224.61	2462	121.89	145.75	3331	150
291	0.0208	0.0256	0.0091	0.0439704	1086.13	2607	123.57	115.15	3109	137
292	0.0178	0.0275	0.0084	0.0378946	939.05	2706	123.88	85.66	2866	124
293	0.0146	0.0291	0.0077	9.0313715	779.86	2780	122.70	55.58	2600	111
294	0.0115	0.0304	0.0070	0.0250085	623.60	2818	120.60	30.58	2321	97
295	0.0083	0.0314	0.0062	0.0183237	458.31	2820	117.19	+ 5.30	2024	84
296	0.0051	0.0322	0.0053	0.0115527	289.82	2797	112.72	− 19.77	1719	70
297	+0.0019	0.0326	0.0044	−0.0047473	−119.44	2748	107.30	39.97	1408	56
298	−0.0013	0.0327	0.0035	+0.0020450	+ 51.60	2677	100.97	59.85	1092	43
299	0.0044	0.0326	0.0025	0.0087625	214.21	2586	93.88	77.80	831	30
300	0.0075	0.0321	0.0015	0.0153711	390.08	2475	84.88	93.95	490	17

$\mathfrak{h}$

X	Y	Z	dn	tdn	de	$d\omega$	$\frac{d\varepsilon - d\omega}{\times(1-\sqrt{1-e^2})}$	dp	dq
+0.0005	−0.0009	−0.0005	+0″.000281	+ 0″.00	−0.0000058	− 0″.01	− 0″.00	−0.0000000	−0.0000000
0.0003	0.0009	0.0004	0.000286	0.00	58	0.02	− 0.00	10	4
+0.0000	0.0008	0.0003	0.000263	0.00	56	− 0.00	+ 0.00	16	2
−0.0002	0.0007	−0.0001	0.000206	0.00	48	+ 0.00	0.00	− 18	− 2
0.0005	0.0006	+0.0000	0.000120	0.00	38	0.01	0.00	+ 12	+0.0000000
0.0008	0.0005	0.0002	+0.000005	+ 0.00	24	0.02	0.00	00	00
0.0010	0.0003	0.0003	−0.000135	− 0.00	− 4	0.04	0.00	54	00
0.0013	−0.0001	0.0005	0.000301	0.01	+ 18	0.06	+ 0.00	106	00
0.0015	+0.0001	0.0006	0.000492	0.02	48	0.09	− 0.00	152	+0.0000000
0.0017	0.0003	0.0008	0.000697	0.04	86	0.12	0.01	290	− 2
0.0020	0.0005	0.0009	0.000917	0.06	130	0.16	0.02	432	8
0.0022	0.0008	0.0010	0.001159	0.09	182	0.20	0.05	618	18
0.0024	0.0011	0.0012	0.001422	0.13	248	0.24	0.07	856	34
0.0026	0.0013	0.0014	0.001664	0.18	312	0.29	0.11	1142	56
0.0028	0.0016	0.0015	0.001926	0.24	434	0.33	0.16	1492	86
0.0029	0.0019	0.0016	0.002189	0.31	482	0.36	0.23	1908	126
0.0031	0.0022	0.0018	0.002453	0.40	584	0.39	0.31	1088	178
0.0032	0.0025	0.0019	0.002548	0.50	700	0.40	0.41	2960	244
0.0033	0.0028	0.0020	0.002963	0 62	830	0.40	0.53	3600	326
0.0034	0.0031	0.0021	0.003204	0.76	974	0.38	0.68	4320	426
0.0035	0.0034	0.0022	0.003430	0.91	1134	0.34	0.86	5120	546
0.0035	0.0037	0.0022	0.003640	1.08	1312	0.27	1.06	5998	686
0.0036	0.0040	0.0023	0.003829	1.27	1508	0.17	1.28	6954	850
0.0036	0.0044	0.0024	0.003994	1.48	1724	+ 0.02	1.54	7984	1038
0.0036	0.0047	0.0024	0.004130	1.69	1962	− 0.15	1.82	9080	1252
0.0035	0.0050	0.0025	0.004235	1.92	2276	0.38	2.13	10238	1492
0.0035	0.0054	0.0025	0.004305	2.14	2506	0.66	2.47	11444	1758
0.0034	0.0057	0.0025	0.004336	2.37	2812	1.01	2.82	12692	2050
0.0032	0.0060	0.0025	0.004319	2.59	3142	1.41	3.19	13960	2376
0.0031	0.0064	0.0026	0.004260	2.79	3516	1.89	3.57	15242	2706
0.0028	0.0066	0.0025	0.004069	2.90	3870	2.43	3.89	16506	3066
0.0026	0.0070	0.0025	0.003909	3.03	4294	3.06	4.25	17654	3424
0.0023	0.0073	0.0025	0.003686	3.10	4750	3.76	4.59	18834	3812
0.0020	0.0076	0.0025	0.003390	3.10	5234	4.56	4.88	19926	4200
0.0016	0.0079	0.0024	0.003008	2.96	5750	5.46	5.08	20828	4570
0.0013	0.0082	0.0023	0.002607	2.77	6284	6.41	5.24	21892	4948
0.0008	0.0085	0.0023	0.002098	2.40	6846	7.46	5.26	22302	5284
−0.0004	0.0088	0.0022	0.001510	1.85	7426	8.60	5.13	42660	5574
+0.0002	0.0090	0.0020	0.000833	1.05	7808	9.80	4.82	22724	5798
0.0008	0.0092	0.0019	−0.000080	− 0.11	8620	11.09	4.28	22460	5940
0.0014	0.0094	0.0018	+0.000754	+ 1.13	9214	12.42	3.48	21826	5982
0.0021	0.0095	0.0016	0.001690	2.71	9790	13.79	2.35	20714	5878
0.0029	0.0096	0.0014	0.002705	4.62	10336	15.19	− 0.82	19126	5618
0.0037	0.0096	0.0012	0.003791	6 89	10934	16.57	+ 1.09	17040	5178
0.0045	0.0095	0.0009	0.004955	9.56	11264	17.92	3.49	14384	4520
0.0054	0.0094	0.0007	0.006188	12.66	11598	19.20	6.42	11136	3618
0.0063	0.0091	0.0004	0.007471	16.19	11820	20.38	9.92	7320	2460
0.0073	0.0088	+0.0002	0.008801	20.18	11892	21.41	14.05	2912	− 1010
0.0083	0.0083	−0.0001	0.010155	24.60	11798	22.27	18.82	2028	+ 726
0.0093	0.0078	0.0004	0.011517	29.45	11506	24.89	24.26	7456	276

$\mathfrak{h}$

u	X	Y	Z	dn	tdn	de	$d\omega$	$\frac{de-d\omega}{\times(1-\sqrt{1-e^2})}$	dp	dq
°										
100	+0.0103	+0.0071	−0.0008	+0″.012869	+34″.85	+0.0003336	−23″.26	+ 30″.53	−0.0001546	+0.0005
102	0.0111	0.0065	0.0010	0.013957	39.60	3298	23.21	36.29	1844	7
104	0.0123	0.0055	0.0013	0.015419	46.02	2792	23.43	44.50	2550	10
106	0.0133	0.0045	0.0016	0.016645	52.19	2640	22.48	52.73	3196	13
108	0.0141	0.0035	0.0018	0.017618	57.98	2286	21.72	60.48	3756	16
110	0.0148	0.0025	0.0020	0.018420	63.55	1804	20.57	68.79	4278	19
112	0.0154	0.0014	0.0022	0.019030	68.77	1262	19.17	76.85	4852	22
114	0.0159	+0.0004	0.0024	0.019362	73.22	+ 650	17.47	84.35	5352	25
116	0.0160	−0.0007	0.0026	0.019358	76.54	− 6	15.50	90.79	5828	28
118	0.0159	0.0016	0.0028	0.019116	78.95	678	13.41	95.81	6280	32
120	0.0155	0.0026	0.0029	0.018216	78.52	1508	10.62	98.90	6730	35
122	0.0149	0.0035	0.0031	0.017102	76.87	2378	7.63	100.12	7122	39
124	0.0140	0.0045	0.0032	0.015689	73.47	3340	4.31	99.41	7440	42
126	0.0129	0.0055	0.0032	0.014052	68.51	4388	− 0.75	96.66	7642	44
128	0.0116	0.0064	0.0032	0.012263	62.19	5504	+ 2.95	92.65	7704	46
130	0.0103	0.0073	0.0032	0.010378	54.71	6648	6.62	86.91	7596	47
132	0.0089	0.0081	0.0031	0.008468	46.37	7782	10.12	79.79	7330	47
134	0.0074	0.0088	0.0029	0.006575	37.36	8862	13.37	71.47	6904	46
136	0.0060	0.0093	0.0027	0.004722	27.83	9866	16.29	61.97	6340	44
138	0.0045	0.0097	0.0024	0.002948	18.01	10738	18.76	51.42	5656	41
140	0.0030	0.0102	0.0021	+0.001139	+ 7.21	11678	21.33	39.58	4878	37
142	0.0017	0.0101	0.0017	−0.000282	− 1.85	12048	22.40	27.78	4022	31
144	+0.0003	0.0100	0.0013	0.001692	11.47	12434	22.50	15.04	3126	25
146	−0.0009	0.0099	0.0010	0.002915	20.41	12638	24.13	+ 2.29	2234	19
148	0.0022	0.0095	0.0006	0.004058	29.36	12612	24.36	− 11.70	1268	11
150	0.0034	0.0090	−0.0002	0.004990	37.28	12386	24.15	26.86	− 352	+ 33
152	0.0044	0.0084	+0.0002	0.005744	44.28	11934	23.54	38.61	+ 530	− 52
154	0.0054	0.0077	0.0006	0.006321	50.30	11262	22.58	51.69	1366	14
156	0.0063	0.0069	0.0010	0.006721	55.06	10356	21.30	64.33	2146	23
158	0.0071	0.0059	0.0014	0.006941	58.58	9274	19.74	76.20	2848	32
160	0.0078	0.0049	0.0018	0.006984	60.67	7878	17.91	87.10	3464	41
162	0.0084	0.0038	0.0021	0.006855	61.28	6304	15.93	96.84	3986	50
164	0.0088	0.0026	0.0024	0.006558	60.29	4518	13.77	105.10	4404	58
166	0.0091	−0.0013	0.0027	0.006102	57.66	2502	10.63	111.77	4720	67
168	0.0092	+0.0001	0.0030	0.005492	53.31	− 308	9.11	116.01	4902	74
170	0.0091	0.0015	0.0032	0.004744	47.28	+ 1996	6.75	118.27	4970	80
172	0.0084	0.0029	0.0033	0.003886	39.69	4438	4.41	117.75	4906	85
174	0.0084	0.0043	0.0034	0.002900	30.44	7034	+ 2.07	114.18	4744	89
176	0.0077	0.0058	0.0034	0.001889	20.33	9632	− 0.13	107.19	4454	90
178	0.0068	0.0071	0.0034	−0.000756	− 8.34	12188	2.18	96.36	4054	90
180	0.0057	0.0084	0.0032	+0.000344	+ 3.89	14634	4.04	82.29	3562	87
182	0.0043	0.0096	0.0030	0.001402	16.21	16850	5.71	64.09	2352	81
184	0.0027	0.0105	0.0027	0.002373	28.09	18720	7.10	42.13	2388	73
186	−0.0009	0.0112	0.0022	0.003197	38.71	20138	8.24	− 16.99	1766	62
188	+0.0011	0.0115	0.0017	0.003600	44.58	20980	9.12	+ 10.95	1170	48
190	0.0031	0.0115	0.0011	0.004202	53.19	21136	9.73	40.76	638	31
192	0.0052	0.0112	+0.0005	0.004301	55.62	20552	10.21	71.06	+ 212	− 13
194	0.0072	0.0104	−0.0002	0.004101	54.16	19180	10.54	100.80	− 78	+ 65
196	0.0090	0.0092	0.0009	0.003604	48.60	17058	9.02	128.09	212	26
198	0.0086	0.0061	0.0010	0.002251	30.97	11246	8.96	123.80	114	28

h

u	X	Y	Z	dn	tdn	de	dω	$\frac{d\varepsilon - d\omega}{\times(1-\sqrt{1-e^2})}$	dp	dq
°										
00	+0.0118	+0.0059	−0.0022	+0″.001862	+ 26.14	+0.0010950	−11″.28	+ 170″.60	+0.0000000	+0.0063244
02	0.0126	0.0039	0.0027	+0.000745	+ 10.66	7224	11.62	182.23	314	78210
04	0.0130	+0.0019	0.0031	−0.000432	− 6.31	+ 3360	12.03	187.59	726	90050
06	0.0129	−0.0002	0.0035	0.002115	31.43	− 488	12.50	186.10	1192	98426
08	0.0125	0.0022	0.0036	0.002638	39.93	3756	13.02	178.09	1666	103202
10	0.0116	0.0040	0.0037	0.003524	54.32	7526	13.56	164.58	2110	104442
12	0.0105	0.0056	0.0037	0.004246	66.61	10472	14.09	146.59	2486	102412
14	0.0091	0.0070	0.0035	0.004653	74.27	12928	14.56	125.48	2764	97472
16	0.0076	0.0082	0.0033	0.004859	79.88	14852	14.94	102.40	2922	90074
18	0.0060	0.0090	0.0029	0.004829	79.70	16236	15.19	78.47	2950	80732
20	0.0044	0.0096	0.0026	0.004576	76.76	17106	15.25	54.44	2844	69916
22	0.0027	0.0099	0.0022	0.004124	70.28	17476	15.09	31.08	2606	58070
24	+0.0014	0.0100	0.0018	0.003631	62.86	18052	15.07	+ 11.95	2352	48082
26	−0.0003	0.0100	0.0013	0.002733	48.04	16974	13.98	− 11.32	1776	33142
28	0.0017	0.0097	0.0008	0.001851	33.03	16192	13.14	29.84	1208	21038
30	0.0030	0.0092	−0.0003	−0.000882	− 15.97	15126	11.94	46.29	+ 572	+ 9288
32	0.0042	0.0086	+0.0001	+0.000803	+ 14.75	13826	10.46	60.52	− 152	− 2322
34	0.0053	0.0079	0.0005	0.001209	22.52	12358	8.76	72.65	914	12996
36	0.0062	0.0070	0.0009	0.002285	43.14	10734	6.78	82.56	1710	22890
38	0.0070	0.0061	0.0013	0.003344	63.98	9212	4.59	90.25	2518	31828
40	0.0077	0.0051	0.0017	0.004368	84.28	7218	− 2.19	95.81	3326	39806
42	0.0083	0.0040	0.0020	0.005335	104.75	5382	+ 0.40	99.30	4120	46776
44	0.0087	0.0028	0.0024	0.006210	123.74	3538	3.12	100.77	4880	52672
46	0.0089	0.0016	0.0026	0.007017	141.21	− 1688	5.98	100.30	5592	57506
48	0.0.91	−0.0003	0.0029	0.007686	156.52	+ 76	8.83	98.01	6238	61190
50	0.0091	+0.0009	0.0031	0.008205	169.03	1256	11.73	93.96	6802	63768
52	0.0089	0.0022	0.0032	0.008567	178.50	3432	14.59	88.24	6270	65224
54	0.0085	0.0035	0.0033	0.008744	184.22	5082	17.42	81.28	7634	65624
56	0.0081	0.0047	0.0034	0.008727	185.88	6320	20.05	72.55	7858	64788
58	0.0075	0.0059	0.0034	0.008505	183.05	7504	22.19	62.91	7958	63002
60	0.0067	0.0070	0.0033	0.008040	170.85	8594	24.23	52.09	7906	60166
62	0.0057	0.0081	0.0032	0.007352	161.48	9452	25.87	40.61	7706	56420
64	0.0046	0.0090	0.0031	0.006428	142.55	10060	27.07	28.58	7354	51834
66	0.0034	0.0098	0.0029	0.005262	117.80	10556	27.22	16.13	6854	46544
68	0.0021	0.0105	0.0026	0.003901	88.14	10790	27.93	− 3.95	6212	40668
70	−0.0007	0.0110	0.0023	0.002326	53.04	10810	27.52	+ 8.13	5444	34384
72	+0.0009	0.0113	0.0019	+0.000558	+ 12.83	10614	26.49	19.80	4556	27778
74	0.0024	0.0114	0.0015	−0.001342	− 31.14	10262	24.95	30.71	3610	21252
76	0.0040	0.0114	0.0011	0.003378	79.01	9726	22.82	40.78	2598	14776
78	0.0057	0.0111	0.0007	0.005568	129.86	9050	20.25	49.86	1568	8622
80	0.0074	0.0107	+0.0002	0.007725	183.56	8264	17.09	59.49	− 556	− 2954
82	0.0091	0.0101	−0.0002	0.010041	240.42	7390	13.51	65.22	+ 446	+ 2300
84	0.0107	0.0094	0.0006	0.011915	287.38	6504	9.90	70.69	1256	6250
86	0.0123	0.0086	0.0009	0.014449	350.96	5622	6.15	75.46	1958	9420
88	0.0140	0.0077	0.0012	0.016727	409.13	4750	+ 2.25	78.86	2496	11620
90	0.0156	0.0069	0.0013	0.018937	466.25	4018	− 1.41	82.61	2800	12618
92	0.0172	0.0062	0.0014	0.021064	521.98	3246	4.52	84.85	2862	12486
94	0.0186	0.0056	0.0013	0.023001	573.56	2884	8.22	86.11	2688	11346
96	0.0198	0.0053	0.0012	0.024622	617.71	2648	9.36	82.28	2214	9460
98	0.0211	0.0052	0.0009	0.026282	663.20	2526	10.77	85.83	1734	6858
00	0.0210	0.0051	0.0007	0.026299	667.37	2428	10.95	80.89	1462	5220

u	X	Y	Z	dn	tdn	de	$d\omega$	$\frac{d\varepsilon - d\omega}{\times(1-\sqrt{1-e^2})}$	dp	dq
0	−0.00001	−0.00046	−0.000032	+0″.0000000	+0″.00	−0.0000007	+0″.00	+ 0″.00	−0.0000000	−0.0000000
5	0.00007	−0.00004	+0.000000	+0.0000034	+0.00	−0.0000000	0.00	0.00	+0.0000000	+0.0000000
10	0.00012	+0.00003	0.000036	−0.0000151	−0.00	+ 1	0.00	+ 0.00	0	0
15	0.00016	0.00011	0.000074	0.0000390	0.00	4	0.00	− 0.00	1	+0.0000000
20	0.00020	0.00019	0.000112	0.0000667	0.00	5	0.01	0.00	2	−0.0000000
25	0.00023	0.00029	0.000151	0.0000963	0.01	9	0.01	0.01	5	2
30	0.00026	0.00040	0.000188	0.0001265	0.02	12	0.01	0.02	12	7
35	0.00028	0.00050	0.000223	0.0001555	0.03	16	+0.00	0.03	18	16
40	0.00029	0.00061	0.000255	0.0001818	0.05	20	−0.01	0.05	30	32
45	0.00030	0.00072	0.000284	0.0002040	0.07	26	0.04	0.09	44	56
50	0.00029	0.00083	0.000309	0.0002196	0.10	34	0.09	0.13	63	97
55	0.00029	0.00094	0.000330	0.0002295	0.13	44	0.15	0.18	85	141
60	0.00027	0.00105	0.000346	0.0002287	0.16	58	0.23	0.25	110	204
65	0.00024	0.00115	0.000357	0.0002175	0.19	76	0.34	0.32	137	284
70	0.00020	0.00125	0.000363	0.0001942	0.21	100	0.47	0.39	165	377
75	0.00011	0.00131	0.000358	0.0001414	0.18	125	0.63	0.43	190	476
80	−0.00007	0.00143	0.000359	0.0001069	0.16	165	0.81	0.49	218	598
85	+0.00002	0.00151	0.000348	−0.0000413	−0.07	210	1.03	0.56	239	714
90	0.00013	0.00158	0.000332	+0.0000393	+0.08	262	1.25	0.45	253	824
95	0.00025	0.00164	0.000341	0.0001351	0.32	323	1.49	0.32	286	1011
100	0.00040	0.00170	0.000281	0.0002447	0.66	390	1.74	− 0.07	256	980
105	0.00057	0.00173	0.000246	0.0003667	1.12	463	1.98	+ 0.31	240	995
110	0.00075	0.00174	0.000205	0.0004985	1.72	539	2.20	0.87	213	956
115	0.00098	0..0172	0.000159	0.0006431	2.49	609	2.40	1.68	173	843
120	0.00120	0.00169	0.000108	0.0007819	3.37	683	2.57	2.67	121	644
125	0.00147	0.00163	+0.000053	0.0009253	4.42	733	2.69	3.99	+ 61	− 351
130	0.00175	0.00152	−0.000005	0.0010640	5.61	778	2.75	6.36	− 5	+ 33
135	0.00207	0.00137	0.000061	0.0011925	7.81	763	2.74	7.67	72	490
140	0.00243	0.00117	0.000113	0.0013073	8.27	735	2.67	10.12	181	991
145	0.00282	0.00091	0.000153	0.0014052	9.68	645	2.04	13.02	173	1454
150	0.00326	0.00061	0.000174	0.0014493	11.06	493	2.46	16.45	189	1768
155	0.00377	+0.00027	0.000163	0.0015302	12.35	297	2.22	20.47	167	1757
160	0.00434	−0.00007	0.000110	0.0015517	13.48	+ 69	2.12	25.07	105	1251
165	0.00494	0.00033	−0.000016	0.0015357	14.31	− 129	2.17	30.04	− 13	+ 185
170	0.00548	0.00044	+0.000088	0.0014630	14.58	228	2.35	34.75	+ 68	− 1098
175	0.00579	0.00036	0.000138	0.0013046	13.86	184	2.56	37.93	115	1784
180	0.00573	0.00023	+0.000071	0.0010499	11.86	98	2.62	38.53	+ 39	− 946
185	0.00532	0000022	−0.000100	0.0007280	8.72	124	2.52	36.57	− 41	+ 1355
190	0.00472	0.00042	0.000303	0.0003879	4.91	334	2.10	33.00	84	4177
195	0.00410	0.00077	0.000467	+0.0000781	+1.04	678	1.86	29.39	− 65	6479
200	0.00342	0.00119	0.000565	−0.0001837	−2.58	1079	1.60	28.15	+ 00	7900
205	0.00292	0.00159	0.000612	0.0003851	5.57	1448	1.60	20.42	86	8501
210	0.00237	0.00194	0.000604	0.0005233	8.06	1758	1.68	16.25	168	8301
215	0.00184	0.00222	0.000555	0.0005966	9.50	1980	1.82	12.17	229	7680
220	0.00093	0.00241	0.000479	0.0005316	8.92	2099	1.80	5.60	259	6354
225	0.00085	0.00252	0.000384	0.0005600	9.77	2130	2.13	4.74	253	4943
230	+0.00039	0.00257	0.000277	0.0004632	8.39	2090	2.23	+ 1.49	213	3449
235	−0.00025	0.00254	0.000165	0.0003270	6.13	1974	2.26	− 1.26	144	1977
240	0.00040	0.00245	−0.000054	−0.0001474	−2.86	1805	2.21	2.80	+ 51	+ 613
245	0.00073	0.00231	+0.000054	+0.0000196	+0.39	1603	2.07	5.21	− 56	− 585
250	0.00102	0.00213	0.000155	0.0002066	4.25	1379	1.85	6.39	168	1575
255	0.00126	0.00194	0.000248	0.0003912	8.28	1159	1.58	7.15	280	2345
260	0.00145	0.00172	0.000329	0.0006588	14.32	943	1.22	7.37	381	2894
265	0.00160	0.00149	0.000401	0.0007164	15.96	743	0.93	7.44	470	3239
270	0.00171	0.00126	0.000462	0.0009265	21.12	564	0.59	7.14	540	3401
275	0.00179	0.00103	0.000513	0.0009514	22.16	410	−0.26	6.63	592	3413
280	0.00184	0.00081	0.000555	0.0010310	24.50	284	+0.04	6.07	625	3310
285	0.00185	0.00060	0.000584	0.0010772	26.07	182	0.30	5.28	635	3095
290	0.00184	0.00040	0.000608	0.0011081	27.22	106	0.51	4.56	630	2831
295	0.00179	0.00021	0.000620	0.0010942	27.36	63	0.62	3.72	606	2511
300	0.00174	0.00004	0.000626	0.0010667	27.07	10	0.79	3.09	571	2180

oordonnées de la Comète et des Planètes perturbatrices rapportées au plan et au grand axe de l'orbite de la Comète. Temps écoulés depuis le passage au périhélie de 1759. Distances des Planètes à la Comète.

De 300 à 325 degrés d'anomalie excentrique.

u	*x*	*y*	*t*
°			
01	— 17.27	— 4.55	25367/9
02	16.98	4.55	25436.2
03	16.73	4.55	25503.5
04	16.41	4.54	25569.8
05	16.13	4.54	25634.9
06	15.84	4.53	25699.1
07	15.56	4.53	25762.1
08	15.28	4.52	25824.1
09	14.99	4.51	25885.0
10	14.71	4.49	25944.9
11	14.43	4.48	26003.8
12	14.15	4.47	26061.6
13	13.87	4.45	26118.4
14	13.59	4.44	26174.0
15	13.32	4.43	26228.7
16	13.04	4.41	26282.4
17	12.76	4.39	26335.0
18	12.49	4.37	26386.6
19	12.22	4.35	26535.1
20	11.95	4.33	26486.6
21	11.68	4.31	26437.1
22	11.41	4.28	26582.7
23	11.14	4.26	26629.2
24	10.87	4.23	26674.7
25	10.61	4.21	26719.3

♃

u	*x'*	*y'*	*z'*	ϱ
°				
301	+ 1.17	+ 5.27	+ 0.34	20.88
302	1.81	5.06	+ 0.12	21.09
303	2.23	4.87	— 0.03	21.17
304	2.62	4.65	0.19	21.14
305	2.99	4.38	0.33	21.13
306	3.34	4.09	0.48	21.03
307	3.65	3.77	0.62	20.93
308	3.92	3.42	0.75	20.79
309	4.16	3.06	0.87	20.61
310	4.37	2.68	0.98	20.41
311	4.54	2.28	1.09	20.17
312	4.67	1.88	1.19	19.90
313	4.77	1.47	1.27	19.61
314	4.84	1.05	1.35	19.27
315	4.87	0.64	1.41	18.93
316	4.87	+ 0.24	1.47	18.56
317	4.84	— 0.17	1.51	18.17
318	4.79	0.56	1.55	17.76
319	4.70	0.94	1.57	17.33
320	4.59	1.32	1.59	16.88
321	4.46	1.66	1.59	16.43
322	4.30	2.00	1.58	15.96
323	4.13	2.33	1.57	15.47
324	3.94	2.62	1.56	14.99
325	3.73	2.90	1.53	14.48

♄

u	*x'*	*y'*	*z'*	ϱ
°				
02	— 8.62	— 1.10	+ 2.47	9.38
04	8.67	— 0.26	2.62	9.23
06	8.65	+ 0.48	2.73	9.18
08	8.58	1.20	2.82	9.24
10	8.46	1.88	2.89	9.39
12	8.30	2.53	2.94	9.59
14	8.09	3.17	2.98	9.85
16	7.88	3.73	3.00	10.09
18	7.63	4.27	3.01	10.36
20	7.36	4.78	3.01	10.63
22	7.08	5.24	2.99	10.88
24	6.79	5.67	2.97	11.12

♅

u	*x'*	*y'*	*z'*	ϱ
305°	+ 18.93	+ 0.56	— 5.76	35.89
310	18.93	— 0.62	5.90	34.37
315	18.86	1.69	6.01	32.85
320	18.76	2.63	6.09	31.35
325	18.61	3.52	6.15	29.87

Elémens employés de 300° à 325° d'anomalie excentrique.

n.... 141,″8670	*ω*.... 338°,03
a.... 18,1290	Ω.... 60,96
e.... 0,9679567	*i*.... 19,50

Forces perturbatrices et variations différentielles qui déterminent les altérations des élémens de l'orbite de la Comète et de l'anomalie.

De 300 à 325 degrés d'anomalie excentrique.

♃

u	X	Y	Z	dn	tdn	de	$d\omega$	$\frac{de-d\omega}{\times(1-\sqrt{1-e^2})}$	dp	dq
°										
301	−0.0054	−0.0324	−0.0022	+0″011312 4	+286″97	− 0.002421	−89″23	− 80″14	+ 0.000651	+ 0.002527
302	0.0096	0.0316	−0.0008	0.0201884	513.52	2289	78.47	100.55	231	865
303	0.0125	0.0308	+0.0002	0.0263020	670.79	2173	70.65	112.68	− 61	− 225
304	0.0152	0.0295	0.0012	0.0321331	821.60	2028	61.18	122.14	345	1246
305	0.0179	0.0288	0.0022	0.0376828	965.99	1882	51.92	130.14	618	2197
306	0.0204	0.0265	0.0032	0.0428711	1101.70	1724	42.46	135.97	877	3067
307	0.0227	0.0247	0.0041	0.0476585	1227.85	1571	32 89	140.64	1124	3866
308	0.0248	0.0227	0.0051	0.0520313	1343.74	1410	23.21	143.43	1354	4582
309	0.0268	0.0204	0.0060	0.0559052	1447.10	1234	13.72	144.39	1564	5202
310	0.0285	0.0180	0.0068	0.0593095	1538.86	1087	− 4.32	143.97	1756	5746
311	0.0301	0.0155	0.0076	0.0622115	1617.77	929	+ 4.84	142.17	1926	6198
312	0.0314	0.0127	0.0084	0.0644701	1680.23	754	13.55	138.88	2076	6570
313	0.0324	0 0099	0.0091	0.0661972	1729.05	620	21.34	134.46	2153	6857
314	0.0332	0.0070	0.0098	0.0672861	1761.14	484	30.28	131.88	2362	7226
315	0.0338	0.0040	0.0103	0.0678779	1780.38	337	36.46	122.58	2391	7191
316	0.0341	−0.0010	0.0109	0.0678366	1782.91	206	43.71	115.38	2451	7248
317	0.0341	+0.0020	0.0113	0.0672018	1769.73	− 83	49.71	107.53	2489	7236
318	0.0338	0.0050	0.0116	0.0660050	1741.75	+ 31	55.01	99.14	2506	7161
319	0.0334	0.0080	0.0119	0.0642465	1698.54	136	59.58	90.39	2504	7014
320	0.0326	0.0110	0.0121	0.0619156	1639.91	235	63.49	81.22	2481	6846
321	0.0317	0.0137	0.0122	0.0591942	1570.72	319	66.46	71.99	2441	6618
322	0.0304	0.0165	0.0123	0.0559224	1486.57	399	68.82	62.97	2385	6353
323	0.0290	0.0192	0.0123	0.0522136	1390.43	466	70.39	52.02	2315	6055
324	0.0274	0.0216	0.0121	0.0475243	1267.70	526	70.20	45.34	2201	5733
325	0.0256	0.0240	0.0119	0.0437708	1169.52	575	71.35	36.36	2133	5383

♄

302	+0.0218	+0.0057	−0.0004	−0″027303	−695″66	+0.0002586	−10″58	− 79″34	+0.0000654	+0.0002446
304	0.0215	0.0058	0.0002	0.0270011	690.42	2566	10.08	73.62	336	1218
306	0.0208	0.0058	0.0001	0.0261355	671.66	2490	9.38	66.76	206	720
308	0.0198	0.0056	0.0002	0.0248515	641.74	2344	8.82	59.64	270	916
310	0.0187	0.0052	0.0003	0.0233209	605.66	2116	8.40	52.22	474	1550
312	0.0174	0.0047	0.0005	0.0216960	565.42	1808	8.18	45.20	740	2344
314	0.0162	0.0039	0.0007	0.0200336	524.36	1580	8.32	39.54	1064	3256
316	0.0151	0.0032	0.0009	0.0185239	486.84	1288	8.16	33.00	1254	3714
318	0.0140	0.0024	0.0011	0.0170518	449.94	1040	8.22	27.94	1446	4133
320	0.0130	0.0016	0.0013	0.0003158	415.06	822	8.22	23.52	1580	4358
322	0.0122	0.0009	0.0014	0.0143999	382.78	648	8.16	19.76	1650	4396
324	0.0113	0.0002	0.0015	0.0130244	347.42	494	7.92	16.48	1652	4306

♅

305	−0.0017	+0.0000	+0.0006	+0″0010284	+ 26″36	−0.0000000	−0.799	− 2″520	−0.0000522	−0.0001854
310	0.0016	0.0002	0.0006	0.0009674	25.09	15	0.825	1.951	469	1536
315	0.0015	0.0003	0.0006	0.0008823	23.14	21	0.803	1.460	412	1239
320	0.0014	0.0004	0.0006	0.0007896	20.92	21	0.760	1.054	352	976
325	0.0013	0.0005	0.0005	0.0006856	18.32	18	0.686	0.724	292	737

Coordonnées de la Comète et des Planètes perturbatrices rapportées au plan et au grand axe de l'orbite de la Comète. Temps écoulés depuis le passage au périhélie de 1759. Distances des Planètes à la Comète.

De 326 à 350 degrés d'anomalie excentrique.

u	x	y	t
26°	− 10.29	− 4.18	26790/8
27	10.03	4.15	26833.3
28	9.78	4.12	26875.0
29	9.52	4.09	26915.8
30	9.27	4.05	26955.5
31	9.02	4.02	26994.3
32	8.77	3.99	27032.1
33	8.52	3.95	27069.0
34	8.28	3.92	27105.1
35	8.03	3.88	27140.1
36	7.79	3.84	27174.2
37	7.55	3.80	27207.5
38	7.32	3.76	27239.9
39	7.09	3.72	27271.4
40	6.85	3.68	27302.0
41	6.63	3.64	27331.8
42	6.41	3.60	27360.8
43	6.18	3.55	27388.8
44	5.96	3.51	27416.0
45	5.74	3.46	27442.5
46	5.53	3.41	27468.1
47	5.32	3.37	27492.9
48	5.11	3.32	27517.0
49	4.90	3.27	27540.2
50	4.70	3.22	27562.8

♅

u	x'	y'	z'	ϱ
326	+ 3.38	− 3.32	− 1.49	13.88
327	3.16	3.55	1.45	13.29
328	2.90	3.76	1.40	12.76
329	2.66	3.96	1.35	12.25
330	2.40	4.13	1.29	11.74
331	2.10	4.30	1.23	11.19
332	1.90	4.41	1.18	10.74
333	1.65	4.53	1.12	10.24
334	1.33	4.65	1.04	9.69
335	1.09	4.73	0.97	9.22
336	0.85	4.79	0.91	8.74
337	0.61	4.84	0.84	8.27
338	0.37	4.88	0.77	7.80
339	+ 0.12	4.91	0.69	7.33
340	− 0.13	4.92	0.62	6.87
341	0.33	4.92	0.56	6.45
342	0.54	4.92	0.49	6.02
343	0.76	4.90	0.42	5.60
344	0.96	4.88	0.36	5.20
345	1.15	4.84	0.29	4.80
346	1.34	4.80	0.23	4.42
347	1.52	4.76	0.17	4.05
348	1.69	4.71	0.11	3.69
349	1.84	4.66	− 0.06	3.37
350	2.01	4.60	+ 0.00	3.03

♄

	x'	y'	z'	ϱ
36°	− 6.40	+ 6.17	+ 2.95	11.47
38	6.10	6.52	2.91	11.63
30	5.79	6.85	2.87	11.80
32	5.48	7.15	2.82	11.95
34	5.18	7.42	2.77	12.07
36	5.89	7.66	2.72	12.17
38	4.60	7.88	2.66	12.25
30	4.32	8.08	2.61	12.31
32	4.05	8.25	2.55	12.35
34	3.80	8.41	2.49	12.37
36	3.55	8.55	2.44	12.37
38	3.32	8.68	2.39	12.36
30	3.10	8.79	2.34	12.34

♆

u	x'	y'	z'	ϱ
330°	+ 18.43	− 4.35	− 6.23	28.39
335	18.26	5.07	6.27	27.05
340	18.10	5.62	6.28	25.81
345	17.95	6.13	6.30	24.66
350	17.80	6.56	6.30	23.61

Élémens employés de 326° à 350° d'anomalie excentrique.

n....	142″,9009	ω....	338°,15
a....	18,0421	Ω....	61,06
e....	0,9676742	i....	19,61

Forces perturbatrices et variations différentielles qui déterminent les altérations des élémens de l'orbite de la Comète et de l'anomalie moyenne.

De 326 à 350 degrés d'anomalie excentrique.

♇

u	X	Y	Z	dn	tdn	de	$d\omega$	$\frac{d\varepsilon - d\omega}{\times(1-\sqrt{1-e^2})}$	dp	dq
°										
326	−0.0225	+0.0275	+0.0116	+0″0367042	+ 983″34	+0.000669	+71″84	− 24″98	− 0.002018	− 0.005092
327	0.0203	0.0294	0.0113	0.0315951	847.80	693	69.80	16.56	1882	4554
328	0.0178	0.0311	0.0109	0.0261128	701.78	720	67.76	9.08	1756	4170
329	0.0152	0.0327	0.0104	0.0206047	554.59	741	65.36	− 2.25	1630	3799
330	0.0126	0.0341	0.0099	0.0149665	403.43	757	62.47	+ 4.06	1502	3434
331	0.0094	0.0354	0.0093	0.0085789	230.77	775	59.06	10.53	1363	3056
332	0.0071	0.0361	0.0088	+0.0037571	+ 101.56	772	55.68	14.73	1251	2751
333	0.0042	0.0369	0.0082	−0.0020575	− 55.69	777	51.77	19.39	1126	2427
334	−0.0005	0.0376	0.0074	0.0090245	244.61	786	47.15	24.48	985	2081
335	+0.0026	0.0380	0.0068	0.0148041	401.78	784	42.74	28.04	870	1801
336	0.0059	0.0381	0.0061	0.0207268	563.23	782	38.07	31.20	756	1534
337	0.0094	0.0380	0.0054	0.0268577	730.73	780	33.14	34.07	646	1283
338	0.0132	0.0378	0.0047	0.0332758	906.43	779	27.92	36.68	538	1047
339	0.0173	0.0373	0.0039	0.0400225	1091.52	779	22.36	39.05	434	825
340	0.0218	0.0364	0.0032	0.0471700	1287.81	781	16.43	41.21	335	625
341	0.0261	0.0354	0.0024	0.0537360	1468.72	781	10.76	42.63	253	460
342	0.0312	0.0340	0.0017	0.0612774	1676.60	786	+ 4.39	44.17	171	304
343	0.0370	0.0321	0.0010	0.0694002	1900.82	794	− 2.45	45.56	96	168
344	0.0433	0.0297	+0.0003	0.0781406	2142.34	805	9.81	46.79	− 31	− 54
345	0.0507	0.0266	−0.0003	0.0878633	2411.22	820	17.98	47.98	+ 24	+ 40
346	0.0593	0 0225	0.0008	0.0986990	2711.11	840	27.10	49.07	67	109
347	0.0693	0.0170	0.0012	0.1109038	3049.00	864	37.55	50.07	93	148
348	0.0813	0.0099	0.0013	0.1249167	3437.31	894	49.57	51.02	97	150
349	0.0949	+0.0006	−0.0010	0.1397483	3848.70	923	62.98	51.45	+ 74	+ 111
350	0.1131	−0.0133	+0.0001	0.1589580	4381.34	965	80.85	52.07	− 8	− 11

♄

326	+0.0104	−0.0007	−0.0016	−0″0118791	− 318″24	+0.000328	−8″04	+13″50	+0.0001726	+0.0004300
328	0.0097	0.0011	0.0017	0.0108067	290.44	254	7.62	10.90	1640	3894
330	0.0090	0.0016	0.0017	0.0098399	265.24	190	7.30	8.92	1564	3576
332	0.0084	0.0019	0.0017	0.0089352	241.54	144	6.90	7.24	1472	3236
334	0.0079	0.0023	0.0017	0.0080864	219.18	110	6.48	5.94	1368	2892
336	0.0073	0.0026	0.0017	0.0072941	198.20	86	6.24	4.66	1262	2562
338	0.0068	0.0028	0.0017	0.0065495	178.40	70	5.58	3.68	1154	2246
340	0.0064	0.0030	0.0016	0.0058587	159.94	60	5.12	2.86	1046	1948
342	0.0059	0.0032	0.0016	0.0052119	142.60	52	4.66	2.20	940	1676
344	0.0055	0.0033	0.0015	0.0046102	126.38	48	4.20	1.64	840	1430
346	0.0051	0.0034	0.0015	0.0040514	111.28	44	3.76	1.20	746	1208
348	0.0047	0.0035	0.0014	0.0035347	97.26	42	3.34	0.86	658	1012
350	0.0043	0.0036	0.0014	0.0030325	83.58	36	2.98	0.56	576	842

♅

330	−0.0011	+0.0005	+0.0005	+0″0005700	+ 15″36	−0.0000014	+0″587	− 0″460	−0.0000233	−0.0000533
335	0.0010	0.0006	0.0005	0.0004586	12.45	10	0.485	0.275	180	374
340	0.0008	0.0006	0.0004	0.0003608	9.63	6	0.382	0.149	134	250
345	0.0007	0.0006	0.0004	0.0002520	6.91	3	0.284	0.673	95	157
350	0.0005	0.0006	0.0003	0.0001622	4.47	2	0.198	0.019	63	92

Coordonnées de la Comète et des Planètes perturbatrices rapportées au plan et au grand axe de l'orbite de la Comète. Temps écoulés depuis le passage au périhélie de 1759. Distances des Planètes à la Comète.

De 351 à 375 degrés d'anomalie excentrique.

u	x	y	t
51°	— 4.53	— 3.17	27566.7
52	4.33	3.12	27587.7
53	4.14	3.06	27608.1
54	3.95	3.01	27627.4
55	3.76	2.96	27646.3
56	3.58	2.90	27664.5
57	3.40	2.85	27681.9
58	3.22	2.79	27698.7
59	3.05	2.73	27714.8
60	2.88	2.68	27730.4
61	2.72	2.62	27745.2
62	2.55	2.56	27759.5
63	2.40	2.50	27773.2
64	2.24	2.44	27786.2
65	2.09	2.38	27798.8
66	1.94	2.32	27810.8
67	1.81	2.26	27822.2
68	1.60	2.19	27833.0
69	1.53	2.13	27843.4
70	1.40	2.07	27853.3
71	1.27	2.00	27862.7
72	1.14	1.94	27871.6
73	1.03	1.87	27880.0
74	0.91	1.81	27888.1
75	0.80	1.74	27896.0

♃

u'	x'	y'	z'	ϱ
351°	— 2.13	— 4.55	+ 0.05	2.77
352	2.27	4.48	0.10	2.48
353	2.41	4.42	0.15	2.20
354	2.53	4.35	0.20	1.96
355	2.65	4.28	0.25	1.75
356	2.77	4.21	0.29	1.57
357	2.88	4.14	0.33	1.44
358	2.98	4.07	0.37	1.36
359	3.07	4.00	0.41	1.34
360	3.16	3.94	0.45	1.37
361	3.25	3.87	0.49	1.53
362	3.33	3.80	0.52	1.55
363	3.41	3.73	0.55	1.69
364	3.48	3.67	0.58	1.84
365	3.54	3.61	0.61	1.99
366	3.56	3.56	0.62	2.14
367	3.66	3.49	0.67	2.33
368	3.72	3.43	0.69	2.50
369	3.77	3.37	0.71	2.66
370	3.82	3.32	0.74	2.82
371	3.87	3.27	0.76	2.99
372	3.91	2.21	0.78	3.14
373	3.94	3.17	0.79	3.29
374	3.98	3.12	0.81	3.44
375	4.01	3.08	0.83	3.58

♄

ι	x'	y'	z'	ϱ
52°	— 2.89	+ 8.88	+ 2.29	12.30
54	2.70	8.96	2.25	12.24
56	2.52	9.04	2.20	12.19
58	2.35	9.11	2.16	12.12
60	2.19	9.17	2.12	12.05
62	2.04	9.22	2.08	11.97
64	1.91	9.26	2.05	11.88
66	1.78	9.30	2.02	11.86
68	1.67	9.33	1.99	11.70
70	1.57	9.36	1.96	11.60
72	1.47	9.39	1.94	11.50
74	1.39	9.41	1.91	11.38

♅

u	x'	y'	z'	ϱ
355°	+ 17.67	— 6.91	— 6.31	22.69
360	17.56	7.21	6.32	21.87
365	17.46	7.44	6.31	21.17
370	17.39	7.64	6.31	20.58
375	17.32	7.79	6.31	20.12

Élémens employés de 351° à 375° d'anomalie excentrique.

n....	141″,8744	ω....	338°,1665
a....	18,1289	Ω....	61,0925
e....	0,967950	i....	19,6300

Forces perturbatrices et variations différentielles qui déterminent les altérations des élémens de l'orbite de la Comète et de l'anomalie moyenne.

De 351 à 375 degrés d'anomalie excentrique.

♅

u	X	Y	Z	dn	tdn	de	$d\omega$	$\frac{d\varepsilon - d\omega}{\varkappa(1-\sqrt{1-e^2})}$	dp	dq
°										
351	+0.1300	−0.0291	+0.0019	−0″.1749870	−4826″.03	+0.000971	− 97″.81	+ 50″.46	−0.000123	−0.000174
352	0.1534	0.0548	0.0058	0.1949689	5381.37	971	121.71	47.75	362	503
353	0.1807	0.0917	0.0129	0.2146990	5930.32	928	150.80	37.97	759	1025
354	0.2081	0.1441	0.0249	0.2266896	6265.84	770	183.72	35.97	1387	1820
355	0.2292	0.2157	0.0443	0.2209785	6112.10	+ 426	217.43	+ 20.09	2329	2965
356	0.2317	0.3066	0.0729	0.1814137	5021.14	− 209	244.30	− 5.18	3628	4475
357	0.1986	0.4037	0.1092	−0.0925010	−2561.85	1181	250.69	39.26	5128	6125
358	0.1211	0.4798	0.1462	+0.0430156	+1192.01	2367	224.81	75.55	6469	7474
359	+0.0137	0.5025	0.1704	0.1922211	5274.43	3413	167.43	101.91	7097	7918
360	−0.0863	0.3615	0.1729	0.2550904	7077.10	3257	68.49	83.88	6770	7291
361	0.1252	0.3215	0.1328	0.2833190	7864.42	3260	34.15	83.29	4880	5063
362	0.1816	0.3023	0.1347	0.3384174	9398.77	3568	− 1.38	83.60	4637	4628
363	0.1842	0.2284	0.1107	0.3059743	8501.83	3055	+ 19.67	65.49	3563	3416
364	0.1727	0.1700	0.0894	0.2638980	7336.18	2539	28.90	49.62	2688	2470
365	0.1554	0.1267	0.0721	0.2223720	6184.50	2087	31.20	37.07	2022	1777
366	0.1391	0.1005	0.0592	0.1899247	5284.58	1758	29.85	28.44	1545	1296
367	0.1201	0.0715	0.0479	0.1541637	4291.22	1403	27.56	20.42	1161	929
368	0.1043	0.0536	0.0392	0.1273801	3547.09	1148	24.40	14.96	880	667
369	0.0908	0.0405	0.0325	0.1056262	2942.43	946	21.22	11.01	676	482
370	0.0790	0.0306	0.0271	0.0876208	2441.67	781	18.22	8.08	520	351
371	0.0686	0.0229	0.0227	0.0725947	2023.60	645	15.49	5.89	401	254
372	0.0601	0.0172	0.0193	0.0605326	1687.90	537	13.15	4.29	313	185
373	0.0526	0.0127	0.0164	0.0555783	1550.23	447	11.19	3.11	244	134
374	0.0461	0.0091	0.0140	0.0418682	1168.26	371	9.30	2.21	190	96
375	0.0403	0.0063	0.0119	0.0346588	967.29	307	7.76	1.54	148	68

♄

352	+0.0040	−0.0038	−0.0013	−0″.0025623	− 70″.72	+0.0000022	− 2″.66	+ 1″.14	+0.0000506	+0.0000704
354	0.0037	0.0038	0.0013	0.0021644	59.82	22	2.32	1.82	428	576
356	0.0034	0.0037	0.0012	0.0019182	53.08	24	2.04	+ 0.96	376	464
358	0.0031	0.0037	0.0012	0.0014542	40.28	12	1.68	− 0.14	320	370
360	0.0028	0.0036	0.0011	0.0011477	31.84	6	1.42	0.70	272	292
362	0.0025	0.0036	0.0011	0.0008700	24.16	0	1.18	1.06	228	228
364	0.0022	0.0032	0.0010	0.0006431	17.86	+ 0	0.92	1.08	190	174
366	0.0021	0.0032	0.0010	0.0004376	12.16	− 6	0.76	1.20	160	134
368	0.0018	0.0031	0.0009	0.0002615	7.28	12	0.60	1.14	128	96
370	0.0016	0.0030	0.0009	−0.0000877	− 2.44	18	0.46	1.08	104	70
372	0.0014	0.0028	0.0008	+0.0000602	+ 1.66	24	0.34	0.98	82	48
374	0.0012	0.0027	0.0008	0.0001792	5.00	30	0.24	0.86	64	32

♃

355	−0.0003	+0.0006	+0.0025	+0″.0000879	+ 2″.43	+0.0000002	+ 0″.128	+ 0″.004	−0.0000039	−0.0000050
360	0.0002	0.0005	0.0019	+0.0000280	+ 0.77	3	0.073	0.012	22	23
365	−0.0001	0.0004	0.0012	−0.0000141	− 0.39	4	0.035	0.012	10	9
370	+0.0000	0.0003	0.0006	0.0000388	1.08	5	+ 0.012	0.008	4	2
375	0.0001	0.0002	0.0002	0.0000477	1.33	5	− 0.002	0.005	0.0000000	0.0000000

ordonnées de la Comète et des Planètes perturbatrices rapportées au plan et au grand axe de l'orbite de la Comète. Temps écoulés depuis le passage au périhélie de 1759. Distances des Planètes à la Comète.

De 376 à 400 degrés d'anomalie excentrique.

u	x	y	t
376°	— 0.67	— 1.68	27902j 3
377	0.57	1.62	27909.2
378	0.47	1.55	27915.6
379	0.38	1.48	27921.7
380	0.29	1.41	27927.4
381	0.21	1.34	27933.0
382	0.13	1.28	27938.1
383	— 0.05	1.21	27943.0
384	+ 0.02	1.14	27947.5
385	0.09	1.07	27951.8
386	0.16	0.99	27955.8
387	0.22	0.93	27959.6
388	0.29	0.86	27963.2
389	0.32	0.79	27966.6
390	0.37	0.71	27969.8
391	0.41	0.64	27972.8
392	0.45	0.57	27975.8
393	0.49	0.50	27978.5
394	0.51	0 43	27981.1
395	0.54	0.36	27983.7
396	0.55	0.29	27986.2
397	0 57	0.22	27988.6
398	0.58	0.14	27990.9
399	0.59	0.07	27993.2
400	0.59	0.00	27995.5

♃

u	x'	y'	z'	ϱ
376°	— 1.41	+ 9.40	+ 1.92	11.28
378	1.34	9.43	1.90	11.17
380	1.28	9.44	1.89	11.06
382	1.23	9.45	1.87	10.95
384	1.18	9.47	1.86	10.83
386	1.14	9.48	1.85	10.71
388	1.10	9.48	1.84	10.59
390	1.06	9.49	1.83	10.47
392	1.04	9.49	1.82	10.33
394	1.00	9.50	1.81	10.21
396	0.98	9.51	1.80	10.08
398	0.96	9.52	1.80	9.95
400	0.94	9 52	1.79	9.81

♅

u	x'	y'	z'	ϱ
376°	— 3.97	— 3.12	+ 0.82	3.69
377	4.00	3.09	0.83	3.83
378	4.03	3.05	0.84	3.95
379	4.06	3.02	0.86	4.08
380	4.08	2.98	0.87	4.19
381	4.11	2.95	0.88	4.31
382	4.13	2.92	0.89	4.42
383	4.15	2.89	0 90	4.53
384	4.17	2.86	0.91	4.63
385	4.19	2.84	0.92	4.72
386	4.20	2.81	0.93	4.81
387	4.22	2.79	0.94	4.90
388	4.24	2.76	0.95	4.98
389	4.25	2.75	0.95	5.06
390	4.26	2.73	0.96	5.14
391	4.27	2.71	0.96	5.20
392	4.28	2.69	0.97	5.27
393	4.29	2.67	0.98	5.33
394	4.30	2.66	0.98	5.39
395	4.31	2.64	0.99	5.45
396	4.32	2.62	0.99	5.50
397	4.33	2.61	1.00	5.54
398	4.34	2.59	1.00	5.59
399	4.35	2.58	1.01	5.63
400	4.36	2.57	1.01	5.66

♆

u	x'	y'	z'	ϱ
380°	+ 17.32	— 7.78	— 6.33	19.74
385	17.28	7.88	6.33	19.54
390	17.25	7.94	6.33	19.43
395	17.23	7.99	6.33	19.42
400	17.21	8.03	6.32	19.52

Élémens employés de 376° à 400° d'anomalie excentrique.

n....	143″,3024	ω....	338°,40
a....	18,0083	Ω....	61,52
e....	0,96736	i....	19,76

Forces perturbatrices et variations différentielles qui déterminent les altérations des élémens de l'orbite de la Comète et de l'anomalie moyenne.

De 376 à 400 degrés d'anomalie excentrique.

♅

u	X	Y	Z	dn	$t\,dn$	de	$d\omega$	$\frac{d\epsilon}{-d\omega(1-\sqrt{1-e^2})}$	dp	dq
376°	−0.0359	−0.0054	+0.0101	+0″.02968503	+828′.20	−0.000267	+6″.51	−1″.13	−0.000113	−0.001296
377	0.0315	0.0034	0.0087	0.0244373	682.03	227	5.40	0.75	88	929
378	0.0276	0.0017	0.0074	0.0199716	557.52	180	4.45	0.47	68	667
379	0.0240	−0.0003	0.0063	0.0160534	448.24	145	3.62	0.27	52	483
380	0.0211	+0.0008	0.0053	0.0129828	362.53	117	2.96	0.14	40	351
381	0.0184	0.0017	0.0045	0.0101745	284.20	92	2.38	−0.04	30	46
382	0.0159	0.0025	0.0037	0.0078245	218.61	71	1.90	+0.03	22	22
383	0.0136	0.0031	0.0031	0.0057919	161.84	52	1.49	0.07	16	− 6
384	0.0117	0.0036	0.0025	0.0041004	114.59	36	1.15	0.09	12	+ 2
385	0.0098	0.0041	0.0020	0.0026408	73.82	23	0.87	0.10	8	7
386	0.0082	0.0044	0.0015	0.0014335	40.07	12	0.64	0.11	5	9
387	0.0067	0.0047	0.0011	+0.0004011	+ 11.22	− 3	0.46	0.10	3	8
388	0.0053	0.0049	0.0007	−0.0004645	− 12.99	+ 4	0.31	0.09	2	6
389	0.0041	0.0050	0.0004	0.0011388	31.85	11	0.20	0.08	1	3
390	0.0029	0.0052	+0.0000	0.0017086	47.75	17	0.11	0.07	− 0	+ 0
391	0.0019	0.0052	−0.0002	0.0021346	59.71	21	+0.04	0.06	+ 0	− 3
392	0.0009	0.0053	0.0005	0.0024721	69.16	24	−0.01	0.05	1	6
393	−0.0000	0.0053	0.0007	0.0027065	75.73	26	0.05	0.03	1	9
394	+0.0008	0.0052	0.0009	0.0028579	79.97	28	0.07	0.02	1	11
395	0.0016	0.0052	0.0011	0.0029345	82.12	28	0.09	0.01	1	14
396	0.0022	0.0051	0.0013	0.0029346	82.13	28	0.10	+0.00	1	16
397	0.0029	0.0050	0.0014	0.0028736	80.43	28	0.10	−0.00	1	18
398	0.0035	0.0049	0.0017	0.0027623	77.32	27	0.11	0.01	0	21
399	0.0040	0.0048	0.0017	0.0025961	72.67	25	0.11	0.02	0	22
400	0.0045	0.0046	0.0018	0.0023795	66.62	23	0.12	0.03	0	23

♄

376	+0.0012	−0.0024	−0.0008	+0″.0001806	+ 5″.02	−0.0000032	−0″.18	−0″.06	+ 0000052	+ 20
378	0.0008	0.0024	0.0007	0.0003659	10.20	42	0.12	0.06	40	12
380	0.0007	0.0023	0.0007	0.0004292	11.98	44	0.06	0.04	30	6
382	0.0005	0.0021	0.0006	0.0004735	13.22	48	0.04	0.02	22	+ 2
384	0.0003	0.0019	0.0006	0.0004985	13.92	48	0.00	0.02	16	− 0
386	0.0002	0.0018	0.0005	0.0005042	14.08	48	−0.00	0.02	10	0
388	+0.0000	0.0016	0.0005	0.0004922	13.76	46	+0.01	0.01	6	2
390	−0.0001	0.0014	0.0004	0.0004623	12.92	44	0.01	0.01	4	2
392	0.0002	0.0012	0.0003	0.0004075	11.38	38	0.01	0.00	2	2
394	0.0003	0.0009	0.0003	0.0003524	9.86	34	0.01	−0.00	0	2
396	0.0004	0.0008	0.0002	0.0002736	7.64	36	0.01	+0.00	0	0
398	0.0005	0.0005	0.0001	0.0001805	5.04	16	0.01	0.00	0	0
400	0.0006	0.0002	0.0000	0.0000737	2.06	6	0.01	0.00	0	0

♅

380	+0.0001	+0.0002	−0.00003	−0″.0000471	− 1″.31	+0.0000004	−0″.004	+0″.0000001	+0.001	+0.0000000
385	0.0001	0.0001	0.00006	0.0000317	0.89	3	0.004	+ 1	0.001	− 0
390	0.0002	+0.0000	0.00007	−0.0000153	− 0.42	+ 1	0.002	− 0	0.000	0
395	0.0001	−0.0000	0.00008	+0.0000008	+ 0.02	−0.0000000	0.001	0	0.000	0
400	0.0001	0.0001	0.00006	0.0000124	0.34	12	0.001	0	0.000	0

ableau des résultats de l'intégration par quadratures des différentielles précédentes, contenant les altérations du moyen mouvement, de l'anomalie moyenne, et des autres élémens du mouvement de la Comète, correspondantes aux variations supposées de l'anomalie excentrique.

excentrique.	Planètes perturbatrices.	$\int dn$	$t\int dn$	$\int t dn$	$\int dt \int dn$	$\int d\omega$	$\int \frac{d\iota}{\int d\omega(1-\sqrt{1-e^2})}$	$\int d\iota - \int d\omega$	$\int d\zeta$	$\int de$	$\int dp$	$\int dq$
	♀	−0″72321	−1835a″25	−16943″75	−1408″50	−1931″505	−6906″555	+7394″552	+5986″052	+0″000120334	+0.001104405	+0.000013979
	♃	+0.07216	+1831. 05	− 2335.24	+4166.29	− 62.967	−1671.607	+1687.516	+5853.806	+0.000305820	−0.000151485	−0.000425013
	♄	+0.022486	+ 570. 62	+ 297.70	+ 272.92	− 80.312	− 357.197	+ 377.488	+ 650.411	−0.000026551	−0.000002775	+0.000039951
	♀	+0″56186	+15012″40	+16670″30	−1657″90	−1752″430	−4191″387	+4631″450	+2973″550	−0.000194951	+0.000471038	−0.001853116
	♃	−0.18354	− 4904.06	− 8971.62	+4067.56	− 169.077	−2240.962	+2283.420	+6350.980	+0.000338570	−0.000133795	−0.000365600
	♄	+0.02703	+ 722.24	+ 415.91	+ 306.33	− 76.424	− 348.262	+ 367.454	+ 673.78	−0.000026543	−0.000006209	+0.000028858
	♀	−0″37207	−10255″32	− 9039″80	−1215″52	−1217″902	−4858.548	+5433.421	+4217.90	+0.000113777	+0.000182636	−0.00250793
	♃	−0.27823	− 7668.70	+11217.64	+3548.94	− 243.906	−2313.085	+2374.416	+5923.36	+0.000341114	−0.00010937	−0.000031444
	♄	+0.02909	+ 801.73	+ 471.66	+ 330.08	− 74.240	− 346.937	+ 365.662	+ 695.74	−0.000026610	−0.000007497	+0.000026136
	♀	+1″05714	+29503″62	+30920″40	−1416″78	−2767″023	−4352.797	+5316.712	+3899″93	−0.000335145	−0.000726117	−0.003363a3
	♃	−0.27952	− 7801.06	−11574.97	+3773.91	− 259.987	−2313.176	+2378.545	+6152.46	+0.000341145	−0.00010445	−0.000030878
	♄	+0.02921	+ 815.16	+ 474.96	+ 340.20	− 73.895	− 346.967	+ 365.604	+ 705.80	−0.000026595	−0.000007664	+0.000025931
	♀	+1″18118	+33068″03	+34381″80	−1313″77	−2731″333	−4350″095	+5304″952	+3991″18	−0.000352408	−0.000734473	−0.003424g6
	♃	−0.27477	− 7692.36	−11442.28	+3750.48	− 260.515	−2312.837	+2378.340	+6128.82	+0.000340391	−0.000104096	−0.000308740
	♄	+0.02913	+ 815.42	+ 472.70	+ 342.72	− 73.908	− 346.969	+ 365.609	+ 708.33	−0.000026579	−0.000007661	+0.000025929

La comète s'étant beaucoup approchée de la Terre en 1759, pour fixer avec exactitude l'époque de son retour au périhélie, il est devenu nécessaire de calculer les perturbations que l'action de cette planète a pu lui faire éprouver. Cette action n'altérera pas d'une manière appréciable les élémens qui fixent les dimensions et la position de l'orbite, mais elle a eu une influence sensible sur la valeur du moyen mouvement diurne au périhélie de 1759, et par suite sur la durée de la révolution que la comète accomplit en ce moment.

La plus grande proximité de la comète à la Terre a eu lieu après le passage au périhélie; c'est par conséquent à une époque postérieure que se rapportent les perturbations les plus considérables. Cependant j'ai reconnu qu'il était indispensable de considérer aussi l'influence de la Terre pendant les trois mois qui ont précédé le passage au périhélie de 1759, les altérations qui en résultent sur le moyen mouvement ayant déjà une valeur sensible. Nous avons suivi dans le calcul de ces perturbations les formules présentées au commencement de ce Mémoire; nous avons agrandi les intervalles d'anomalie excentrique à mesure que la comète s'est éloignée de la Terre, mais nous les avons resserrés de manière à faire varier cette anomalie de demi-degré en demi-degré seulement, lorsque la distance de la comète à la Terre a été à son *minimum*. Nous n'avons eu égard à l'action de la Terre, soit avant, soit après le passage au périhélie, que, pendant le temps où elle a été assez voisine de la comète pour exercer sur elle une influence sensible. Enfin, dans le calcul des forces perturbatrices X et Y, on n'a pas eu égard à l'action de la Terre sur le Soleil, parce que cette action s'exerçant tour à tour dans deux sens opposés, on peut supposer que ses effets se détruisent pendant une révolution entière de la comète.

Les résultats que nous avons obtenus de cette manière, sont contenus dans les tableaux suivans.

Perturbations résultantes de l'action de la Terre pendant les quatre cent cinquante-deux jours qui ont précédé le passage au périhélie de 1759.

Coordonnées de la Terre rapportées au plan et au grand axe de l'orbite de la comète, ses distances à cet astre. Forces perturbatrices, et altérations différentielles du moyen mouvement de la comète.

☄

u	x'	y'	z'	ϱ	X	Y	dn
350°	— 0.93	— 0.18	+ 0.26	4.86	+0.0329	+0.0265	−0″ 00086562
355	— 0.38	+ 0.90	+ 0.21	5.13	0.0249	0.0286	0.00066993
360	+ 0.83	+ 0.56	— 0.18	4.92	0.0310	0.0272	0.00073512
365	0.81	— 0.52	0.30	3.45	0.0703	0.0454	0.00143803
370	+ 0.05	0.98	0.12	1.80	0.2444	0.1862	0.00094533
371	— 0.12	0.99	0.07	1.53	0.3161	0.2853	0.00126007
372	0.27	0.96	— 0.03	1.31	0.3844	0.4354	0.00162730
373	0.39	0.91	+ 0.01	1.16	0.4033	0.6290	0.00099813
374	0.51	0.84	0.06	1.05	0.3397	0.8406	0.00203927
375	0.59	0.78	0.09	0.99	+0.2078	0.9982	0.00193227
376	0.69	0.69	0.13	1.00	−0.0051	0.9955	0.00143439
377	0.75	0.62	0.15	1.02	0.1572	0.9413	0.00103200
378	0.81	0.52	0.12	1.09	0.2537	0.7880	0.00062688
379	0.86	0.42	0.21	1.18	0.2919	0.6503	0.00037655
380	0.90	0.34	0.23	1.25	0.3056	0.5501	0.00023339
381	0.91	0.25	0.24	1.32	0.3033	0.4759	0.00015919
382	0.94	0.16	0.26	1.40	0.2941	0.4076	0.00010423
383	0.94	— 0.07	0.27	1.46	0.2833	0.3665	0.00009428
384	0.94	+ 0.00	0.28	1.52	0.2751	0.3258	0.00007005
385	0.93	0.07	0.29	1.56	0.2704	0.3002	0.00006570
386	0 93	0.14	0.29	1.60	0.2652	0.2792	0.00006794
387	0.92	0.21	0.30	1.63	0.2611	0.2635	0.00007567
388	0.91	0.25	0.30	1.64	0.2654	0.2508	0.00007755
389	0.89	0.32	0.30	1.66	0.2629	0.2414	0.00009196
390	0.86	0.38	0.30	1.67	0.2640	0.2344	0.00010642
391	0.84	0.42	0.30	1.67	0.2683	0.2293	0.00012093
392	0.82	0.47	0.30	1.66	0.2738	0.2261	0.00013827
393	0.80	0.51	0.29	1.65	0.2831	0.2232	0.00015446
394	0.78	0.54	0.29	1.64	0.2940	0.2210	0.00017271
395	0.74	0.60	0.28	1.61	0.3014	0.2275	0.00020813
396	0.72	0.62	0.28	1.59	0.3176	0.2271	0.00023076
397	0.69	0.66	0.28	1.52	0.3559	0.2485	0.00028407
398	0.67	0.68	0.27	1.52	0.3551	0.2348	0.00029761
399	0.65	0.70	0.27	1.48	−0.3792	+0.2365	0.00033259

Perturbations résultantes de l'action de la Terre, pendant les cent soixante-trois jours qui ont suivi le passage au périhélie de 1759.

Coordonnées de la Terre rapportées au plan et au grand axe de l'orbite de la comète, ses distances à cet astre. Forces perturbatrices, et altérations différentielles du moyen mouvement, de la longitude du périhélie de la comète, et de la longitude de l'époque.

☥

u	x'	y'	z'	ϱ	X	Y	dn	tdn	$d\omega$	$\frac{ds}{-d\omega(1-\sqrt{1-e^2})}$
0°	−0.62	+0.74	+0 27	1.43	− 0.4079	+ 0.2496	−0″ 0003899	−0″ 00	+0″ 03	+ 0″ 008
1	0.60	0.75	0.26	1.39	0.4412	0.2512	0.0004352	0.00	0.03	0.009
2	0.56	0.79	0.25	1.33	0.4852	0.2730	0.0005217	0.00	0.04	0.009
3	0.54	0.80	0.25	1.27	0.5334	0.2833	0.0005973	0.00	0.04	0.010
4	0 50	0.83	0.24	1.20	0.5997	0.3120	0 0007192	0.00	0.05	0.011
5	0.47	0.85	0.23	1.14	0.6791	0.3345	0.0008503	0.01	0.08	0.008
6	0.42	0.88	0.22	1.06	0.7906	0.3792	0.0010498	0 01	0.13	0.009
7	0.38	0.90	0.21	0.97	0.9424	0.4383	0.0013199	0.02	0.10	0.009
8	0.35	0.91	0.20	0.89	1.1331	0.4881	0.0016345	0.03	0.16	0.006
9	0.30	0.94	0.19	0.78	1.4548	0.6084	0.0022084	0.05	0.24	0.009
10	0.25	0.95	0.18	0.68	1.9343	0.7556	0.0030368	0.08	0.33	0.007
11	0.19	0.97	0 17	0.57	2.8011	1.0149	0.0045392	0.13	0.54	0.004
12	0.14	0.98	0.15	0.46	4.3495	1.3336	0.0070856	0 23	0.91	0.001
13	0.09	0.99	0.14	0.33	7.9861	1.7452	0.0126817	0.45	1 82	0.003
14	−0.02	1.00	0.12	0.21	18.9076	+ 0.2169	−0.0258330	−1.02	3.65	0.140
15	+0.04	1.00	0.10	0.13	−21.2743	−32.5806	+0.0187823	+0.82	+5.47	2.291
16	0.11	0.99	0.08	0.18	+14.8590	22.4950	0.0568837	2.72	−4.51	1.640
17	0 18	0.99	0.06	0.32	6.9184	6.2820	0.0204289	1.07	2.14	0.525
18	0.26	0.98	0.03	0.49	10.2251	7.7866	0 0293192	1.68	3.50	0.829
19	0.34	0.95	+0.01	0.68	1.7805	1.2593	0.0051172	0.32	0.57	0.160
20	0.42	0.92	−0.02	0.87	1.0824	0.7388	0.0031657	0.21	0.42	0.111
21	0.50	0.88	0.05	1.08	0.7161	0.4834	0.0021486	0.16	0.30	0.080
22	0.59	0.82	0.08	1.30	0.4903	0.3323	0.0015042	0.12	0.21	0.072
23	0.68	0.75	0.12	1.53	0.3498	0.2413	0.0011713	0.10	0.15	0.051
24	0.73	0.69	0.14	1.73	0.2714	0.1902	0.0008938	0 08	0.11	0.050
25	0.82	0.58	0.18	1.99	0.2023	0.1474	0.0006913	0.07	0.10	0.045
26	0.88	0.46	0.21	2.24	0.1574	0.1194	0.0005588	0.06	0.08	0.039
27	0.94	0.34	0.24	2.50	0.1248	0.0985	0.0004577	0.05	0.06	0.036
28	0.96	0.19	0.27	2.75	0.1007	0.0845	0.0003847	0.05	0.05	0.034
29	0.97	+0.05	0.28	2.99	0.0839	0.0738	0.0003317	0.04	0.04	0.033
30	0 96	−0.13	0.30	3.23	0.0696	0.0653	0.0002863	0.04	0.03	0.031
31	0.92	0.30	0.31	3.53	0.0577	0.0555	0.0002435	0.04	0.03	0.029
32	0.85	0.44	0.30	3.65	0.0513	0.0543	0.0002271	0.03	0.02	0.030

Résultats des intégrations, par des quadratures paraboliques des différentielles précédentes, présentant les altérations du moyen mouvement, de la longitude du périhélie et de l'anomalie moyenne de la comète, produites par l'action de la Terre pendant les années 1758 *et* 1759.

☿

Époques.	$\int dn$	$t\int dn$	$\int tdn$	$\int dt\int dn$	$\int d\varpi$	$\frac{\int ds - \int d\varpi}{\varkappa(1-\sqrt{1-e^2})}$	$\int ds - \int d\varpi$	$\int d\zeta$
Antérieurement au passage au périhélie	−0″0200668	− 56o″61	»	− 56o″61	»	»	»	− 56o″61
Après le passage au périhélie...	+0.0796934	+2226.40	+5″64014	+2220.76	+1″2885	+ 6″3363	+ 6″0148	+2226.77
Altérat. totales..	+0.0596266	+1665.79	+5.64014	+1660.15	+1.2885	+ 6.3363	+ 6.0148	+1666.16

Nous allons présenter dans le tableau suivant le résumé des résultats que nous venons d'obtenir, et qui déterminent les perturbations que la comète doit éprouver pendant la période actuelle, par les actions réunies de Jupiter, Saturne, Uranus, et la Terre. Nous nous sommes assurés en outre que les autres planètes n'auront sur sa marche aucune influence sensible.

Tableau présentant les altérations du moyen mouvement, de l'anomalie moyenne et des autres élémens du mouvement de la comète, depuis son passage au périhélie de 1759 *jusqu'à son prochain retour.*

	$\int dn$	$t\int dn$	$\int tdn$	$\int dt\int dn$	$\int d\varpi$	$\frac{\int ds - \int d\varpi}{\varkappa(1-\sqrt{1-e^2})}$	$\int ds - \int d\varpi$	$\int d\zeta$	$\int de$	$\int dp$	$\int dq$
♅	+1″18118	+33068″03	+34381″80	−1313″77	−2731″33	+4350″10	+5304″95	+ 3991″18	−0.0003524	−0.0007344	−0.0034249
♄	−0.27477	− 7692.36	−11442.28	+3750.48	− 260.52	+2312.84	+2378.34	+ 6128.82	+0.0003403	−0.0001041	−0.0003087
♃	+0.02913	+ 815.42	+ 472.70	+ 342.72	− 73.91	+ 346.97	+ 365.61	+ 708.33	−0.0000265	−0.0000076	+0.0000259
♂	+0.05963	+ 1665.79	+ 5.64	+1660.15	+ 1.29	+ 6.34	+ 6.01	+ 1666.16	»	»	»
	+0″99517	+27856″88	+23417″86	+4439″58	−3064″47	+7016″24	+8054″91	+12494″49	−0.0000386	−0.0008462	−0.0037077

Les valeurs précédentes, jointes à celle de N′ qui résulte des perturbations que la comète a éprouvées pendant la période de 1682 à 1759, offrent toutes les données nécessaires pour déterminer l'époque de son prochain retour au périhélie, et les élémens correspondans de son orbite.

Et effet, si dans l'équation (n° 4),

$$\zeta = \mathrm{N}'t + \int d\zeta,$$

on substitue pour N′ sa valeur 142″,40717, et qu'on désigne par T′ l'intervalle de temps compris entre le passage de la comète au périhélie de 1759, et le prochain retour au même point de son orbite, en observant que ζ devient égal à 400° quand on suppose $t = T'$, on aura

$$T' = \frac{400^\circ - 12^\circ 94'',49}{N'} = 28088^j,47 - 87^j,74 = 28000^j,73;$$

ce qui, à partir du $12^j,59$ mars 1759, origine de la période, répond au $10^j,32$ novembre 1835, qui sera l'instant du prochain passage de la comète à son périhélie.

Si l'on nomme N″ et a'' les valeurs de N et a à l'instant du passage en 1835, on aura

$$N'' = N' + f dn = 143'',40234, \qquad a'' = 17,999902.$$

Quant aux autres élémens de la comète correspondans à la même époque, ils sont faciles à déterminer en partant des élémens que nous avons adoptés pour 1759. En effet, en nommant e' le rapport de l'excentricité à la distance moyenne, on aura

$$e' = e + f de = 0,9675185.$$

En substituant pour p et q leurs valeurs dans les équations

$$p = \sin\varphi \sin\theta, \qquad q = \sin\varphi \cos\theta,$$

on en tire

$$\theta = 185^\circ,7150, \qquad \varphi = 0^\circ,2420;$$

φ désignant, comme nous l'avons dit n° 1, l'inclinaison de l'orbite vraie de la comète sur le plan de son orbite relative au périhélie de 1759, et θ la longitude de son nœud ascendant, comptée sur le même plan, à partir du périhélie de la comète et dans le sens des signes.

On a de plus, pour le mouvement du périhélie, par rapport aux fixes,

$$f d\omega = -3064'',47.$$

Au moyen de ces valeurs, et en considérant le triangle sphérique intercepté par l'orbite de la comète en 1759, son orbite troublée, et le plan de l'écliptique, on trouvera

Pour l'inclinaison de l'orbite de la comète sur l'écliptique en 1835. . . . . 19°,7115

Pour le mouvement direct du nœud de la comète sur le même plan, de 1759 à 1835. . . . . 0°,6620

Pour la distance du nœud ascendant au périhélie en 1835. . . . . 276°,7097.

En ajoutant à l'altération du nœud 1°,18672 pour la précession des équinoxes dans l'intervalle des deux passages de la comète à son périhélie, on aura sa variation par rapport à l'équinoxe mobile. La longitude du nœud en 1759 était 59°,8182; elle sera donc au prochain passage 61°,6669, et en réunissant les résultats précédens, on formera le tableau suivant des élémens de l'orbite de la comète à son retour au périhélie de 1835.

Élémens de la comète en 1835.

Instant du passage au périhélie	10^{j},32	novembre 1835.
Demi-grand axe	17,99992	
Excentricité	0,9675185	
Lieu du périhélie sur l'orbite	338°,3766	
Longitude du nœud ascendant	61°,6669	
Inclinaison de l'orbite à l'écliptique	19°,7115	
Sens du mouvement *rétrograde*		

Addition.

Depuis que ce Mémoire est composé, le calcul des perturbations des planètes télescopiques, Cérès, Junon, Pallas et Vesta, exécuté par MM. Encke, Nicolaï, etc., et les nouvelles observations des élongations des satellites de Jupiter faites par M. Airy, ont apporté une correction notable à la masse que nous avions adoptée dans nos calculs pour cette dernière planète, et qui est celle qui

résulte des équations de condition des tables de M. Bouvard. Dans l'espoir d'assigner avec la plus grande précision que comporte l'état actuel de l'analyse, l'époque du prochain retour au périhélie de la comète de Halley, j'ai pensé qu'il serait nécessaire d'introduire cette correction dans les valeurs qui déterminent les perturbations de cette comète. Son influence sur les élémens de l'orbite en 1835 pourra être négligée sans erreur sensible, mais elle produira une altération de plusieurs jours sur la durée de la période que la comète accomplit en ce moment, et il était par conséquent essentiel d'y avoir égard.

En supposant donc la masse de Jupiter égale à $\frac{1}{1053,94}$, j'ai obtenu les résultats suivans.

Le calcul des perturbations de 1682 à 1759 a donné :

Altérations du moyen mouvement diurne. fdn		Altérations de l'anomalie moyenne. $fd\zeta$	
♅	+ 1″.038855	♅	+ 52295″.51
♄	+ 0.085476	♄	+ 1163.63
☿	+ 0.043440	☿	+ 1094.60
	+ 1″.167771		+ 54553″.74

Le moyen mouvement au périhélie de 1682 a pour expression $\frac{360° - fd\zeta}{27937}$; en substituant donc pour $fd\zeta$ sa valeur, on aura $N = 141'',22652$, et au périhélie de 1759, on aura

$$N' = N + fdn = 142'',39429.$$

Le calcul des perturbations pendant la période de 1759 jusqu'au prochain retour de la comète, a donné ensuite:

Altérations du moyen mouvement diurne. fdn		Altérations de l'anomalie moyenne. $fd\zeta$	
♅	+ 1″.19976		+ 4053″.95
♄	— 0.27477		+ 6128.82
☿	+ 0.02913		+ 708.33
♁	+ 0.05963		+ 1666.16
	+ 1″.01375		+ 12557″.26

En nommant, comme nous l'avons fait, T' l'intervalle entre le passage de la comète au périhélie en 1759, et son prochain retour au même point de son orbite, on aura

$$T' = \frac{400° - \int d\zeta}{N'} = 28002^j,82.$$

Ce qui, à compter du $12^j,59$ mars 1759, origine de la période, répond au $12^j,41$ novembre 1835, qui sera l'instant du passage au périhélie.

N. B. Le programme du prix proposé par l'Académie pour 1826 et remis successivement au concours pour 1827 et 1829, prescrivait aux concurrens d'appliquer les formules relatives aux perturbations des comètes, non-seulement à la détermination du prochain retour de la comète de 1759, mais encore au mouvement de l'une des deux autres comètes périodiques dont le retour est maintenant constaté. Pour me conformer à ces conditions, j'avais donc calculé les perturbations de la comète périodique de 1819, depuis cette époque jusqu'en 1827, mais j'ai cru devoir supprimer ici cette partie de mon Mémoire devenue inutile par le grand travail publié par M. Encke sur les perturbations de cette comète, depuis sa première apparition en 1786, jusqu'à l'époque actuelle.

SECONDE ADDITION
AU MÉMOIRE SUR LES TAPIRS AMÉRICAINS.

Dans l'intervalle qui s'est écoulé entre la lecture et l'impression de mon Mémoire, j'ai eu l'occasion d'interroger un assez grand nombre de naturalistes arrivant de l'Amérique méridionale; mais quoique plusieurs se fussent occupés spécialement de recherches zoologiques, aucun d'eux n'a pu me fournir de renseignemens sur la nouvelle espèce de Tapir : aucun d'eux même n'avait entendu dire dans le pays qu'il en existât une, différente de l'espèce commune.

Je ne pouvais croire cependant que la distinction n'eût jamais été faite par les indigènes ou les créoles (1), puisque, même en admettant qu'une espèce habitât exclusivement les hautes montagnes, l'autre les plaines ou les basses vallées, il était à croire que, sur un sol fortement accidenté comme l'est celui des Guyanes, de la Colombie et du Pérou, les deux espèces se trouveraient en quelques cantons assez rapprochés pour s'offrir successivement aux mêmes chasseurs. Je viens d'acquérir la preuve que dans plusieurs provinces, ils les distinguent en effet l'une de l'autre, et j'ai en même temps obtenu sur la distribution géographique du *Pinchaque* des données précises qui me manquaient jusqu'à présent.

Dans un ouvrage publié en Angleterre à peu près à la même époque où je présentai mon travail à l'Académie, un officier de Marine M. Lister Maw indiquait l'existence des deux espèces de Tapir dans la province de Maïnas, les distinguant l'une de l'autre non-seulement par la taille (caractère qui n'a qu'une

(1) Bajon, dans un passage que j'ai cité en note, page 593, dit bien qu'à la Guyane les nègres et les chasseurs indiens reconnaissent deux espèces de Tapir; mais en lisant jusqu'au bout son article, on reconnaît que pour lui le mot *espèce* n'a pas, dans ce cas au moins, la même signification qu'il a dans le langage des naturalistes classificateurs, et qu'on doit le prendre seulement dans le sens de *variété* ou tout au plus de *race*. En effet, la distinction repose uniquement sur la différence de taille et de volume, et cependant quand il veut donner les dimensions de l'animal, il prend toujours la moyenne entre les dimensions des individus de la *grande espèce* et de ceux de la petite; il le dit expressément.

importance secondaire, parce qu'on peut toujours le supposer dépendant des circonstances extérieures), mais encore par l'absence de tache à l'oreille; la couleur générale de la robe peut varier suivant le climat, la disposition des taches au contraire est constante et forme ainsi, comme l'a reconnu M. Geoffroy Saint-Hilaire, un bon caractère spécifique (1).

Des indications toutes semblables mettent également hors de doute l'existence des deux espèces dans une province voisine de l'Océan Atlantique; elles sont fournies par un observateur qui avait devancé de beaucoup d'années M. Lister et moi, mais dont les importans travaux sont malheurement restés jusqu'à ce jour en grande partie inédits. Je veux parler d'un membre de l'Académie des Sciences, feu M. le professeur Richard. Il m'a été permis le mois dernier, mai 1835, de consulter quelques-unes des notes dans lesquelles il a consigné le résultat de ses observations sur les animaux de la Guyane française. J'y ai trouvé la description très complète tant sous le rapport zoologique qu'anatomique de différens mammifères, mais j'y ai vainement cherché celle du Tapir. L'animal figure seulement dans le catalogue des objets que notre savant et zélé naturaliste avait préparés pour les rapporter en Europe; mais, dans les trois lignes écrites à la suite du nom, les deux espèces sont très suffisament distinguées

(1) Au mois de février 1828, M. Maw se trouvant à Égas, situé au confluent de l'Amazone et du Yapura, obtint la première indication des deux espèces de Tapir. « *We* » *had an account given us of several animals common in the woods and rivers about* » *Egas. They were the Tapir, there called the Anta, and which is the same animal* » *with the sachywaka, dante, or gran beastia of Peru, and of which we had heard* » *much both before and since embarking. Two Kinds were described to us, one having* » *the tips of its ears white, and which is the largest.....* » (Maw. Journal of a passage from the pacific to the, atlantic, crossing the Andes in the northern provinces of Peru, and descending the River Amazon. Londres, 1829, page 273.)

On voit ici reparaître, sous une forme un peu différente, le mot *sachi vacca* qu'avait donné Clavijero, sans dire dans quel pays il était employé; ce mot me paraît avoir une origine un peu différente de celle que j'avais d'abord soupçonnée. La langue Qquichua a été introduite par les missionnaires dans beaucoup de leurs réductions, comme dans d'autres l'a été la langue guarani; les Indiens qui ont adopté la première, n'y ont pas trouvé de mot pour désigner le Tapir, et ils l'ont appelé d'un nom composé vache des bois, *sachi uaca*, formé de *uaca*, au lieu de vaca (le qquichua n'ayant pas l'*u* consonne), et *sacha* ou *çachha*, arbre, bosquet, forêt.

par leur taille et leur système de coloration (1); toutefois, comme elles ne sont désignées que sous le nom de variétés, il est permis de supposer que l'auteur n'avait pas eu occasion d'observer lui-même le Pinchaque, et qu'il n'en parlait que sur le rapport des coureurs de bois. M. Lister Maw s'exprime aussi de manière à faire croire qu'il ne l'avait pas vu.

Quoi qu'il en soit, nous savons maintenant que le Tapir Pinchaque s'écarte de 5 degrés environ de chaque côté de l'équateur: s'avance-t-il plus loin au nord ou au sud, c'est ce que les observations ultérieures des naturalistes pourront seules nous apprendre.

On peut remarquer que le *Pinchaque* n'a été clairement désigné que par ceux qui ont connu aussi le *Maipouri;* il n'y a là rien qui doive surprendre : en effet les caractères qui distinguent les deux espèces sont positifs, quand on les considère par rapport à l'espèce anciennement connue, tandis qu'ils sont comme négatifs, quand on les considère par rapport à l'autre, et qu'ils n'ont dû par conséquent être signalés que par opposition. On ne s'est avisé d'avertir que la petite espèce a le front sans crête, le cou sans crinière et l'oreille sans tache blanche, que pour empêcher de la confondre avec l'espèce à front tranchant, à cou surmonté de poils dressés et à oreille marquée de blanc.

Beaucoup des auteurs qui ont écrit sur le Tapir l'ont fait avec tant de négligence, que rien ne désigne l'espèce dont ils ont voulu parler; c'est le cas de tous ceux qui appartiennent au seizième siècle (2). Dans les descriptions postérieures le maipouri est

---

(1) « *MAIPOURI.*—Fait un petit après la saison des pluies.—Deux variétés.—Celle qui a le bout de l'oreille blanc est la plus forte et pèse jusqu'à 300 ℔. — *Stercus equinum.* — *Aacutissimè sibilat.* — Vit de feuillages et graines. — Dort le jour. — On en tire un saindoux qui ne se fige point et qu'on conserve dans des bouteilles. — Il saisit les objets avec le museau, qui est très mobile. »

« Les Indiens et les nègres le sifflent.—La peau a un demi-pouce et plus d'épaisseur, et est très propre à être tannée pour des semelles. » (Claude-Louis Richard, *Zoologia gallo guyanensis*). — *Quadrupedes gallo guyanenses infarcto exsicati.*

(2) Benzoni, dans son *Mondo Nuovo*, publié en 1565, a parlé avec assez de détail du Tapir de l'Isthme, et comme il le représente noir et velu, on pourrait supposer que, de même que Gomara, il a eu en vue le Pinchaque. Sa description, quoique ne contenant aucun caractère spécifique proprement dit, est incontestablement la meilleure de

souvent indiqué par une ou plusieurs des particularités dont nous avons parlé. Ainsi, dans Herrera, dans Marcgraff et dans Gumilla, on le reconnaît à la forme du front ; dans Allamand, à la

---

toutes celles qu'on a eues dans le seizième siècle, ou même la seule qui mérite véritablement ce nom ; elle donne en effet une juste idée des formes générales de l'animal, de la configuration des oreilles, des yeux et de la trompe, de son cri perçant, etc. Voici comment l'auteur s'exprime en parlant des animaux de la province de Suere, à l'est du canal de Nicaragua.

« *Si trovano in questa provincia grandissima copia di porci montesi, e tigri ferocissimi ed alcuni leoni, pero timidi, perche vedendo un huomo fuggeno ; e vi sono serpe di grandezza incredibile ma senza veleno, e molti gatti mammoni. Vi si trova ancora un altro animale che dà paesani si è detto Cascuij, il quale è di forma d'un porco nero, peloso ; ha il cuoio molto duro, gli occhi piccoli, le orecchie grande, le ugne fesse e una picciol tromba como lo Elefante, e da un strido tanto terribile che stordisce la gente ; la sua carne si e saporita. Si trova similmente un altro animale monstruoso che ha una scarsella sotto il ventre e quando vuole andare da un luogo a un altro vi mette gli figliuoli dentro ; questo animale ha il corpo ed il muso di volpe e le mani e piedi di forma como il gatto ma gli muove, ed ha gli orecchi, come il pipistrello.* »

La dernière phrase est rendue inintelligible par une faute de l'imprimeur, et au lieu de ces mots *como il gatto ma gli muove*, il faut évidemment lire : *como il gatto mammone*. Le sarigue a les pieds et les mains comme le chat mammon, c'est-à-dire comme le singe. C'est la comparaison et même l'expression déjà employées par Pinzon qui, en 1500, vit l'animal à la côte de Paria.

Ce mot de mammon, comme je m'en suis assuré depuis, se retrouve dans des auteurs beaucoup plus anciens, notamment dans le *Speculum majus* de Vincent de Beauvais, lequel l'avait emprunté lui-même à un écrivain du commencement du treizième siècle, l'auteur du livre *de Natura rerum ;* ce dernier l'écrit *marmonetus*. La description qu'il en donne ne peut s'appliquer qu'au callitriche. Le mot de Maimon, sous lequel Buffon désigne le singe à queue de cochon, paraît en être dérivé, et il serait dans ce cas fort mal appliqué ; à la vérité, le mot maïmon est aujourd'hui employé par les Arabes pour un singe d'Afrique d'espèce indéterminée, mais comme ce mot, d'origine étrangère à leur langue, s'applique aussi à une plante grimpante, il y a tout lieu de croire qu'il désigne un singe dont la queue peut s'enrouler autour des branches.

Le mot de *mono* est encore employé en espagnol pour désigner un singe, comme l'est en Italie, quoique plus rarement, le diminutif *monichio*, d'où est venu l'anglais *monkey ;* en se rappelant que dans les langues du nord, le singe est souvent désigné sous le nom de chat de mer, on est porté à croire que dans les mots *marmon* et *marmonetus*, la première syllabe a été ajoutée pour indiquer que l'animal vient d'outre-mer. C'est ainsi que dans quelques parties de la Bourgogne et de l'Artois, le cochon d'Inde est nommé cochon de mer. Quand les voyages de long cours sont devenus plus fréquens, cette manière de désigner les espèces d'outre-mer a cessé d'être employée et bientôt d'être comprise ; de là les plus étranges erreurs. Par exemple, le cerf muntjak, d'abord nommé chevreuil d'outre-mer, se trouve figuré dans Jonston, sous le nom de

crinière et à la marque blanche de l'oreille; dans Caulin (1), à ce dernier caractère; dans d'Azzara enfin à la réunion de tous les trois. Dans Buffon, il n'y en a pas un seul indiqué, de sorte que sans la figure de de Sève, on ne saurait si les deux individus observés à Paris par le naturaliste français, appartenaient à la même espèce que ceux qu'avait décrits Allamand.

Le témoignage de MM. Richard et Maw s'accordent avec mes propres observations pour montrer l'espèce à front plat comme décidément plus petite que l'autre. Peut être est-ce cette différence que les indigènes avaient voulu indiquer par les deux suffixes *eté* et *oussou;* désignant la première seulement par le nom de *Tapiira*, et l'autre par celle de *Tapiier oussou Tapiierete*, grand Tapir, Tapir par excellence.

---

capreolus marinus. Une antilope des rochers distinguée du bouquetin d'Europe par une semblable épithète, *meer steinboock*, est aussi nommée *hircus marinus;* et ce qui est plus fort, elle est représentée avec des pattes de canard. La hyène, apportée en Angleterre, y est nommée *sea wolf;* Belon la peint les pieds dans l'eau et chassant aux poissons.

(1) Anta, c'est l'animal qu'on désigne aussi sous le nom de grand'bête; il est commun dans ces provinces, sa taille arrive à celle d'un veau de six mois, sa forme se rapproche de celle du cochon. Il a quatre ongles aux pieds de devant et trois à ceux de derrière..... Il a le museau prolongé en une trompe musculeuse et forte, dont il se sert pour attirer les alimens à sa bouche, et qui dans sa plus grande extension est longue d'un empan; il a la peau épaisse et résistante comme l'élan; le poil est court, épais et châtain de couleur; les oreilles ressemblent à celles de la génisse, mais elles sont plus arrondies et blanches à l'extrémité; les yeux sont laids et plombés (de couleur terne); l'animal a de l'aversion pour la lumière, aussi cherche-t-il les bois les plus profonds et les plus sombres. Sa chair est bonne à manger, surtout quand il est jeune. En se voyant assailli des chiens ou blessé, il court promptement vers la rivière dont il coupe le courant avec une grande facilité pour se mettre en sureté sur la rive opposée; il ne doit pas cependant être rangé parmi les amphibies, ainsi le pensent Pison et le P. Gaspard Escoti qui l'a figuré dans son ouvrage, mais d'une manière assez grossière. (Caulin, *Historia chorographica, natural, etc., de la nueva Andalucia*, Madrid, 1779, page 35.)

L'ouvrage de Caulin est rempli de très bonnes observations sur les animaux de la Guyane, et il est fâcheux qu'il ne soit pas plus connu des naturalistes. Il a été pourtant cité assez souvent par M. de Humboldt, dont les travaux nous prouvent, contrairement à une opinion qui n'a aujourd'hui que trop de partisans, que l'érudition n'est nullement incompatible avec l'esprit d'observation.

LIBRAIRIE DE GAUTHIER-VILLARS,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, A PARIS.

BACHET, sieur de MÉZIRIAC. — **Problèmes plaisants et délectables qui se font par les nombres.** 3e édition, revue, simplifiée et augmentée par *A. Labosne*, Professeur de Mathématiques. Petit in-8, caractères elzéviers, titre en deux couleurs, papier vergé, couverture parchemin; 1874 (*Tiré à petit nombre*)..... 6 fr.

BOUSSINGAULT, Membre de l'Institut. — **Agronomie, Chimie agricole et Physiologie.** 2e édition. Tomes I, II, III, IV et V; in-8, avec planches sur cuivre et figures dans le texte; 1860-1861-1864-1868-1874. 26 fr.

Chacun des tomes I à IV se vend séparément..... 5 fr.

Le tome V se vend séparément..... 6 fr.

(Le tome VI est *sous presse*.)

BRIOT et BOUQUET, Professeurs à la Faculté des Sciences. — **Théorie des fonctions elliptiques.** 2e édition. In-4, avec figures; 1875..... 30 fr.

CAHOURS (Auguste), Membre de l'Académie des Sciences. — **Traité de Chimie générale élémentaire.**

CHIMIE INORGANIQUE, *Leçons professées à l'École Centrale des Arts et Manufactures*. 3e édition. 2 volumes in-18 jésus avec 230 figures et 8 planches; 1874..... 10 fr.

Chaque volume se vend séparément..... 6 fr.

CHIMIE ORGANIQUE, *Leçons professées à l'École Polytechnique*. 3e édition. 3 volumes in-18 jésus avec figures; 1874-1875. Prix pour les souscripteurs..... 15 fr.

Chaque volume se vend séparément..... 6 fr.

DUBOIS (Edm.), Examinateur-Hydrographe de la Marine. — **Les passages de Vénus sur le disque solaire**, considérés au point de vue de la détermination de la distance du Soleil à la Terre; *Passage de* 1874; *Notions historiques sur les passages de* 1761 *et* 1769. In-18 jésus, avec figures dans le texte; 1873. 3 fr. 50 c.

FRENET (F.), Professeur honoraire de la Faculté des Sciences de Lyon. — **Recueil d'exercices sur le Calcul infinitésimal.** Ouvrage destiné aux Candidats à l'École Polytechnique et à l'École Normale, aux Élèves de ces Écoles et aux personnes qui se préparent à la licence ès Sciences mathématiques. 3e édition. In-8, avec figures dans le texte; 1873..... 7 fr. 50 c.

INSTITUT DE FRANCE. — **Recueil de Mémoires, Rapports et Documents relatifs à l'observation du passage de Vénus sur le Soleil.** In-4, avec 6 pl., dont 3 en chromolithographie; 1874... 12 fr. 50 c.

Ce Recueil contient : 1° Documents officiels relatifs à la mission de l'Académie, à la constitution de sa Commission et à son fonctionnement; 2° Mémoires, Rapports et Documents qu'elle a suscités ou recueillis dans la période qui a précédé le départ des Observateurs.

JAMIN (J.), Membre de l'Institut, Professeur à l'École Polytechnique et à la Faculté des Sciences de Paris. — **Petit Traité de Physique**, à l'usage des Établissements d'instruction, des aspirants aux Baccalauréats et des candidats aux Écoles du Gouvernement. In-8, avec 686 figures dans le texte; 1870. 8 fr.

Depuis le commencement de ce siècle, la Physique a été renouvelée dans son ensemble : aussi ne peut-on qu'approuver l'Auteur du *Petit Traité de Physique* d'avoir, même dans un livre élémentaire, exposé cette science au point de vue des théories nouvelles. Dès les premiers mots, l'Auteur démontre que la Chaleur est un mouvement moléculaire, et cette idée guide ensuite le lecteur dans toutes les expériences, et les explique. La Terre et les aimants n'étant que des solénoïdes, on fait dépendre le Magnétisme de l'Électricité. L'Acoustique montre dans leurs détails les vibrations longitudinales, transversales, circulaires et elliptiques; elle prépare à l'Optique. Cette dernière Partie enfin est l'étude des vibrations de toute sorte qui se produisent dans l'éther; les interférences et la polarisation sont expliquées de la manière la plus élémentaire, et la Théorie vibratoire est rendue accessible à tous.

Un tel mode d'enseignement est appelé à rendre un réel service aux Élèves en les délivrant de ce que les savants ont abandonné, en élevant leur esprit jusqu'à de plus hautes conceptions, en leur montrant l'ensemble philosophique d'une science déjà très-avancée et qui semble toucher à son terme.

PONCELET, Membre de l'Institut. — **Cours de Mécanique appliquée aux machines**; publié par M. Kretz, Ingénieur en chef des Manufactures de l'État. In-8, avec 117 figures dans le texte et 2 planches gravées sur cuivre; 1874..... 12 fr.

TYNDALL (J.), Professeur de Philosophie naturelle à l'Institution Royale de la Grande-Bretagne. — **La Chaleur**, *Mode de mouvement*. 2e édition française, traduite de l'anglais, sur la 4e édition, par M. l'*Abbé Moigno*. Un beau volume in-18 jésus de XXXII-576 pages, avec 110 figures dans le texte; 1874.. 8 fr.

TYNDALL (John), Professeur à l'Institution royale et à l'École royale des Mines de la Grande-Bretagne. — **Le Son**, traduit de l'anglais et augmenté d'un *Appendice* par M. l'Abbé Moigno. Un beau volume in-8, orné de 171 figures dans le texte; 1869..... 7 fr.

« J'ai cherché, dit le célèbre Auteur dans sa Préface, à rendre la science de l'Acoustique accessible à toutes » les personnes intelligentes, en y comprenant celles qui n'ont reçu aucune instruction scientifique particulière. » J'ai traité mon sujet d'une manière tout à fait expérimentale, et j'ai cherché à placer tellement chaque expé- » rience sous les yeux et dans la main du lecteur, qu'il puisse la réaliser lui-même ou la répéter. » Il serait impossible, en effet, de mieux choisir et de décrire dans un style plus attrayant les expériences nécessaires à la manifestation des faits et à la détermination des lois qui les régissent. Cet Ouvrage sera donc lu avec un vif intérêt, non-seulement par les Professeurs, qui y trouveront toutes les découvertes ayant renouvelé pour ainsi dire l'Acoustique depuis quelques années, mais encore par tous les amis d'une science claire et pratique.